Институтъ Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

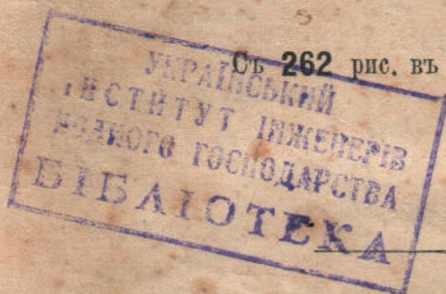
КУРСЪ

АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.

Д. А. Граве,

Преподавателя Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I
и привать-доцента Императорскаго С.-Петербургскаго университета.

Съ 262 рис. въ текстѣ и 1 листомъ чертежей.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1893.

Печатано по распоряженію Института инженеровъ путей сообщенія
Императора АЛЕКСАНДРА I.



ПРЕДИСЛОВІЕ.

Современная педагогическая литература по аналитической геометріи достаточно богата; не говоря уже о классическихъ руководствахъ на иностранныхъ языкахъ: Salmon, Briot et Bouquet, Lefebure de Fourcy и др., мы и на русскомъ языкѣ имѣемъ рядъ прекрасныхъ самостоятельныхъ курсовъ Брашмана, Сомова, Фролова, Ващенко-Захарченко, Андреева. Издавая новый курсъ по аналитической геометріи, необходимо сказать поэтому о немъ нѣсколько словъ. Настоящая книга обязана своимъ появленіемъ просвѣщенному вниманію начальства института инженеровъ Путей Сообщенія къ научнымъ нуждамъ учащихся, проявляющемуся въ щедромъ доставленіи средствъ къ изданію руководствъ по читаемымъ въ институтѣ предметамъ. Особенную благодарность я долженъ выразить Его Превосходительству г. директору института Михаилу Николаевичу Герсеванову за вниманіе къ моему труду, выразившееся въ совѣтѣ дополнить мое руководство прибавленіемъ статей, хотя-бы и не излагаемыхъ на лекціяхъ въ институтѣ, но могущихъ быть полезными для желающихъ ближе ознакомиться съ предметомъ. Слѣдуя этому совѣту, я ввелъ, при печатаніи моей книги, въ употребленіе два шрифта; причемъ крупнымъ шрифтомъ напечатаны статьи, обязательныя для изученія по программѣ института, мелкимъ же шрифтомъ напечатаны добавленія, причемъ въ общемъ объемѣ ихъ я

старался подойти къ программамъ, принятымъ въ высшихъ спеціальныхъ заведеніяхъ Франціи. Что касается основной части моего курса, а именно, теоріи линій и поверхностей второго порядка, то этой теоріи я придалъ новое изложеніе, простоту и практическія удобства котораго я имѣлъ возможность оцѣнить при производствѣ репетицій со студентами института. Этотъ новый способъ есть не что иное, какъ подробное примѣненіе сокращеннаго способа, основанное на извѣстномъ преобразованіи квадратичной формы при помощи выдѣленія квадратовъ линейныхъ функцій.

Д. Граве.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Геометрія двухъ измѣреній.

Общія свойства коническихъ сѣченій.

Объ алгебраическихъ кривыхъ высшихъ порядковъ и о кривыхъ трансцендентныхъ.

Геометрія трехъ измѣреній.

Плоскость.

Прямая линія.

Шаръ.

Поверхности второго порядка.

Прибавленіе.



АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Геометрія двухъ измѣреній.

1. Аналитическая геометрія имѣетъ своимъ предметомъ изученіе свойствъ линій и поверхностей, основанное на опредѣленіи ихъ при помощи алгебраическихъ уравненій, и даетъ общій способъ для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ при помощи алгебры.

Сперва мы будемъ заниматься разсмотрѣніемъ плоскихъ фигуръ, а потомъ перейдемъ къ изученію фигуръ въ пространствѣ.

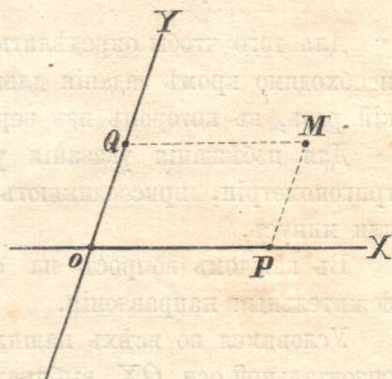
Въ основѣ аналитической геометріи лежитъ предложенный Декартомъ способъ опредѣленія положенія точки на плоскости и въ пространствѣ при помощи нѣкоторыхъ чиселъ называемыхъ координатами.

Прямолинейныя координаты.

2. Начнемъ съ наиболѣе простаго и употребительнаго способа опредѣленія положенія точки на плоскости. Задаются двѣ прямыя OX и OY, пересѣкающіяся въ нѣкоторой точкѣ O (см. черт. 1).

Эти прямыя называются осями. Оси, продолженныя неопредѣленно въ обѣ стороны отъ точки O дѣлятъ плоскость на четыре вертикальныхъ угла.

Положеніе всякой точки M въ одномъ изъ указанныхъ угловъ можетъ быть опредѣлено слѣдующимъ образомъ:



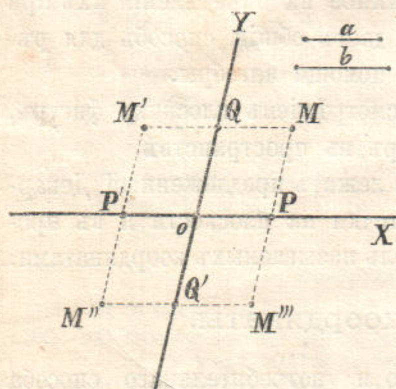
Черт. 1.

Изъ точки M проводимъ двѣ прямыя MP и MQ, параллельныя осямъ OY и OX. Пусть эти прямыя пересѣкутъ оси въ нѣкоторыхъ

двухъ точкахъ P и Q, тогда мы получимъ на осяхъ два отрѣзка OP и OQ.

Относительно отрѣзковъ можно замѣтить, что ихъ длины опредѣляются вполнѣ заданіемъ точки M, но заданіе длины отрѣзковъ на осяхъ еще не опредѣляетъ вполнѣ соотвѣтственной точки на плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ пусть будутъ заданы двѣ длины a и b; найдемъ точку, для которой отрѣзками на осяхъ OX и OY были бы заданныя длины a и b. Для указанной цѣли отложимъ по обѣ стороны точки O на оси OX отрѣзки OP и OP' равные a, точно также на оси OY два отрѣзка OQ и $Q'O$ равныхъ b (см. черт. 2). Получаются четыре точки P, P', Q, Q', черезъ которыя проводимъ прямыя, параллельныя осямъ; эти прямыя образуютъ параллелограмъ $M\,M'\,M''\,M'''$ въ вершинахъ котораго лежатъ точки M, M', M'', M''' съ одинаковыми отрѣзками на осяхъ: съ отрѣзкомъ равнымъ a на оси OX и съ отрѣзкомъ b на оси OY.



Черт. 2.

Итакъ, мы видимъ, что положеніе точки не опредѣляется вполнѣ длиною двухъ отрѣзковъ на осяхъ. Каждой парѣ отрѣзковъ соотвѣтствуютъ четыре точки въ разныхъ вертикальныхъ углахъ.

Для того чтобы опредѣлить положеніе точки на плоскости вполнѣ, необходимо кромѣ заданія длины отрѣзковъ на осяхъ прибавить всякій разъ, въ которомъ изъ вертикальныхъ угловъ лежитъ точка.

Для избѣжанія указанія угла, подобно тому какъ дѣлается въ тригонометріи, присоединяютъ къ отрѣзкамъ на осяхъ знаки плюсъ или минусъ.

Въ каждомъ вопросѣ на осяхъ выбираются разъ на всегда положительныя направленія.

Условимся во всѣхъ нашихъ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ на горизонтальной оси OX выбирать направленіе отъ точки O направо, положительное же направленіе оси OY вверхъ отъ оси OX.

Если отрѣзокъ OP точки M (см. черт. 2) лежитъ съ положительной стороны оси относительно точки O, то принято присоеди-

нять къ числу, выражающему длину этого отрѣзка знакъ + и наоборотъ, если отрѣзокъ лежитъ на отрицательной сторонѣ оси, какъ это имѣетъ мѣсто, напр. относительно точекъ M' и M'', тогда присоединяютъ къ длинѣ отрѣзка знакъ минусъ. Тоже самое, производится надъ отрѣзками на оси OY. Длины отрѣзковъ съ приписаннымъ къ нимъ тѣмъ или другимъ знакомъ представляютъ тѣ количества, при помощи которыхъ мы будемъ опредѣлять положеніе точки на плоскости.

3. Длина отрѣзка на оси OX для нѣкоторой точки M, взятая съ соотвѣтственнымъ знакомъ, называется обыкновенно *абсциссою* точки M и обозначается буквою x; длина же отрѣзка на оси OY, взятая съ соотвѣтственнымъ знакомъ называется *ординатою* точки и обозначается буквою y.

Количества x и y называются *прямолинейными координатами точки* M. Оси OX и OY называются *осями координатъ*: первая осью x-овъ, а вторая осью y-овъ.

Точка O называется *началомъ* координатъ.

Если уголъ, составляемый осями координатъ прямой, то координаты называются *прямоугольными*, въ обратномъ случаѣ система координатъ называется *косоугольною*.

4. Покажемъ, какъ по заданному положенію точки M на плоскости найти координаты этой точки.

Для удобства, углы образуемые осями координатъ будемъ называть I, II, III, IV, причемъ счетъ угловъ будемъ производить въ сторону обратную движенію часовой стрѣлки, начиная съ угла образованнаго положительными направленіями осей.

1) Возьмемъ точку M въ первомъ углѣ I. Проведемъ черезъ точку M прямыя MP, MQ параллельныя осямъ, тогда мы замѣтимъ, что въ первомъ углѣ обѣ координаты положительны

$$x = +OP,\ y = +OQ \text{ (см. черт. 3).}$$

2) Если точка M' будетъ взята во второмъ углѣ II, то ея абсцисса будетъ отрицательна, а ордината положительна

$$x' = -OP',\ y' = +OQ'.$$

3) Если точка M'' будетъ взята въ третьемъ углѣ III, то ея обѣ координаты отрицательны

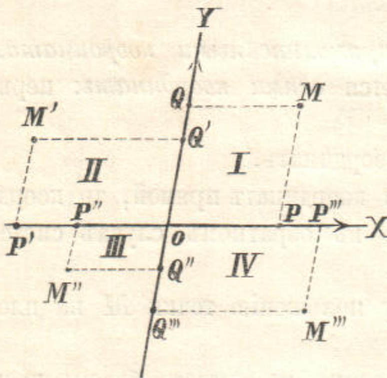
$$x'' = -OP'',\ y'' = -OQ''.$$

4) Наконецъ, если возьмемъ точку M''' въ четвертомъ углѣ IV, то абсцисса ея положительна, а ордината отрицательна

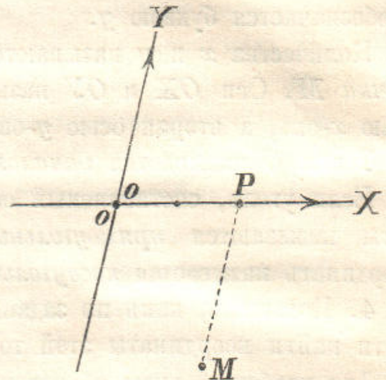
$$x''' = + OP''', \ y''' = - OQ'''.$$

5. На оборотъ, если заданы координаты точки, то мы легко найдемъ положенie самой точки на плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ заданы координаты $x = +2$; $y = -3$. Для построенія точки соотвѣтствующей заданнымъ координатамъ поступаемъ слѣдующимъ образомъ (см. черт. 4). Откладываемъ на оси x-овъ отрѣзокъ OP равный двумъ единицамъ длины, причемъ отрѣ-



Черт. 3.



Черт. 4.

зокъ этотъ откладываемъ направо отъ начала координатъ, ибо абсцисса, искомой точки положительна ($x = +2$) далѣе черезъ точку P проводимъ прямую, параллельную оси OY и на этой прямой откладываемъ отъ точки P отрѣзокъ MP равный тремъ единицамъ длины, этотъ отрѣзокъ откладывается внизъ отъ точки P, ибо ордината искомой точки отрицательна.

Сказанное построеніе даетъ окончательно одну вполнѣ опредѣленную точку M въ четвертомъ углѣ, координаты которой будутъ $x = +2$ и $y = -3$.

Точки съ координатами $x = a$, $y = b$ будемъ обозначать для краткости символомъ (a, b).

Подобнымъ образомъ мы построимъ точку по заданнымъ координатамъ, гдѣ бы ни лежала точка на плоскости, однимъ словомъ, мы можемъ сказать, что положеніе точки на плоскости опредѣляется

вполнѣ ея координатами. Итакъ, мы видимъ, что координаты точки суть нѣкоторыя длины, взятыя съ тѣмъ или другимъ знакомъ, причемъ условились при умноженіи координатъ пользоваться тѣмъ правиломъ знаковъ, которое употребляется въ алгебрѣ при перемноженіи положительныхъ и отрицательныхъ количествъ, другими словами, условились считать координаты точки количествами алгебраическими и производить надъ ними всѣ дѣйствія алгебры.

Задачи.

1. Центръ правильнаго шестиугольника взятъ за начало координатъ, положительныя направленія осей идутъ отъ центра къ двумъ рядомъ лежащимъ вершинамъ. Принимая сторону шестиугольника за единицу длины, написать координаты всѣхъ его вершинъ.

Отв. $(+1,0)$, $(0,+1)$, $(-1,+1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(+1,-1)$.

2. Построить точки, имѣющія координаты

$$(+1,0),\ \left(+\frac{1}{2},+\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},+\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ (-1,0),\ \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

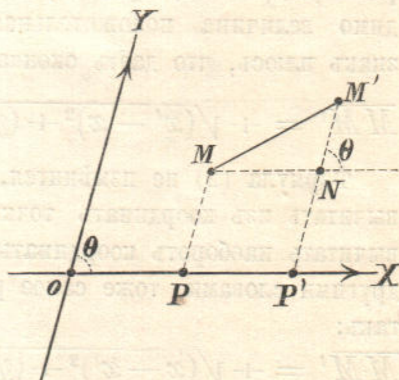
$$\left(+\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

предполагая оси координатъ прямоугольными.

Отв. Точки лежатъ въ вершинахъ правильнаго шестиугольника.

Разстояніе между двумя точками.

6. Приложимъ сказанное къ нахожденію разстоянія между двумя точками на плоскости, положеніе которыхъ задано ихъ координатами. Пусть заданы двѣ точки M и M' (см. черт. 5) и пусть координаты точки M будутъ x и y, а для точки M' нѣкоторыя другія двѣ координаты x', y'.



Черт. 5.

Для опредѣленности предположимъ, что обѣ точки M и M' взяты въ первомъ углѣ такъ, какъ это указано на чертежѣ (см. черт. 5). Проведя черезъ точки M и M' прямыя MP и $M'P'$ параллельныя оси OY до пересѣченія съ осью OX въ точкахъ P и P', мы получимъ:

$$x = +OP,\ y = +MP,\ x' = +OP',\ y' = +M'P'.$$

Проведя черезъ точку M прямую параллельную оси OX, получимъ треугольникъ MNM', двѣ стороны котораго параллельны осямъ координатъ.

Изъ треугольника MNM' получимъ

$$\overline{NM'}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NM'}^2 - 2\,\overline{MN}.\overline{M'N}\cos MNM' \qquad (1)$$

Обозначимъ уголъ между положительными направленіями осей черезъ θ, такъ что будетъ $\angle XOY = \theta$, откуда $\cos MNM' = -\cos\theta$ и формула (1) обращается въ слѣдующую:

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NM'}^2 + 2\,\overline{MN}.\overline{NM'}\cos\theta \qquad (1')$$

Остается показать, какъ найти стороны $\overline{MN}$ и $\overline{NM'}$. Мы замѣчаемъ, что

$$MN = PP' = OP' - OP = +OP' - (+OP) = x' - x;$$

точно также

$$M'N = M'P' - NP' = +M'P' - MP =$$

$$= +M'P' - (+MP) = y' - y$$

Откуда получимъ:

$$\overline{MM'}^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\theta.$$

Для полученія искомаго разстоянія $\overline{MM'}$ остается извлечь корень квадратный; причемъ, такъ какъ всякое разстояніе есть необходимо величина положительная, то передъ корнемъ надо поставить знакъ плюсъ, что даетъ окончательно слѣдующую формулу (2)

$$\overline{MM'} = +\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\theta}.$$

Формула (2) не измѣнится, если мы въ ней вмѣсто того, чтобы вычитать изъ координатъ точки M' координаты точки M, будемъ вычитать наоборотъ координаты точки M' изъ координатъ точки M, другими словами, тоже самое разстояніе можетъ быть написано еще такъ:

$$\overline{MM'} = +\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + 2(x-x')(y-y')\cos\theta}.$$

7. Покажемъ, прежде всего, что формула (2) будетъ имѣть мѣсто,

какъ бы ни были взяты на плоскости точки M и M'. Разсмотримъ, напр., случай, когда точка M' находится въ первомъ углѣ, а точка M въ третьемъ.

Проведя черезъ точки M и M' прямыя MP и $M'P'$ параллельныя оси OY до пересѣченія съ осью OX въ точкахъ P и P', получимъ для точки M координаты:

$$x = -OP, \; y = -MP;$$

координаты же точки M' будутъ

$$x' = +OP', \; y' = +P'M'.$$

Проведя черезъ точку M прямую MN, параллельную оси OX, получимъ треугольникъ MNM', изъ котораго будемъ имѣть

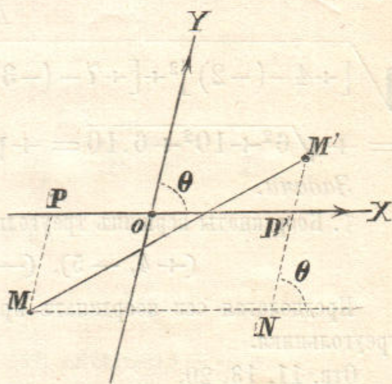
$$\overline{MM'^2} = \overline{MN^2} + \overline{NM'^2} + 2\,\overline{NM.NM'}\cos\theta$$

Остается найти NM и $M'N$ (см. черт. 6).

$$\overline{MN} = PP' = OP + OP' = +OP' - (-OP) = x' - x$$

$$\overline{M'N} = P'M' + P'N = +P'M' + PM = +P'M' - (-PM) = \\ = y' - y.$$

Отсюда мы видимъ, что для разстоянія двухъ точекъ получится опять формула (2), которая будетъ, слѣдовательно, имѣть мѣсто всегда, какъ бы ни были заданы точки на плоскости.



Черт. 6.

8. Если обѣ точки M и M' лежатъ на прямой параллельной оси OX или же на самой оси OX, то ихъ ординаты y и y' равны между собой и для разстоянія ихъ мы получимъ формулу

$$\overline{MM'} = \pm(x' - x)$$

Знакъ надо ставить тотъ, при которомъ получается положительное число, напр., $+(+2-1)$, $-(2-3)$.

Точно также, если точки лежатъ на прямой параллельной оси OY

или на самой оси OY, тогда $x=x'$ и формула (2) приметъ видъ

$$\overline{MM'} = \pm(y'-y).$$

Если одна изъ точекъ, напр. M', совпадаетъ съ началомъ координатъ, то ея обѣ координаты равны нулю $x'=0$, $y'=0$.

Разстояніе точки M (x, y) отъ начала координатъ выразится формулой:

$$\overline{OM} = +\sqrt{x^2+y^2+2\,xy\cos\theta}.$$

Если оси координатъ прямоугольныя, то $\cos\theta=0$ и разстояніе между двумя точками опредѣляется по формулѣ:

$$\overline{MM'} = +\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2},$$

а разстояніе отъ начала координатъ до точки M по формулѣ:

$$\overline{OM} = +\sqrt{x^2+y^2}.$$

8. Для примѣра найдемъ разстояніе между точками

$$M\ (x=-2,\ y=-3);\ M'\ (x'=+4,\ y'=+7),$$

причемъ уголъ между осями координатъ $\theta=60^0$.

Принимая въ соображеніе, что $\cos\theta=\cos 60^0=\frac{1}{2}$, мы получаемъ:

$$MM' =$$

$$\sqrt{[+4-(-2)]^2+[+7-(-3)]^2+2[+4-(-2)].[+7-(-3)].\frac{1}{2}}$$

$$=+\sqrt{6^2+10^2+6.10}=+\sqrt{36+100+60}=+\sqrt{196}=14.$$

Задачи.

1. Координаты вершинъ треугольника суть

$$(+4, -5),\ (-1, +7),\ (-12, +7).$$

Предполагая оси координатъ прямоугольными, найти длины сторонъ этого треугольника.

Отв. 11, 13, 20.

2. Выразить, что разстояніе точки (x, y) до точки $(1, 2)$ равно 3.

Отв. $(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

3. Выразить, что точка (x, y) одинаково удалена отъ точекъ $(1, 2)$, $(-1, +1)$.

Отв. $(x-1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-1)^2$, или $4x+2y=3$.

4. Найти точку равно удаленную отъ трехъ заданныхъ точекъ

$$(2, -1),\ (-1,0),\ (3, -1).$$

Отв. $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

5. Показать, что формула (2) даетъ для разстоянія двухъ точекъ всегда вещественный результатъ.

Отв. Эта формула можетъ быть написана такъ:

$$\overline{MM'} = +\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}[(x'-x)+(y'-y)]^2+\sin^2\frac{\theta}{2}[(x'-x)-(y'-y)]^2}.$$

10. По координатамъ двухъ точекъ найти координаты точки, дѣлящей разстояніе между этими точками въ отношеніи $m:n$.

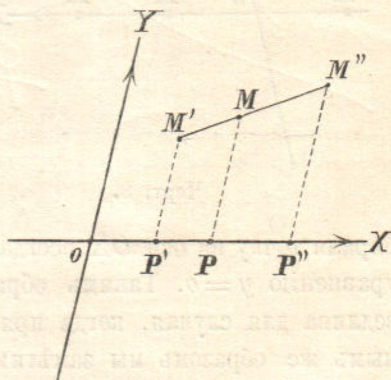
Пусть будутъ заданы точки M' (x', y') и M'' (x'', y''), требуется опредѣлить координаты (x, y) точки M, лежащей на прямой $M'M''$ между точками M' и M'' и дѣлящей разстояніе $M'M''$ на двѣ части MM' и MM'', находящіяся въ отношеніи $m:n$, то есть:

$$m:n = \overline{MM''}:\overline{MM'} = \overline{PP''}:\overline{PP'}$$

или

$$m:n = (x''-x):(x-x')$$

(см. черт. 7),



Черт. 7.

изъ этого уравненія получимъ:

$$x = \frac{mx' + nx''}{m+n}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$y = \frac{my' + ny''}{m+n}$$

Отсюда легко замѣтить, что координаты средины линіи, соединяющей двѣ заданныя точки

$$(x', y') \text{ и } (x'', y'')$$

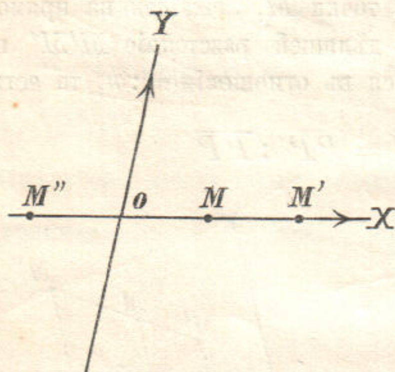
будутъ

$$\frac{x'+x''}{2},\ \frac{y'+y''}{2}$$

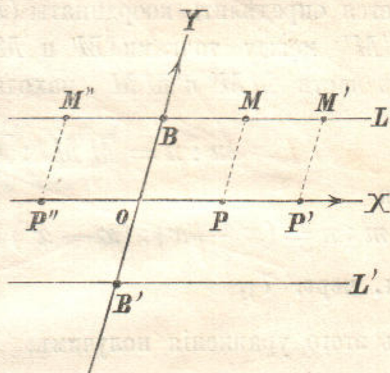
Прямая линія.

11. *Основная теорема.* Какъ бы ни было задано положеніе прямой на плоскости, координаты всѣхъ точекъ, лежащихъ на ней удовлетворяютъ нѣкоторому одному уравненію первой степени, общему для всѣхъ точекъ заданной прямой.

Для доказательства теоремы разсмотримъ всѣ возможные различные случаи положенія прямой на плоскости. Возьмемъ первый простѣйшій случай, когда прямая совпадаетъ съ осью x-овъ; тогда, если мы будемъ разсматривать рядъ точекъ на прямой M, M', M'', то получимъ (см. черт. 8) для точки M координаты: $x = + OM$, $y = o$; для точки M' координаты: $x' = + OM'$, $y' = o$; для точки M'' координаты: $x'' = - OM''$, $y'' = o$. —Однимъ словомъ мы видимъ, что какъ бы ни вы-



Черт. 8.



Черт. 9.

бирали точку на оси OX всегда ордината у такой точки удовлетворяетъ уравненію $y = o$. Такимъ образомъ мы видимъ, что теорема справедлива для случая, когда прямая совпадаетъ съ осью OX. Подобнымъ же образомъ мы замѣтимъ, что, если прямая совпадаетъ съ осью OY, то абсцисса x точекъ лежащихъ на ней будетъ удовлетворять уравненію $x = o$.

12. Такъ же просто разсматривается случай, когда заданная прямая параллельна одной изъ осей координатъ.

Разсмотримъ случай, когда прямая параллельна оси OX. Обозначимъ черезъ b ординату той точки, въ которой заданная прямая пересѣкаетъ ось OY. Для всякой прямой L, лежащей выше оси OX ордината b положительна и равна (см. черт. 9) $+ OB$; наоборотъ

для всякой прямой L', лежащей ниже оси OX, ордината b отрицательна и равна $-OB'$.

Если мы разсмотримъ на прямой L рядъ точекъ M, M', M'',..., то мы замѣтимъ, что ординаты этихъ точекъ $y=+PM$, $y'=+P'M'$, $y''=+P''M''$,... равны между собой т. е. мы получаемъ

$$y=y'=y''=\ldots=+OB=b$$

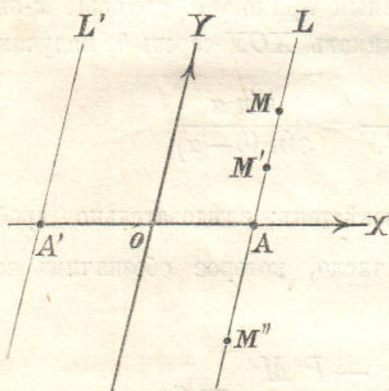
Откуда мы видимъ, что всѣ эти ординаты удовлетворяютъ уравненію

$$y=b.$$

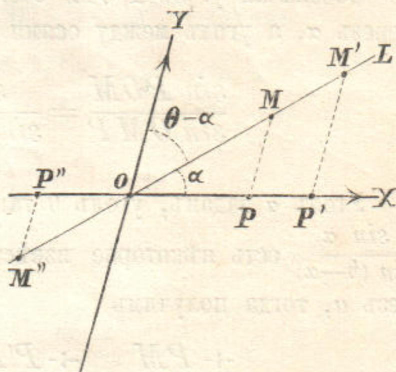
Такому же уравненію будутъ удовлетворять ординаты точекъ, лежащихъ на прямой L', съ тою лишь разницею, что для послѣдней прямой число b будетъ отрицательное, равное $-OB'$.

13. Для прямыхъ параллельныхъ оси OY получается результатъ аналогичный.

Если прямая L (см. черт. 10), параллельная оси OY, пересѣкаетъ ось OX съ положительной стороны въ нѣкоторой точкѣ A,



Черт. 10.



Черт. 11.

тогда мы замѣтимъ, что всѣ точки M, M', M'',..., лежащія на этой прямой имѣютъ общую абсциссу $+OA$ и, слѣдовательно, получимъ уравненіе $x=+OA$, которому удовлетворяютъ абсциссы точекъ, лежащихъ на заданной прямой L. Если прямая L', параллельная OY, пересѣкаетъ ось OX съ отрицательной стороны въ нѣкоторой точкѣ A', тогда получимъ уравненіе $x=-OA'$.—Однимъ словомъ, мы замѣчаемъ, что если обозначить черезъ a абсциссу точки, въ которой прямая параллельная оси OY пересѣкаетъ ось OX, то получится

уравненіе $x=a$, которому должны удовлетворять абсциссы точекъ, лежащихъ на подобной прямой.

14. Обращаемся теперь къ случаю, когда заданная прямая проходитъ черезъ начало координатъ. Предположимъ сначала, что заданная прямая лежитъ въ первомъ и третьемъ углѣ (см. черт. 11).

Возьмемъ на прямой рядъ точекъ M, M', M'',... Проведя черезъ точки M, M', M'' прямыя MP, $M'P'$, $M''P''$,... параллельныя оси OY, получимъ, координаты точекъ M, M', M'',...

$$M\ldots\begin{cases}x=+OP\\ y=+MP\end{cases};\ M'\ldots\begin{cases}x'=+OP'\\ y'=+M'P'\end{cases};\ M''\ldots\begin{cases}x''=-OP''\\ y''=-P''M''\end{cases}$$

Изъ треугольниковъ OMP, $OM'P'$, $OM''P''$ получимъ

$$\frac{PM}{OP}=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{P''M''}{OP''}=\frac{\sin POM}{\sin OMP}$$

Обозначая уголъ POM составляемый прямою L съ осью x-овъ черезъ α, а уголъ между осями координатъ XOY черезъ θ, получимъ

$$\frac{\sin POM}{\sin OMP}=\frac{\sin\alpha}{\sin MOY}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$$

Уголъ α заданъ, уголъ θ также извѣстенъ; слѣдовательно, дробь $\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$ есть нѣкоторое извѣстное число, которое обозначимъ черезъ a, тогда получимъ

$$\frac{+PM}{+OP}=\frac{+P'M'}{+OP'}=\frac{-P''M''}{-OP''}=a$$

Подставляя сюда координаты точекъ M, M', M'',... будемъ имѣть

$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}=\frac{y''}{x''}=a$$

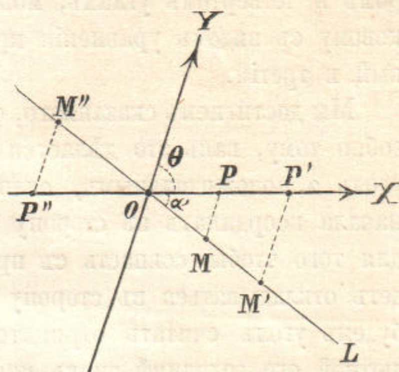
Отсюда, видимъ, что координаты любой точки на заданной прямой L удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{y}{x}=a\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

которое, по умноженіи на x обращается въ слѣдующее

$$y = ax.$$

Послѣднее же уравненіе есть уравненіе первой степени относительно x и y.



Черт. 12.

15. Разсмотримъ теперь прямую L', проходящую черезъ начало координатъ и лежащую во второмъ и четвертомъ углахъ.

Обозначимъ черезъ α' уголъ составленный прямою L' съ осью OX.

Возьмемъ на прямой L' рядъ точекъ M, M', M'' (см. черт. 12), координаты этихъ точекъ будутъ:

$$M \dots \begin{cases} x = +OP \\ y = -PM \end{cases} M' \dots \begin{cases} x' = +OP' \\ y' = -P'M' \end{cases} M'' \dots \begin{cases} x'' = -OP'' \\ y'' = +P''M'' \end{cases}$$

Изъ треугольниковъ OPM, $OP'M'$, $OP''M''$ получимъ:

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \frac{\sin MOP}{\sin OMP} = \frac{\sin \alpha'}{\sin(180^\circ - \theta - \alpha')} =$$

$$= \frac{\sin \alpha'}{\sin(\theta + \alpha')}$$

Обозначая извѣстное число $\frac{\sin \alpha'}{\sin(\theta + \alpha')}$ черезъ a', получимъ пропорцію

$$\frac{-PM}{+OP} = \frac{-P'M'}{+OP'} = \frac{+M''P''}{-OP'} = -a'$$

Подставляя сюда координаты точекъ M, M', M'', получимъ

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = -a'$$

откуда заключаемъ, что координаты точекъ, лежащихъ на прямой L' удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{y}{x} = -a' \quad \dots\dots\dots (2)$$

которое, по умноженіи на x, обращается въ уравненіе первой степени

$$y = -a'x$$

16. Покажемъ, что уравненіе (2) прямой L', лежащей во второмъ и четвертомъ углахъ, можетъ быть приведено къ виду одинаковому съ видомъ уравненія прямой, проходящей черезъ углы, первый и третій.

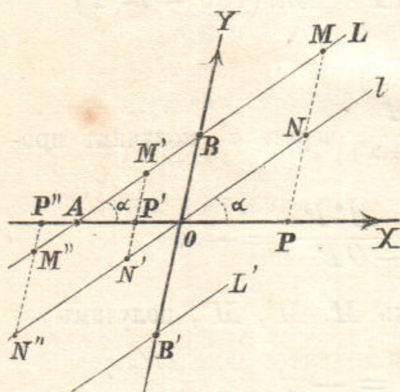
Мы достигнемъ сказаннаго, если условимся отсчитывать уголъ α подобно тому, какъ это дѣлается въ тригонометріи: мы будемъ считать уголъ α положительнымъ, если ось OX должна двигаться вокругъ начала координатъ въ сторону обратную движенію часовой стрѣлки, для того чтобы совпасть съ прямою L и наоборотъ если уголъ будетъ откладываться въ сторону движенія часовой стрѣлки, тогда мы будемъ уголъ считать отрицательнымъ, т. е. приписывать къ абсолютной его величинѣ знакъ минусъ.

Обращаясь къ случаю прямой L' мы замѣчаемъ что уголъ α для этой прямой отрицательный и равенъ $-\alpha'$, слѣдовательно, $\alpha=-\alpha'$, или что одно и тоже $\alpha'=-\alpha$. Подставляя это значеніе для α' въ выраженіе a', получимъ

$$a'=\frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta+\alpha')}=\frac{\sin(-\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}=-\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$$

Уравненіе (2) обращается такимъ образомъ въ слѣдующее

$$\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} \quad \text{(см. 14).}$$



Черт. 13.

17. Обращаемая наконецъ къ общему случаю, когда прямая задана на плоскости какъ нибудь.

Если прямая не параллельна ни одной изъ координатныхъ осей и не проходитъ черезъ начало координатъ, тогда ея положеніе можетъ быть задано двумя точками пересѣченія A и B съ осями координатъ OX и OY. Вмѣсто одной изъ точекъ, напр., вмѣсто точки A можетъ быть заданъ уголъ α, составленный прямою съ осью OX, положеніе же точки B задается ея ординатою b (см. черт. 13). Проведемъ черезъ начало координатъ прямую l параллельную заданной прямой L.

Будемъ разсматривать пары точекъ (M, N), (M', N'), (M'', N'') лежащихъ на прямыхъ L и l и имѣющихъ общія абсциссы (см. черт. 13) координаты этихъ точекъ будутъ

$$M\ldots\begin{cases}x=+OP\\ y=+PM\end{cases}\quad M'\ldots\begin{cases}x'=-OP'\\ y'=+P'M'\end{cases}\quad M''\ldots\begin{cases}x''=-OP''\\ y''=-P''M''\end{cases}$$

$$N\ldots\begin{cases}x_1=+OP\\ y_1=+PN\end{cases}\quad N'\ldots\begin{cases}x'_1=-OP'\\ y'_1=-P'N'\end{cases}\quad N''\ldots\begin{cases}x''_1=-OP''\\ y''_1=-P''N''\end{cases}$$

Имѣя въ виду, что $b=+OB$, получимъ

$$x_1=x,\ x'_1=x',\ x''_1=x'',\ldots$$

$$y_1=+PN=+PM-MN=+PM-OB=+PM-$$
$$-(+OB)=y-b$$

$$y'_1=-P'N'=-(M'N'-P'M')=+P'M'-M'N'=+M'P'-$$
$$-(+OB)=y'-b$$

$$y''_1=-P''N''=-(P''M''+M''N'')=-P''M''-$$
$$-M''N''=-P''M''-(+OB)=y''-b.$$

Итакъ, мы замѣчаемъ, что координаты x, y точекъ M на прямой L связаны съ координатами x_1, y_1 соотвѣтственныхъ точекъ N на прямой l уравненіями

$$y_1=y-b,\ x_1=x.$$

Координаты x_1 y_1 точекъ на прямой l проходящей черезъ начало координатъ на основаніи предшествовавшихъ замѣчаній удовлетворяютъ уравненію.

$$\frac{y_1}{x_1}=a,$$

гдѣ $a=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$, отсюда мы замѣчаемъ, что координаты точекъ, лежащихъ на прямой L будутъ удовлетворять уравненію

$$\frac{y-b}{x}=a.\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Случай, когда заданная прямая пересѣкаетъ ось y-овъ съ отрицательной стороны, какъ это имѣетъ мѣсто для прямой L' (см. черт. 13)

даетъ то-же самое уравненіе (3), только ордината b точки B', въ которой прямая L' пересѣкаетъ ось OY, отрицательна.

Мы разсмотрѣли такую прямую L, для которой параллельная прямая l проходитъ въ первомъ и третьемъ углахъ. Для случая обратнаго, т. е. когда прямая l лежитъ во второмъ и четвертомъ углахъ, получается то-же самое уравненіе (3), только число a становится отрицательнымъ.

18. Уравненіе (3) можетъ быть переписано въ такомъ видѣ

$$y = ax + b$$

и представляетъ собою нѣкоторое уравненіе первой степени относительно координатъ x и y.

Итакъ, мы видимъ, что и въ разобранномъ общемъ случаѣ положенія прямой на плоскости координаты точекъ, лежащихъ на ней, удовлетворяютъ нѣкоторому уравненію первой степени.

Всѣ вышеприведенныя разсужденія доказываютъ вполнѣ предложенную основную теорему.

19. *Обратная теорема.* Всякое уравненіе первой степени

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

опредѣляетъ нѣкоторую прямую на плоскости.

Другими словами теорема можетъ быть высказана такъ: какъ бы ни были заданы коэффиціенты A, B, C уравненія (1), всегда существуетъ нѣкоторая прямая, координаты точекъ которой удовлетворяютъ уравненію (1).

Если уравненіе (1) содержитъ одну только координату, что будетъ очевидно, тогда, когда одинъ изъ коэффиціентовъ A, B равенъ нулю; тогда уравненіе (1) принадлежитъ или прямой параллельной одной изъ осей координатъ, или самой оси.

Поэтому остается доказать теорему для уравненія содержащаго обѣ координаты, т. е. когда оба коэффиціента A и B не равны нулю и будутъ нѣкоторыми положительными или отрицательными числами, а C какое нибудь число или нуль.

Рѣшая уравненіе (1) относительно y, получимъ

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

Въ самомъ дѣлѣ, уголъ между новыми осями есть $\beta - \alpha$. Углы, которые составляютъ съ осью OX, старыя оси Ox, Oy суть

$$\angle (Ox,\ OX) = -\alpha, \quad \angle (Oy,\ OX) = \theta - \alpha.$$

Отсюда

$$X = \frac{x \sin(\beta - \alpha + \alpha) + y \sin(\beta - \alpha - \theta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)},$$

$$Y = \frac{x \sin(-\alpha) + y \sin(\theta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)},$$

т. е.

$$X = \frac{x \sin\beta + y \sin(\beta - \theta)}{\sin(\beta - \alpha)},$$

$$Y = \frac{-x \sin\alpha + y \sin(\theta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

41. Изъ полученныхъ нами формулъ (*) легко выписать формулы для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

1) Новыя оси координатъ прямоугольны. Въ этомъ случаѣ

$$\beta - \alpha = \pm \frac{\pi}{2},$$

слѣдовательно, въ формулахъ (*) надо поставить

$$\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2};$$

откуда получимъ

$$x = \frac{X \sin(\theta - \alpha) + Y \sin\left(\theta - \alpha \mp \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\theta} =$$

$$= \frac{X \sin(\theta - \alpha) \mp Y \cos(\theta - \alpha)}{\sin\theta},$$

$$y = \frac{X \sin\alpha + Y \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\theta} = \frac{X \sin\alpha \pm Y \cos\alpha}{\sin\theta}.$$

2) Старыя оси координатъ прямоугольны. Въ этомъ случаѣ

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

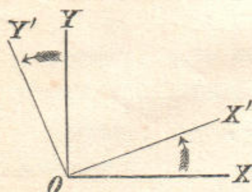
и формулы (*) обращаются въ слѣдующія

$$x = X \cos\alpha + Y \cos\beta,$$

$$y = X \sin\alpha + Y \sin\beta.$$

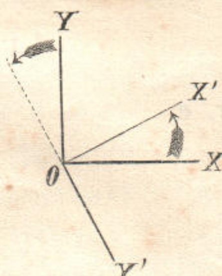
3) Обѣ системы прямоугольны. Въ этомъ случаѣ надо положить

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}.$$



Черт. 27.

Здѣсь знакъ + соотвѣтствуетъ тому случаю, когда вращеніемъ вокругъ начала координатъ старыя оси координатъ могутъ быть совмѣщены съ новыми (см. черт. 27) и знакъ — въ обратномъ случаѣ (см. черт. 28).



Черт. 28.

Формулы преобразованія одной прямоугольной системы координатъ въ другую также прямоугольную суть слѣдующія

$$x = X \cos\alpha \mp Y \sin\alpha$$

$$y = X \sin\alpha \pm Y \cos\alpha$$

3. *Общее преобразованіе координатъ.*

42. Разсмотримъ наконецъ общій случай, когда измѣняется и начало координатъ и направленіе осей. Положеніе новыхъ осей OX и OY опредѣляется координатами a, b новаго начала O' и углами α и β, которые образуютъ положительныя направленія этихъ осей съ положительнымъ направленіемъ старой оси Ox. Чтобы выразить старыя координаты x, y въ новыхъ X и Y введемъ въ разсмотрѣніе вспомогательную координатную систему $x'Oy'$, начало которой совпадаетъ съ началомъ новой системы XOY, а оси параллельны старымъ OX и OY, тогда, называя координаты точки относительно этихъ вспомогательныхъ осей черезъ x', y', получимъ на основаніи сказаннаго.

$$x = a + x', \; y = b + y'.$$

На основаніи же формулъ § 40, получимъ

$$x' = \frac{X\,sin\,(\theta - \alpha) + У\,sin\,(\theta - \beta)}{sin\,\theta}$$

$$y' = \frac{X\,sin\,\alpha + У\,sin\,\beta}{sin\,\theta},$$

отсюда получаемъ искомыя общія формулы для преобразованія одной прямолинейной системы координатъ въ другую

$$x = a + \frac{X\,sin\,(\theta - \alpha) + У\,sin\,(\theta - \beta)}{sin\,\theta}$$

$$y = b + \frac{X\,sin\,\alpha + У\,sin\,\beta}{sin\,\theta}.$$

43. Для приложенія выведенныхъ нами формулъ преобразуемъ выраженіе для квадрата разстоянія точки отъ начала координатъ

$$x^2 + y^2 + 2xy\,cos\,\theta$$

къ новымъ координатамъ X, $У$, оси которыхъ составляютъ съ осью x-овъ углы α, β, начало же остается тоже самое.

Воспользуемся формулами

$$x\,sin\,\theta = X\,sin\,(\theta - \alpha) + У\,sin\,(\theta - \beta) =$$

$$= X\,(sin\,\theta\,cos\,\alpha - cos\,\theta\,sin\,\alpha) + У\,(sin\,\theta\,cos\,\beta - cos\,\theta\,sin\,\beta) =$$

$$= sin\,\theta\,(X\,cos\,\alpha + У\,cos\,\beta) - cos\,\theta\,(X\,sin\,\alpha + У\,sin\,\beta) =$$

$$= sin\,\theta\,M - cos\,\theta\,N, \qquad (1)$$

гдѣ

$$M = X\,cos\,\alpha + У\,cos\,\beta,\ N = X\,sin\,\alpha + У\,sin\,\beta$$

$$y\,sin\,\theta = X\,sin\,\alpha + У\,sin\,\beta = N \qquad (2)$$

Итакъ, воспользуемся формулами (1) и (2)

$$sin^2\,\theta\,(x^2 + y^2 + 2xy\,cos\,\theta) = (M^2 + N^2)\,sin^2\,\theta,$$

откуда

$$x^2 + y^2 + 2xy\,cos\,\theta = M^2 + N^2 =$$

$$= [X\,cos\,\alpha + У\,cos\,\beta]^2 + [X\,sin\,\alpha + У\,sin\,\beta]^2 =$$

$$= X^2 + У^2 + 2XУ \cdot [cos\,\alpha\,cos\,\beta + sin\,\alpha\,sin\,\beta] =$$

$$= X^2 + У^2 + 2XУ \cdot cos\,(\beta - \alpha)$$

Такъ какъ уголъ $\beta - \alpha$ есть уголъ между новыми осями, который мы можемъ обозначить черезъ Θ, то мы получимъ

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta = X^2 + Y^2 + 2XY \cos\Theta.$$

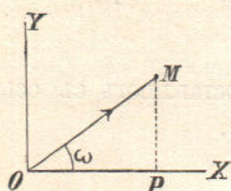
Полярныя координаты.

44. Положеніе точки M можетъ быть опредѣлено при помощи длины r разстоянія OM точки M отъ начала координатъ и угла ω, составляемаго прямою OM съ осью OX (см. черт. 29).

Величины r и ω носятъ названіе *полярныхъ координатъ* точки M, r называется *радіусомъ векторомъ* точки, точка O—*полюсомъ*, а прямая OX полярною осью.

Опуская изъ точки M перпендикуляръ MP на ось OX, получимъ прямоугольныя координаты точки M:

$$x = OP,\ y = PM.$$



Черт. 29.

Изъ прямоугольнаго треугольника OMP получимъ

$$x = OP = OM \cos MOP = r \cos\omega$$

$$y = PM = OM \sin MOP = r \sin\omega$$

Итакъ, преобразованіе прямоугольныхъ координатъ въ полярныя производится при помощи формулъ

$$x = r \cos\omega,\ y = r \sin\omega.$$

Обратное преобразованіе совершается по формуламъ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \omega = arctg\ \frac{y}{x}.$$

Геометрическія мѣста.

45. Геометрическимъ мѣстомъ точекъ называется совокупность точекъ, обладающихъ нѣкоторымъ общимъ для всѣхъ этихъ точекъ свойствомъ.

Такъ напр., окружность круга есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ нѣкоторой точки называемой центромъ.

Точно также, полученную нами основную теорему о прямой линіи можно высказать такъ: прямая линія есть геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ нѣкоторому уравненію первой степени

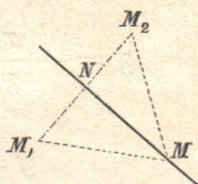
$$Ax + By + C = 0.$$

Часто бываетъ возможно непосредственно выразить указанное свойство точекъ геометрическаго мѣста при помощи алгебраическихъ знаковъ и получить такимъ образомъ нѣкоторое уравненіе. Это уравненіе называется уравненіемъ геометрическаго мѣста.

Пояснимъ сказанное примѣрами.

46. **Задача**. Найти геометрическое мѣсто точекъ равно отстоящихъ отъ двухъ заданныхъ.

Пусть координаты заданныхъ точекъ M_1 и M_2 будутъ: $M_1 (x_1 y_1)$, $M_2 (x_2, y_2)$. Координаты же точки M, принадлежащей къ искомому геометрическому мѣсту, (x, y) (см. черт. 30).



Черт. 30.

Условіе задачи можетъ быть выражено равенствомъ: $\overline{MM}_1 = \overline{MM}_2$, которое можетъ быть написано при прямоугольныхъ осяхъ координатъ въ слѣдующемъ видѣ

$$+\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = +\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}.$$

Возвышая обѣ части послѣдняго уравненія въ квадратъ, получимъ

$$x^2 - 2xx_1 + x_1{}^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1{}^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2{}^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2{}^2,$$

или

$$2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) + x_1{}^2 - x_2{}^2 + y_1{}^2 - y_2{}^2 = 0.$$

Дѣля это уравненіе на 2, получимъ искомое уравненіе геометрическаго мѣста въ слѣдующемъ видѣ

$$(x_2 - x_1)\left[x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right] + (y_2 - y_1)\left[y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right] = 0. \quad (1)$$

Мы замѣчаемъ, что искомое геометрическое мѣсто есть прямая линія, ибо уравненіе (1) первой степени относительно x и y.

Съ перваго взгляда видно, что прямая (1) проходитъ черезъ точ-

ку N, координаты которой суть среднія ариѳметическія $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$ отъ координатъ x_1, x_2, y_1, y_2 заданныхъ точекъ.

Точка N лежитъ на срединѣ разстоянія $M_1 M_2$ между заданными точками.

Остается показать, что прямая (1) перпендикулярна къ прямой $M_1 M_2$. Уравненіе послѣдней прямой $M_1 M_2$ будетъ

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{2}$$

Преобразуемъ уравненія (1) и (2) рѣшеніемъ относительно y, получимъ слѣдующихъ два уравненія

$$y=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}x+\frac{x_1+x_2}{2}\,\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}+\frac{y_1+y_2}{2} \tag{1'}$$

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+x_1\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}+y_1. \tag{2'}$$

Прямая (1'), или, что одно и тоже, прямая (1) образуетъ съ осью OX уголъ, тангенсъ котораго есть $-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$; прямая же (2'), или, что одно и тоже, прямая (2) образуетъ съ осью OX уголъ, тангенсъ котораго есть $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Изъ указанныхъ выраженій для тангенсовъ легко заключить, что обѣ прямыя MN (1) и M_1 M_2 (2) взаимно перпендикулярны, что и требовалось доказать.

47. **Задача**. Найти геометрическое мѣсто точекъ равно удаленныхъ отъ заданныхъ двухъ прямыхъ.

Пусть заданы уравненія двухъ прямыхъ L и L_1, пересѣкающихся въ нѣкоторой точкѣ O.

(1) $$Ax+By+C=0.$$

(2) $$A_1x+B_1y+C_1=0.$$

Пусть одна изъ точекъ, принадлежащихъ искомому геометрическому мѣсту, будетъ M (см. черт. 31) съ координатами ξ и η.

Разстоянія точки M до прямыхъ (1) и (2) выразятся формулами.

$$\frac{A\xi+B\eta+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\ \frac{A_1\xi+B_1\eta+C_1}{\pm\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}.$$

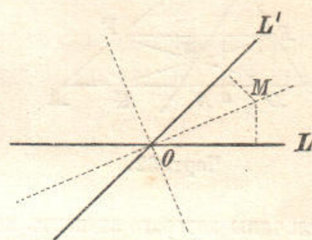
Отсюда получимъ уравненія биссекторовъ въ такомъ видѣ

$$\frac{A\xi+B\eta+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A_1\xi+B_1\eta+C_1}{\pm\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}. \qquad (3)$$

Мѣняя знаки у корней квадратныхъ въ послѣднемъ уравненіи, мы получимъ два различныхъ уравненія

$$\frac{A\xi+B\eta+C}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{A_1\xi+B_1\eta+C_1}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}=0.$$

$$\frac{A\xi+B\eta+C}{\sqrt{A^2+B^2}}-\frac{A_1\xi+B_1\eta+C_1}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}=0.$$



Черт. 31.

Если уравненія заданныхъ прямыхъ L и L_1 имѣютъ видъ

$$\mathfrak{A}=\cos\alpha\, x+y\sin\alpha-p=0,\ \mathfrak{A}_1=\cos\alpha_1\, x+y\sin\alpha_1-p_1=0,$$

то уравненія двухъ биссекторовъ булутъ

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1=0;\ \mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1=0.$$

48. Часто приходится разсматривать геометрическія мѣста, образуемыя движеніемъ точки, принадлежащей къ нѣкоторой фигурѣ, измѣняющей свой видъ и положеніе на плоскости.

Каждое изъ положеній точки опредѣляется построеніемъ фигуры, различныя части которой зависятъ отъ одного произвольнаго параметра k. Въ подобныхъ вопросахъ, если точка описываетъ при движеніи нѣкоторую линію, приходится поступать такъ. На основаніи условій задачи находимъ два уравненія между координатами x и y

$$f_1(x,y,k)=0,\ f_2(x,y,k)=0.$$

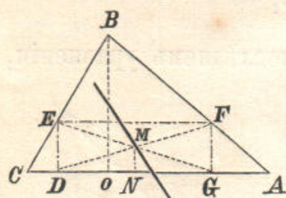
Для нахожденія уравненія искомаго геометрическаго мѣста остается изъ двухъ послѣднихъ уравненій исключить параметръ k. Для производства сказаннаго исключенія рѣшаемъ уравненіе $f_1(x,y,k)=o$ относительно k и получаемъ $k=\varphi(x,y)$; подставляемъ получен-

ное выраженіе для k въ уравненіе $f_2(x, y, k) = 0$; получимъ искомое уравненіе геометрическаго мѣста въ слѣдующемъ видѣ

$$f_2[x, y, \varphi(x, y)] = 0.$$

49. Поясвимъ сказанное примѣромъ.

Задача. Найти геометрическое мѣсто центровъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данный треугольникъ.



Черт. 32.

Мы примемъ за оси координатъ высоту треугольника OB и его основаніе OA. Пусть будетъ $OB = h$, $OA = a$, $OC = c$ (см. черт. 32).

Уравненія сторонъ AB и CB будутъ

$$\frac{y}{h} + \frac{x}{a} = 1; \frac{y}{x} - \frac{x}{c} = 1.$$

Возьмемъ высоту ED перемѣннаго прямоугольника $EDFG$ за тотъ перемѣнный параметръ k, отъ величины котораго зависитъ положеніе и размѣры вписаннаго прямоугольника.

Центръ M прямоугольника лежитъ въ пересѣченіи двухъ его діагоналей EG и DF, а потому его координаты будутъ

$$\eta = MN = \frac{ED}{2} = \frac{k}{2}$$

$$\xi = ON = \frac{x_F + x_E}{2}$$

гдѣ x_F есть абсцисса точки F, а x_E есть абсцисса точки E. Остается найти эти двѣ абсциссы. Точки E и F лежатъ на пересѣченіи прямыхъ AB и BC съ прямою EF, уравненіе которой есть $y = k$.

Отсюда опредѣляемъ x_F и x_E по уравненіямъ

$$\frac{k}{h} + \frac{x_F}{a} = 1, \quad \frac{k}{h} - \frac{x_E}{c} = 1,$$

откуда

$$x_F = a\left(1 - \frac{k}{h}\right), \quad x_E = -c\left(1 - \frac{k}{h}\right);$$

получаемъ окончательно два уравненія

$$\eta = \frac{k}{2}; \quad \xi = \frac{a-c}{2}\left(1 - \frac{k}{h}\right),$$

между которыми остается исключить произвольный параметръ k для полученія искомаго геометрическаго мѣста

$$2\xi = (a-c)\left(1 - \frac{2\eta}{h}\right) \text{ или } \frac{2\xi}{a-c} + \frac{2\eta}{h} = 1.$$

Полученное уравненіе первой степени относительно ξ и η, а поэтому опредѣляетъ прямую,

Эта прямая имѣетъ на осяхъ координатъ отрѣзки $\frac{a-c}{2}$ и $\frac{h}{2}$, другими словами, есть ничто иное, какъ линія, соединяющая средину высоты со срединой основанія.

50. Разсмотримъ болѣе общій случай, когда положеніе частей подвижной фигуры зависитъ отъ n произвольныхъ параметровъ

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots\ k_n.$$

Въ этомъ случаѣ, если разсматриваемая точка описываетъ нѣкорую линію, можно бываетъ по условіямъ задачи получить $n+1$ уравненій вида

$$f_1\ (x,\ y,\ k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n) = 0$$
$$f_2\ (x,\ y,\ k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n) = 0$$
$$f_3\ (x,\ y,\ k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{n+1}\ (x,\ y,\ k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n) = 0$$

Черезъ исключеніе изъ этихъ уравненій n величинъ $k_1, k_2, \ldots k_n$ получится въ результатѣ одно уравненіе между x и y

$$\Phi\ (x, y) = 0,$$

которое и будетъ искомымъ уравненіемъ геометрическаго мѣста.

Задачи:

1. Дано основаніе треугольника по величинѣ и положенію и разность квадратовъ двухъ другихъ сторонъ; найти геометрическое мѣсто вершины противолежащей основанію.

Отв. Прямая, перпендикулярная къ основанію.

2. Данъ уголъ треугольника по величинѣ и положенію и сумма двухъ прилежащихъ ему сторонъ. Найти геометрическое мѣсто точки, дѣлящей третью сторону въ данномъ отношеніи.

Отв. Прямая.

3. Даны двѣ прямыя, образующія извѣстный уголъ; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія перпендикуляровъ къ нимъ при условіи, что сумма или разность разстояній этихъ перпендикуляровъ отъ вершины даннаго угла имѣетъ данную величину.

Отв. Прямая, параллельная одному изъ биссекторовъ даннаго угла.

4. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія тѣхъ же перпендикуляровъ

(см. зад. 3) при условіи что прямая, соединяющая ихъ основанія имѣетъ данное направленіе.

Отв. Прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ.

5. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія тѣхъ же перпендикуляровъ при условіи, что средина разстоянія между ихъ основаніями находится на данной прямой.

Отв. Прямая.

6. Стороны перемѣннаго треугольника вращаются около трехъ неподвижныхъ точекъ, расположенныхъ по прямой линіи, между тѣмъ какъ двѣ изъ вершинъ перемѣщаются по двумъ неподвижнымъ прямымъ; найти геометрическое мѣсто, описанное третьей вершиной.

Отв. Прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія двухъ заданныхъ.

7. Стороны многоугольника (съ n сторонами) вращаются вокругъ n неподвижныхъ точекъ, расположенныхъ на прямой линіи, а $n-1$ вершинъ этого многоугольника перемѣщаются по $n-1$ неподвижнымъ прямымъ; найти геометрическое мѣсто n-ой вершины.

Отв. Прямая.

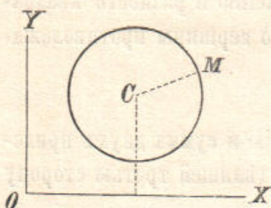
О кругѣ.

51. Кругъ есть геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ нѣкоторой заданной точки называемой центромъ.

Это свойство точекъ M (см. черт. 33), лежащихъ на кругѣ можетъ быть выражено нѣкоторымъ уравненіемъ, которому должны удовлетворять координаты каждой изъ нихъ.

Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ для растоянія точки M (x, y) на кругѣ отъ центра C (a, b) получимъ для прямоугольныхъ осей координатъ

$$+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$



Черт. 33.

Это разстояніе должно быть постоянно и равно длинѣ радіуса r, отсюда получаемъ уравненіе

$$r=+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

которое по возвышеніи въ квадратъ обращается въ слѣдующее

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (1)$$

Послѣднее уравненіе есть искомое уравненіе круга, ибо ему

удовлетворяютъ координаты каждой точки, лежащей на кругѣ, радіусъ котораго есть r, а координаты центра суть a и b.

Раскрывая въ уравненіи (1) скобки, мы замѣтимъ, что это уравненіе принимаетъ видъ

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \qquad (2)$$

Легко показать, что наоборотъ всякое уравненіе вида (2) опредѣляетъ нѣкоторый кругъ.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (2) можетъ быть переписано въ слѣдующемъ видѣ

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2}{4} - C. \qquad (2')$$

Легко замѣтить по виду послѣдняго уравненія, что оно опредѣляетъ кругъ, центръ котораго находится въ точкѣ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, а радіусъ равенъ $+\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4} - C}$.

Для того, чтобы кругъ дѣйствительно существовалъ, необходимо, чтобы послѣдній корень квадратный былъ вещественный, другими словами, чтобы подкоренная величина была положительная, т. е. чтобы было

$$\frac{A^2 + B^2}{4} > C.$$

Если оси координатъ косоугольныя, тогда уравненіе круга напишется такъ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2\,(x - a)\,(y - b)\cos\theta = r^2.$$

52. Уравненіе круга можетъ быть, какъ мы уже видѣли представлено въ видѣ

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

и заключаетъ три произвольныхъ коэффиціента A, B, C, а потому положеніе круга на плоскости можетъ быть опредѣлено тремя условіями.

Можно требовать напримѣръ, чтобы кругъ проходилъ черезъ три заданныя точки $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$, $(x_3\ y_3)$.

Для указанной цѣли придется опредѣлить коэфиціенты A, B, C по тремъ уравненіямъ.

$$x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$$
$$x_2^2 + y_2^2 + Ax_2 + By_2 + C = 0$$
$$x_3^2 + y_3^2 + Ax_3 + By_3 + C = 0$$

53. Всякая прямая пересѣкаетъ кругъ въ двухъ точкахъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ уравненіе круга

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{1}$$

и уравненіе прямой въ видѣ

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p. \tag{2}$$

Для полученія координатъ точекъ пересѣченія круга (1) и прямой (2) остается рѣшить уравненіе (1) и (2) совмѣстно относительно x и y. Преобразуемъ предварительно для удобства уравненіе (2) такъ

$$(x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha = p - a\cos\alpha - b\sin\alpha;$$

обозначая вторую часть, $p - a\cos\alpha - b\sin\alpha$, черезъ δ, мы замѣчаемъ, что δ есть по абсолютной величинѣ ничто иное, какъ разстояніе отъ центра круга до прямой. Остается рѣшить уравненіе (1) и $(x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha = \delta$ относительно $x-a$ и $y-b$, получаемъ

$$x - a = \delta\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{r^2 - \delta^2}$$
$$y - b = \delta\sin\alpha \mp \cos\alpha\sqrt{r^2 - \delta^2}$$

Итакъ, мы видимъ, что, если $\delta < r$, то координаты обѣихъ точекъ дѣйствительны, если $\delta = r$, тогда двѣ точки сѣченія сливаются въ одну съ координатами

$$x = a + r\cos\alpha$$
$$y = b + r\sin\alpha,$$

а сѣкущая обращается въ касательную, имѣющую уравненіемъ

$$(x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha = r$$

и наконецъ, если разстояніе центра до прямой δ больше радіуса круга, то координаты точекъ сѣченія будутъ мнимыя и кругъ не пересѣкается

прямою. Иногда вводятъ въ разсмотрѣніе *мнимыя* точки, или точки, которыхъ координаты мнимыя; такъ что, когда прямая не пересѣкаетъ круга, то говорятъ, что прямая пересѣкаетъ кругъ въ двухъ мнимыхъ точкахъ.

54. Написавъ уравненіе въ видѣ

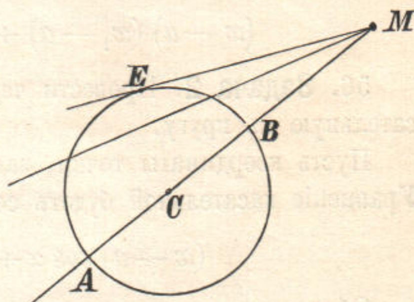
$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0, \tag{1}$$

обозначимъ первую часть его черезъ U, такъ что $U=(x-a)^2+$ $+(y-b)^2-r^2$, мы видимъ, что U равно нулю, если x и y обозначаютъ координаты какой нибудь точки, лежащей на кругѣ (1).

Покажемъ теперь геометрическое значеніе U, если x и y принадлежатъ точкѣ M, не лежащей на кругѣ (см. черт. 34). Выраженіе $(x-a)^2+(y-b)^2$ есть квадратъ разстоянія MC точки M до центра, слѣдовательно,

$$U=\overline{MC}^2-r^2=(MC+r)\ (MC-r)=MA\,.\,MB.$$

На основаніи же извѣстной теоремы элементарной геометріи, мы знаемъ, что $MA.\ BM=EM^2$, гдѣ EM касательная проведенная изъ точки M къ кругу. Если же точка M внутри круга, тогда U будетъ равно, взятому со знакомъ —, произведенію отрѣзковъ сѣкущей, проходящей черезъ точку M.



Черт. 34.

55. **Задача 1.** Провести черезъ точку, лежащую на кругѣ, касательную къ кругу. Пусть данъ кругъ

$$(x-a)^2-(y-b)^2-r^2=0$$

и точка на немъ съ координатами $(x_1,\ y_1)$, такъ что эти координаты удовлетворяютъ уравненію

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2=0. \tag{1}$$

Какъ мы уже видѣли, уравненіе касательной имѣетъ видъ

$$(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha=r \tag{2}$$

Остается уголъ α подобрать такъ, чтобы касательная проходила черезъ точку $(x_1,\ y_1)$.

Подставляя въ уравненіе (2), получимъ

$$(x_1 - a)\cos\alpha + (y_1 - b)\sin\alpha = r.$$

Возвышая послѣднее уравненіе въ квадратъ и вычитая изъ уравненія (1), получимъ

$$(x_1 - a)^2 \sin^2\alpha - 2(x_1 - a)(y_1 - b)\sin\alpha\cos\alpha + (y_1 - b)^2\cos^2\alpha = o,$$

откуда

$$\frac{\sin\alpha}{y_1 - b} = \frac{\cos\alpha}{x_1 - a}.$$

Изъ этой пропорціи получимъ

$$\frac{\sin\alpha}{y_1 - b} = \frac{\cos\alpha}{x_1 - a} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2}} = \frac{1}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - a}{r};\ \sin\alpha = \frac{y_1 - b}{r},$$

откуда окончательное уравненіе касательной будетъ имѣть видъ

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2.$$

56. **Задача 2**. Провести черезъ точку, лежащую внѣ круга, касательную къ кругу.

Пусть координаты точки, заданной внѣ круга, будутъ x_1 и y_1. Уравненіе касательной будетъ согласно предъидущему

$$(x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha = r.$$

Обозначая координаты точки касанія черезъ ξ и η, получимъ уравненіе касательной въ видѣ

$$(x - a)(\xi - a) + (y - b)(\eta - b) = r^2 \quad (1)$$

Выражая условіе, что точка $x_1\ y_1$ лежитъ на касательной, получимъ

$$(x_1 - a)(\xi - a) + (y_1 - b)(\eta - b) = r^2;$$

кромѣ того

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 = r^2; \quad (2)$$

откуда, обозначая

$$x_1 - a = \delta_1 \cos\alpha_1,\ y_1 - b = \delta_1 \sin a_1$$

получимъ
$$\cos\alpha_1\,(\xi - a) + \sin\alpha_1\,(\eta - b) = \frac{r^2}{\delta_1}, \qquad (3)$$
возвышая въ квадратъ послѣднее уравненіе, вычитая изъ (2) и извлекая изъ результата корень квадратный, получимъ
$$(\xi - a)\sin\alpha_1 - (\eta - b)\cos\alpha_1 = r\,\frac{\sqrt{\delta_1^{\,2} - r^2}}{\delta_1}. \qquad (4)$$

Изъ послѣднихъ двухъ уравненій (3) и (4) найдемъ $\xi - a$ и $\eta - b$ и подставимъ эти значенія въ уравненіе (1), получимъ окончательно уравненіе касательной, проведенной изъ точки $x_1\,y_1$ къ кругу $U = 0$. Получаются двѣ касательныя, ибо корень $\sqrt{\delta_1^{\,2} - r^2}$ имѣетъ два знака.

57. **Задача 3**. Провести касательную къ кругу параллельно заданной прямой.

Приведя уравненіе заданной прямой къ виду
$$x\cos\mu + y\sin\mu = p,$$
получимъ уравненіе искомой касательной въ видѣ
$$(x - a)\cos\mu + (y - b)\sin\mu = r.$$

58. **Задача 4**. Найти точки пересѣченія двухъ круговъ.

Пусть
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (2)$$
будутъ уравненія двухъ круговъ относительно прямоугольныхъ координатъ. Точки пересѣченія опредѣлятся изъ этихъ уравненій. Одинъ изъ круговъ можно замѣнить прямою линіей, получаемою черезъ вычитаніе уравненія (2) изъ уравненія (1).
$$(A - A_1)x + (B - B_1)y + (C - C_1) = 0. \qquad (3)$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что задача приводится на нахожденіе точекъ пересѣченія круга (1) съ прямою (3). Если прямая пересѣчетъ кругъ, то оба круга будутъ имѣть двѣ точки пересѣченія. Если прямая будетъ касательная къ кругу (1), то обѣ точки сливаются и оба круга касаются. Наконецъ, если прямая не пересѣкаетъ круга, то два круга не пересѣкаются. Во всѣхъ случаяхъ прямая (3) дѣйствительно существуетъ и имѣетъ замѣчательное геометри-

ческое значеніе. Эта прямая есть геометрическое мѣсто точекъ такихъ, что произведенія отрѣзковъ сѣкущихъ, проведенныхъ изъ каждой изъ нихъ къ тому и другому кругу, будутъ одинаковы. Это слѣдуетъ изъ того, что первыя части уравненій (1) и (2) выражаютъ ничто иное какъ произведеніе отрѣзковъ сѣкущихъ, проведенныхъ изъ какой нибудь точки M съ координатами x, y. Прямая (3) называется *радикальною осью* двухъ круговъ. Часть этой прямой лежащая внѣ круговъ, есть геометрическое мѣсто точекъ такихъ, что касательныя проведенныя изъ нихъ къ двумъ кругамъ равны между собою.

Если даны три круга, то три радикальныя оси этихъ круговъ взятыхъ по два пересѣкаются въ одной точкѣ, называемой *радикальнымъ центромъ*.

59. **Задача 5**. Провести кругъ, касательный къ тремъ заданнымъ кругамъ.

Мы видимъ, что уравненіе круга, какъ заключающее три коэфиціента, опредѣляется вполнѣ тремя условіями, которымъ долженъ удовлетворять искомый кругъ. Такъ мы проводили кругъ черезъ три заданныя точки. Подобнымъ же образомъ мы могли бы искать кругъ, проходящій черезъ двѣ точки и касательный къ данной прямой, или проходящій черезъ одну точку и касательный къ двумъ прямымъ, или, наконецъ, кругъ касательнымъ къ тремъ прямымъ. Въ данной задачѣ также имѣются три условія, которыя дадутъ возможность опредѣлить коэфиціенты уравненій искомаго круга.

Соприкосновеніе круговъ можетъ быть двоякое: внутреннее, когда оба центра лежатъ по одну сторону отъ точки касанія и внѣшнее, если они лежатъ по разныя стороны. Въ первомъ случаѣ разстояніе между центрами круговъ равно разности радіусовъ, а во второмъ—суммѣ.

Обозначая координаты центра и радіусъ искомаго круга черезъ: ξ, η и ρ, а также эти величины для данныхъ круговъ черезъ

$$\alpha_1,\ \beta_1 \text{ и } r_1$$
$$\alpha_2,\ \beta_2 \text{ и } r_2$$
$$\alpha_3,\ \beta_3 \text{ и } r_3$$

мы получимъ три условія для опредѣленія величинъ ξ, η, ρ, въ такомъ видѣ

$$\left.\begin{aligned}(\xi-\alpha_1)^2+(\eta-\beta_1)^2&=(\rho\pm r_1)^2\\(\xi-\alpha_2)^2+(\eta-\beta_2)^2&=(\rho\pm r_2)^2\\(\xi-\alpha_3)^2+(\eta-\beta_3)^2&=(\rho\pm r_3)^2\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Смотря по знакамъ во вторыхъ частяхъ этихъ уравненій искомый опредѣляемый ими кругъ можетъ имѣть касаніе различнаго рода съ данными, а потому, дѣ-

лая всевозможныя комбинаціи знаковъ въ системѣ (1), получимъ восемь круговъ, касающихся къ тремъ даннымъ. Исключая изъ трехъ уравненій (1) число ρ, получимъ два уравненія для опредѣленія координатъ ξ и η искомаго центра. Одно изъ этихъ уравненій первой степени относительно координатъ и опредѣляетъ прямую, соединяющую этотъ центръ съ радикальнымъ центромъ трехъ заданныхъ круговъ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ $S_1 = o_1$, $S_2 = o$, $S_3 = o$ уравненія трехъ заданныхъ круговъ, гдѣ

$$S_1 = (\xi - \alpha_1)^2 + (\eta - \beta_1)^2 - r^2{}_1,\ S_2 = (\xi - \alpha_2)^2 + (\eta - \beta_2)^2 - r^2{}_2,$$
$$S_3 = (\xi - \alpha_3)^2 + (\eta - \beta_3)^2 - r^2{}_3,$$

мы получимъ три условія (1) въ такомъ видѣ

$$S_1 = \rho^2 \pm 2\rho r_1,\ S_2 = \rho^2 \pm 2\rho r_2,\ S_3 = \rho^2 \pm 2\rho r_3$$

Вычитая, получимъ

$$S_1 - S_2 = 2\rho(\pm r_1 \mp r_2),\ S_1 S_3 = 2\rho(\pm r_1 \mp r_3),$$

откуда уравненіе искомой прямой будетъ

$$\frac{S_1 - S_2}{\pm r_1 \mp r_2} = \frac{S_1 - S_3}{\pm r_1 \mp r_3}.$$

Задачи.

1. Найти координаты центра и радіусъ круга.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20.$$

Отв. 1, 2, 5.

2. Найти координаты точекъ сѣченія круга и прямой

$$x^2 + y^2 = 65,\ 3x + y = 25.$$

Отв. (7, 4) (8,1).

3. Когда прямая $y = mx + n$ касается къ кругу $x^2 + y^2 = r^2$?

Отв. Если $n = r\sqrt{1 + m^2}$.

4. Найти уравненіе касательной проведенной изъ начала координатъ къ кругу

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0.$$

Отв. $x - y = 0,\ x + 7y = 0$.

5. Найти точки, въ которыхъ кругъ $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ пересѣкаетъ оси.

Отв. $x = 3$, $x = 2$, $y = 6$, $y = 1$.

6. Найти уравненіе круга, касающагося къ осямъ координатъ въ разстояніи a отъ начала координатъ.

Отв. $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$.

7. Найти касательную въ точкѣ (5, 4) къ кругу

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10.$$

Отв. $3x + y = 19$.

8. Опредѣлить кругъ по тремъ точкамъ: (2, 3), (4, 5), (6, 1).

Отв. $$\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}.$$

9. Найти геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ находятся между собой въ данномъ отношеніи.

Отв. Кругъ.

10. Найти геометрическое мѣсто точекъ, сумма квадратовъ разстояній которыхъ отъ n заданныхъ постоянна.

Отв. Кругъ.

11. Найти геометрическое мѣсто срединъ хордъ въ кругѣ, параллельныхъ заданной прямой.

Отв. Прямая.

11. Координаты точки пересѣченія двухъ касательныхъ круга, зная углы образуемые перпендикулярами изъ центра на эти касательныя съ осью x-овъ.

Отв. $$x = r\frac{\cos\frac{1}{2}(\theta' + \theta'')}{\cos\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')}, \quad y = r\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta' + \theta'')}{\cos\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')}.$$

13. Данъ кругъ и внутри его неподвижная точка; около этой точки обращаемъ прямой уголъ и изъ вершины угла опускаемъ перпендикуляръ на хорду, соединяющую точки сѣченія круга сторонами угла. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляра.

Отв. Кругъ.

14. Даны различные круги, которые будучи взяты по два, имѣютъ одну и ту же радикальную ось; если перемѣнный кругъ пересѣчетъ два изъ этихъ круговъ подъ постоянными углами, то онъ пересѣчетъ также каждый изъ другихъ круговъ подъ постояннымъ угломъ.

15. Провести кругъ касательный къ тремъ даннымъ прямымъ.

Сокращенный способъ. Трилинейныя координаты. Ангармонія и инволюція.

60. Мы видѣли уже, что уравненіе всякой прямой линіи можетъ быть приведено къ такъ называемому нормальному виду

$$x \cos a + y \sin a - p = 0, \qquad (1)$$

гдѣ a есть уголъ, составляемый съ осью x-овъ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ начала координатъ на прямую, а p есть длина этого перпендикуляра.

Кромѣ того мы знаемъ, что если x_0 и y_0 будутъ координаты какой нибудь точки, не лежащей на прямой (1), то

$$x_0 \cos a + y_0 \sin a - p$$

будетъ не что иное, какъ взятое со знакомъ плюсъ или минусъ разстояніе отъ точки (x_0, y_0) до прямой (1), причемъ знакъ — будетъ для точекъ (x_0, y_0), лежащихъ съ той стороны прямой, гдѣ лежитъ начало координатъ, а + для точекъ по другую

сторону. Отсюда мы видимъ, что, если для сокращенія письма обозначимъ черезъ α всю первую часть уравненія (1), то уравненіе прямой (1) будетъ имѣть видъ

$$\alpha = 0.$$

Подобнымъ же образомъ мы можемъ обозначить черезъ $\beta = 0$ уравненіе всякой другой прямой, приведенное къ виду (1).

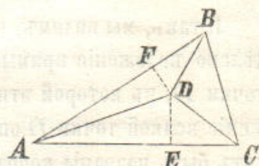
61. Для рѣшенія многихъ задачъ на прямую линію можно пользоваться уравненіями прямой въ сокращенномъ видѣ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, не раскрывая выраженій α, β. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ напримѣръ уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Какъ мы видѣли уже (см. § 33) уравненіе всякой подобной прямой имѣетъ видъ

$$\beta - \lambda\alpha = 0.$$

Мѣняя коэффиціентъ λ, мы будемъ получать различныя прямыя, проходящія черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ: при $\lambda = 0$ получимъ одну изъ заданныхъ прямыхъ $\beta = 0$, а при $\lambda = \infty$ получимъ $\alpha = 0$, другую прямую *).

Принимая $\lambda = +1$ и $\lambda = -1$, мы получимъ уравненія двухъ биссекторовъ угловъ между данными прямыми въ видѣ

$$\alpha + \beta = 0, \quad \beta - \alpha = 0.$$



Черт. 35.

62. Коэффиціенту λ въ уравненіи $\beta - \lambda\alpha = 0$ легко дать геометрическое толкованіе; въ самомъ дѣлѣ, пусть прямыя $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ будутъ AC и AB (см. черт. 35). Для точки D, лежащей на прямой AD, проходящей черезъ точку A пересѣченія двухъ прямыхъ AC и AB, значенія функцій α и β пусть будутъ α_0 и β_0, причемъ, какъ легко видѣть, будетъ

$$\alpha_0 = \pm DE, \quad \beta_0 = \pm DF.$$

Отсюда легко замѣтить, что для точки D

$$\lambda = \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \pm \frac{DF}{DE} = \pm \frac{AD \sin DAF}{AD \sin DAE} = \pm \frac{\sin DAF}{\sin DAE}.$$

Такимъ образомъ мы замѣчаемъ, что абсолютная величина λ есть ничто иное, какъ отношеніе синусовъ угловъ, образуемыхъ прямою $\beta - \lambda\alpha = 0$ съ прямыми $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Если уравненія $\alpha = 0$, $\beta = 0$ взяты не въ нормальномъ видѣ, а какъ

---

*) Уравненіе $\beta - \lambda\alpha = 0$, положеніемъ $\lambda = \frac{l}{m}$, приводится къ виду $m\beta - l\alpha = 0$, откуда при $m = 0$ получаемъ съ одной стороны $\lambda = \frac{l}{0} = \infty$, съ другой $-l\alpha = 0$, или $\alpha = 0$.

нибудь, такъ что

$$\alpha = Ax + By + C = 0,\ \beta = A_1x + B_1y + C_1,$$

гдѣ $A^2 + B^2$ не $= 1$ и также $A_1{}^2 + B_1{}^2$ не $= 1$, то геометрическое значеніе λ будетъ такое

$$\lambda = \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \pm\frac{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}\ \frac{DF}{DE} = \pm\sqrt{\frac{A_1{}^2 + B_1{}^2}{A^2 + B^2}}\ \frac{\sin DAF}{\sin DAE},$$

причемъ λ будетъ отличаться отъ отношенія синусовъ на постоянный множитель, зависящій отъ положенія основныхъ линій $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

63. Проведемъ теперь на плоскости третью прямую $\gamma = 0$ и пусть эта прямая не проходитъ черезъ точку A, такъ что она составляетъ съ прямыми $\alpha = 0$, $\beta = 0$ треугольникъ ABC. Уравненіе всякой прямой DC, проходящей черезъ точку C сѣченія двухъ прямыхъ $\alpha = 0$ (AC) и $\gamma = 0$ (BC), напишется такъ

$$\gamma - \mu\alpha = 0.$$

И такъ, мы видимъ, что если будутъ заданы два числа λ и μ, тогда будетъ опредѣлено положеніе прямыхъ DA и DC и, слѣдовательно, опредѣлится положеніе точки D, въ которой эти прямыя пересѣкаются. Наоборотъ мы видимъ, что положеніе всякой точки D опредѣляетъ пару чиселъ λ и μ, которыя, слѣдовательно, могутъ быть названы координатами точки D.

Вмѣсто заданія координатъ λ и μ можно задавать значенія величинъ α, β, γ, по которымъ опредѣлятся соотвѣтственныя значенія λ и μ $\left(\lambda = \frac{\beta}{\alpha},\ \mu = \frac{\gamma}{\alpha}\right)$.

Три величины α, β, γ называются *трилинейными* координатами точки. Три прямыя $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ называются координатными прямыми. Легко усмотрѣть, что, если начало координатъ лежитъ внутри треугольника $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, то всѣ три трилинейныя координаты отрицательны, для точекъ лежащихъ внутри этого треугольника (это имѣетъ мѣсто, конечно, въ томъ случаѣ если уравненія прямыхъ приведены къ нормальному виду). При переходѣ точки съ одной стороны координатной прямой $\alpha = 0$ на другую, соотвѣтственная трилинейная координата α мѣняетъ знакъ. Такъ какъ мы можемъ за трилинейную координату α выбирать какъ $+\alpha$, такъ и $-\alpha$, то, очевидно, выборомъ знаковъ у α, β, γ мы достигнемъ всегда того, что трилинейныя координаты будутъ одного знака для той части плоскости, для которой пожелаемъ.

Относительно этой системы координатъ можно замѣтить, что всякое уравненіе вида

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

гдѣ l, m, n заданныя постоянныя числа, опредѣляетъ всегда нѣкоторую прямую линію.

Если заданы уравненія трехъ прямыхъ въ трилинейныхъ координатахъ

$$U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ U_3 = 0,$$

то для того чтобы заданныя три прямыя пересѣкались въ одной точкѣ, необходимо, чтобы можно было подобрать три постоянныя числа p_1, p_2, p_3, обращающихъ въ тождество равенство

$$p_1 U_1 + p_2 U_2 + p_3 U_3 = 0.$$

Напримѣръ, пусть заданы три прямыя

$$U_1 = \alpha - \beta = 0,\ \ U_2 = \beta - \gamma = 0,\ \ U_3 = \gamma - \alpha = 0,$$

эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, ибо, полагая $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, получимъ

$$U_1 + U_2 + U_3 = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0.$$

Прямыя $U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ U_3 = 0$ въ этомъ случаѣ ничто иное, какъ биссекторы угловъ координатнаго треугольника $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$ (мы предполагаемъ, что эти уравненія приведены къ нормальному виду).

64. Трилинейную систему координатъ можно разсматривать какъ обобщеніе обыкновенной декартовой.

Вмѣсто декартовыхъ координатъ точки x и y полезно бываетъ иногда вводить отношенія двухъ величинъ ξ и η къ нѣкоторой третьй ζ, полагая

$$x = \frac{\xi}{\zeta},\ \ y = \frac{\eta}{\zeta}.$$

Величины ξ, η, ζ носятъ названіе *однородныхъ* координатъ точки

Уравненіе прямой $Ax + By + C = 0$ обращается послѣ подстановки въ такое

$$A\frac{\xi}{\zeta} + B\frac{\eta}{\zeta} + C = 0,$$

или окончательно въ слѣдующее

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0.$$

Преобразованіе къ однороднымъ координатамъ приводится, какъ легко замѣтить, ко введенію явнымъ образомъ подъ обозначеніемъ ζ той единицы длины, въ которой выражены координаты точекъ.

Мы возвратимся, слѣдовательно, снова къ декартовой системѣ координатъ, полагая $\zeta = 1$.

Однородная система координатъ, какъ легко показать, есть не что иное, какъ частный случай трилинейной. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія координатныхъ прямыхъ трилинейной системы въ данномъ случаѣ будутъ

$$\xi = 0,\ \ \eta = 0,\ \ \zeta = 0.$$

Два первыхъ изъ числа послѣднихъ равенствъ даютъ уравненія $x=0$, $y=0$, т. е. уравненія осей декартовыхъ координатъ, а третье уравненіе $\zeta=0$ даетъ

$$x=\infty,\ y=\infty,$$

что даетъ безконечно далекую прямую.

Итакъ декартова система координатъ есть частный случай трилинейной, когда одна изъ координатныхъ прямыхъ безконечно удалена, а двѣ другихъ совпадаютъ съ осями координатъ.

65. Прежде чѣмъ займемся дальнѣйшимъ развитіемъ и приложеніями сокращеннаго способа, остановимся на одномъ общемъ началѣ, имѣющемъ мѣсто при приложеніи способа координатъ къ рѣшенію геометрическихъ вопросовъ. Это начало, называемое *двойственностью*, состоитъ въ томъ, что каждому аналитическому соотношенію соотвѣтствуютъ двѣ теоремы геометріи.

Здѣсь мы ограничимся лишь общими замѣчаніями, оставляя болѣе подробное развитіе этого начала до дальнѣйшаго, когда мы будемъ говорить о кривыхъ линіяхъ.

Въ основаніи декартовой аналитической геометріи лежитъ опредѣленіе положенія точки на плоскости при помощи пары чиселъ, называемыхъ координатами; такимъ образомъ точка принимается за простѣйшій элементъ, причемъ линіи разсматриваются, какъ геометрическія мѣста точекъ.

Вмѣсто точки можно вводить, какъ простѣйшій элементъ, прямую. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что положеніе прямой на плоскости опредѣляется уравненіемъ

$$y=ax+b,$$

другими словами, опредѣляется заданіемъ двухъ чиселъ a и b. Эти числа можно назвать координатами прямой, ибо заданіемъ ихъ положеніе прямой на плоскости опредѣляется вполнѣ. Такимъ образомъ получаемъ новую систему координатъ, имѣющую большую аналогію съ обыкновенною, только прямая линія и точка мѣняются ролями. Въ самомъ дѣлѣ, какъ при декартовыхъ координатахъ всякое уравненіе вида

$$y=xm+n \tag{*}$$

опредѣляетъ прямую, какъ геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію (*); такъ для линейныхъ координатъ (a, b) уравненіе вида

$$b=am+n \tag{**}$$

опредѣлитъ точку, какъ пересѣченіе прямыхъ, линейныя координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію (**). Что это такъ, легко видѣть изъ того, что можно найти декартовы координаты точки, опредѣляемой въ линейныхъ координатахъ уравненіемъ (**). Въ самомъ дѣлѣ, подставляемъ b изъ уравненія (**) въ основное уравненіе $y=ax+b$, получимъ

$$y=ax+am+n,\ \text{или}\ y-n=a(x+m),$$

послѣднее же уравненіе приразличныхъ a опредѣляетъ прямыя, проходящія черезъ искомую точку, декартовы координаты которой, очевидно, будутъ $(-m, +n)$.

66. Мы видѣли уже, что въ декартовыхъ координатахъ уравненіе $\beta - \lambda\alpha = 0$ при различныхъ λ опредѣляетъ пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ $\beta = 0$, $\alpha = 0$.

Подобнымъ образомъ, то же самое уравненіе $\beta - \lambda\alpha = 0$, но уже въ линейныхъ координатахъ опредѣлитъ рядъ точекъ, лежащихъ на прямой, соединяющей двѣ точки, опредѣляемыя уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Нѣтъ достаточнаго основанія развивать систему линейныхъ координатъ во всей подробности параллельно съ декартовскою, достаточно ограничиться этой послѣднею, но надлежитъ помнить, что геометрическимъ теоремамъ, выводимымъ при помощи обыкновенной системы координатъ будутъ соотвѣтствовать аналогичныя теоремы, выводимыя на основаніи указанной двойственности.

Поэтому мы ограничимся теперь изученіемъ нѣкоторыхъ свойствъ пучковъ прямыхъ линій, опредѣляемыхъ уравненіемъ $\beta - \lambda\alpha = 0$, помня, что каждому свойству подобнаго пучка будетъ соотвѣтствовать аналогичное свойство прямолинейнаго ряда точекъ.

66. Два пучка $\beta - \lambda\alpha = 0$, $\delta - \mu\gamma = 0$ мы будемъ называть *гомографическими*, если между коэффиціентами λ и μ будетъ существовать зависимость, выражаемая уравненіемъ

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0 \qquad (*)$$

первой степени относительно обоихъ коэффиціентовъ. Всякой парѣ чиселъ λ_0, μ_0, удовлетворяющихъ зависимости (*), соотвѣтствуетъ пара прямыхъ $\beta - \lambda_0\alpha = 0$, $\delta - \mu_0\gamma = 0$, называемыхъ сопряженными прямыми пучковъ, причемъ, очевидно, что каждой прямой одного изъ пучковъ соотвѣтствуетъ одна опредѣленная сопряженная прямая другаго. Въ уравненіе (*) входятъ, какъ параметры, отношенія трехъ изъ числа коэффиціентовъ A, B, C, D къ четвертому, а потому зависимость двухъ гомографическихъ пучковъ опредѣляется вполнѣ заданіемъ трехъ паръ чиселъ

$$(\lambda_1, \mu_1),\ (\lambda_2, \mu_2),\ (\lambda_3, \mu_3).$$

Итакъ, мы видимъ, что два гомографическихъ пучка опредѣляются вполнѣ заданіемъ трехъ паръ сопряженныхъ прямыхъ, тогда каждой четвертой прямой $\beta - \lambda_4\alpha = 0$ перваго пучка будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленная сопряженная прямая $\delta - \mu_4\gamma = 0$ втораго.

Прямыя $\alpha = 0$, $\beta = 0$ для перваго пучка и $\gamma = 0$, $\delta = 0$ для втораго будемъ называть основными, тогда легко замѣтить, что выборомъ основныхъ линій пучковъ и ихъ сопряженныхъ можно упростить уравненіе (*). Въ самомъ дѣлѣ, можно заставить пропасть изъ уравненія (*) два коэффиціента, причемъ привести уравненіе къ одному изъ двухъ видовъ

$$A\lambda\mu + D = 0, \quad B\lambda + C\mu = 0.$$

Въ первомъ случаѣ прямыя β и γ, а также α и δ сопряженныя, во второмъ же случаѣ сопряженныя прямыя суть β и δ, α и γ.

67. Обратимся теперь къ общему виду уравненія (*). Ясно, что коэффиціентъ A мы можемъ считать не равнымъ нулю, тогда, дѣля на него все уравненіе, получимъ

$$\lambda\mu + L\lambda + M\mu + N = 0. \qquad (**)$$

Покажемъ теперь зависимость между четырьмя парами сопряженныхъ прямыхъ двухъ гомографическихъ пучковъ

$$\lambda_1\mu_1 + L\lambda_1 + M\mu_1 + N = 0. \qquad (1)$$

$$\lambda_2\mu_2 + L\lambda_2 + M\mu_2 + N = 0. \qquad (2)$$

$$\lambda_3\mu_3 + L\lambda_3 + M\mu_3 + N = 0. \qquad (3)$$

$$\lambda_4\mu_4 + L\lambda_4 + M\mu_4 + N = 0. \qquad (4)$$

Умножая уравненіе (1) на $\mu_3 + L$, а (3) на $\mu_1 + L$ и вычитая, получимъ

$$(\lambda_1 - \lambda_3)\,(\mu_1 + L)\,(\mu_3 + L) = (N - LM)\,(\mu_1 - \mu_3). \qquad (5)$$

Подобнымъ же образомъ, умножая уравненіе (2) на $\mu_3 + L$, а (3) на $\mu_2 + L$ и вычитая, получимъ

$$(\lambda_2 - \lambda_3)\,(\mu_2 + L)\,(\mu_3 + L) = (N - LM)\,(\mu_2 - \mu_3) \qquad (6)$$

Дѣля уравненіе (5) на (6), получимъ

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \frac{\mu_1 + L}{\mu_2 + L} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3}. \qquad (7)$$

Поступая подобнымъ образомъ съ первыми двумя уравненіями и съ уравненіемъ (4) вмѣсто уравненія (3), мы получимъ

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} \cdot \frac{\mu_1 + L}{\mu_2 + L} = \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}. \qquad (8)$$

Изъ уравненій (7) и (8) черезъ дѣленіе получимъ окончательно

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}. \qquad (9)$$

Выраженіе

$$H = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

называется *ангармоническимъ* отношеніемъ пучка прямыхъ *).

Послѣднее равенство (9) выражаетъ основное свойство двухъ гомографическихъ пучковъ, состоящее въ томъ, что ангармоническое отношеніе четырехъ прямыхъ одного пучка должно равняться ангармоническому отношенію сопряженныхъ прямыхъ другаго.

---

*) Chasles. Traité de Géométrie supérieure. 1880, p. 7.

68. Если теперь мы будетъ разумѣть подъ уравненіями

$$\beta - \lambda\alpha = 0 \text{ и } \delta - \mu\gamma = 0,$$

слѣдуя закону двойственности, два прямолинейные ряда точекъ, то мы будемъ эти два ряда называть гомографическими, когда ангармоническія отношенія сопряженныхъ точекъ этихъ двухъ рядовъ одинаковы. Мы и здѣсь ангармоническимъ отношеніемъ по аналогіи называемъ величину

$$H = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

69. Покажемъ теперь геометрическое значеніе отношенія H. Предварительно упростимъ задачу, полагая $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = \infty$, что соотвѣтствуетъ выбору прямыхъ $\beta = 0$, $\alpha = 0$.

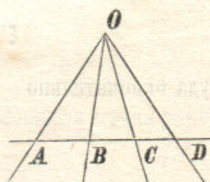
Пусть будутъ прямыя $\alpha = 0$ OA, а $\beta = 0$ OB (см. черт. 36) и двѣ другія OC и OD. Отношеніе H въ данномъ случаѣ напишется такъ

$$H = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_4} - 1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_4} - 1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

ибо $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = \infty$.

Мы видѣли уже, что

$$\lambda_1 = m\,\frac{\sin COB}{\sin COA},\quad \lambda_2 = m\,\frac{\sin DOB}{\sin DOA},$$



Черт. 36.

гдѣ m зависитъ отъ коэффиціентовъ уравненій $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и, слѣдовательно, не зависитъ отъ положенія прямыхъ OC и OD. Если уравненія $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ приведены къ нормальному виду, то $m = \pm 1$, причемъ знакъ λ укажется въ зависимости отъ положенія начала координатъ по отношенію къ прямымъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Такъ какъ для насъ важенъ знакъ числа $H = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, то намъ достаточно замѣтить, что λ_1 и λ_2 будутъ одинаковыхъ знаковъ, если прямыя OC и OD лежатъ въ одной парѣ вертикальныхъ угловъ, образуемыхъ прямыми OA и OB и разныхъ, если въ разныхъ углахъ.

Отсюда мы видимъ, что ангармоническое отношеніе H по абсолютной величинѣ равно

$$\frac{\sin COB}{\sin COA} : \frac{\sin DOB}{\sin DOA}$$

знакъ же величины H будетъ $+$, если прямыя OC и OD лежатъ въ одной парѣ вертикальныхъ угловъ, образуемыхъ прямыми OA и OB, и знакъ $-$, если прямыя OC и OD отдѣляются прямыми OA и OB.

70. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію рядовъ точекъ.

Возьмемъ рядъ точекъ

$$\beta - \lambda\alpha = 0,$$

гдѣ $\beta = b - m_1 a - n_1 = 0$ и $\alpha = b - m_2 a - n_2 = 0$, опредѣляютъ двѣ точки $(-m_1, n_1)$ и $(-m_2, n_2)$. Такъ что, называя декартовы координаты точекъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ черезъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), получимъ

$$x_1 = -m_1,\ x_2 = -m_2,\ y_1 = n_1,\ y_2 = n_2.$$

Уравненіе нашего ряда точекъ можетъ быть написано такъ

$$\beta - \lambda\alpha = b(1-\lambda) - a(m_1 - \lambda m_2) - (n_1 - \lambda n_2) = 0,$$

или такъ

$$b = a\,\frac{m_1 - \lambda m_2}{1-\lambda} + \frac{n_1 - \lambda n_2}{1-\lambda},$$

называя декартовы координаты точки, опредѣляемой послѣднимъ уравненіемъ черезъ ξ и η, получимъ

$$\xi = -\frac{m_1 - \lambda m_2}{1-\lambda},\quad \eta = \frac{n_1 - \lambda n_2}{1-\lambda},$$

откуда окончательно

$$\xi = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda},\quad \eta = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}.$$

Послѣднія формулы показываютъ, что λ есть не что иное, какъ отношеніе разстояній точки (ξ, η) отъ точекъ (x_1, y_1), (x_2, y_2). Причемъ мы знаемъ, что λ имѣетъ знакъ $+$, если точка (ξ, η), или, что одно и то же, точка, опредѣляемая уравненіемъ $\beta - \lambda\alpha = 0$, лежитъ внѣ отрѣзка, составляемаго точками $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, и знакъ $-$, если точка $\beta - \lambda\alpha = 0$ лежитъ внутри отрѣзка. Значенію $\lambda = 1$ соотвѣтствуетъ какъ легко замѣтить точка, лежащая на безконечности, а значенію $\lambda = -1$ средина отрѣзка $\beta = 0$, $\alpha = 0$.

Обратимся къ чертежу 36. Пусть уравненія четырехъ точекъ A, B, C, D будутъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\beta - \lambda_1 \alpha = 0$, $\beta - \lambda_2 \alpha = 0$. Тогда, если точки лежатъ такъ, какъ показано на чертежѣ

$$\lambda_1 = \frac{CB}{CA},\quad \lambda_2 = \frac{DB}{DA},$$

откуда ангармоническое отношеніе этихъ четырехъ точекъ

$$H = \frac{CB}{CA} : \frac{DB}{DA}.$$

Что касается знака H, то легко замѣтить, что этотъ знакъ будетъ $+$, если обѣ точки C, D лежатъ или внутри, или внѣ отрѣзка AB и $-$, если одна изъ точекъ C, D лежитъ внутри, а другая внѣ отрѣзка.

71. Покажемъ, что всякій пучекъ $OABCD$ гомографически связанъ съ рядомъ точекъ $ABCD$, образуемымъ этимъ пучкомъ на любой сѣкущей прямой AD.

Это свойство было извѣстно древнимъ геометрамъ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ треугольниковъ AOC, BOC, AOD, BOD (см. черт. 36), получаемъ

$$\frac{AC}{OC}=\frac{\sin AOC}{\sin CAO},\ \frac{CB}{OC}=\frac{\sin COB}{\sin CBO}$$

$$\frac{DA}{OD}=\frac{\sin DOA}{\sin DAO},\ \frac{DB}{OD}=\frac{\sin DOB}{\sin DBO}$$

Дѣля первое равенство на второе и третье на четвертое, получимъ

$$\frac{CB}{CA}=\frac{\sin COB}{\sin COA}:\frac{\sin CAO}{\sin CBO}$$

$$\frac{DB}{DA}=\frac{\sin DOB}{\sin DOA}:\frac{\sin DAO}{\sin DBO},$$

откуда окончательно получимъ

$$\frac{CB}{CA}:\frac{DB}{DA}=\frac{\sin COB}{\sin COA}:\frac{\sin DOB}{\sin DOA}.$$

Итакъ мы видимъ, что дѣйствительно ангармоническое отношеніе пучка равно ангармоническому отношенію ряда точекъ.

72. Отсюда, какъ слѣдствіе, мы замѣчаемъ, что всякій пучекъ линій на разныхъ сѣкущихъ даетъ гомографическіе ряды точекъ и наоборотъ, если мы соединимъ точки нѣкотораго прямолинейнаго ряда съ двумя произвольными точками плоскости прямыми, то получимъ два гомографическихъ пучка.

73. Если пара сопряженныхъ элементовъ двухъ гомографическихъ пучковъ совпадаетъ въ одну прямую, то сопряженныя прямыя такихъ пучковъ всегда пересѣкаются въ одной прямой. Въ самомъ дѣлѣ, пусть въ двухъ пучкахъ

$$\beta-\lambda\alpha=0,\ \ \delta-\mu\gamma=0$$

совпадаетъ прямая $\alpha=0$ и $\gamma=0$, такъ что уравненія этихъ пучковъ могутъ быть написаны такъ

$$\beta-\lambda\alpha=0,\ \ \delta-\mu\alpha=0,$$

причемъ $\lambda=\infty$ должно соотвѣтствовать $\mu=\infty$, а тогда уравненіе (*) § 66 не должно заключать члена съ произведеніемъ $\lambda\mu$, ибо

$$\mu=-\frac{B\lambda+D}{A\lambda+C}=-\frac{B+\frac{D}{\lambda}}{A+\frac{C}{\lambda}};$$

при $\lambda = \infty$, получимъ

$$\mu = -\frac{B}{A},$$

но, чтобы послѣднее выраженіе обратилось въ ∞, необходимо положить $A = 0$.

И такъ, уравненіе (*) принимаетъ видъ

$$B\lambda + C\mu + D = 0.$$

Остается еще упростить (*), принимая за $\beta = 0$ и $\delta = 0$ пару сопряженныхъ элементовъ, тогда очевидно уравненію $\lambda = 0$ должно соотвѣтствовать равенство $\mu = 0$, что показываетъ, что $D = 0$ и окончательно уравненіе (*) принимаетъ видъ

$$B\lambda + C\mu = 0. \qquad (*)$$

Для нахожденія геометрическаго мѣста точекъ пересѣченія сопряженныхъ элементовъ заданныхъ пучковъ необходимо исключить λ и μ изъ уравненій (*) и

$$\beta - \lambda\alpha = 0,\ \delta - \mu\alpha = 0,$$

откуда получимъ

$$B\frac{\beta}{\alpha} + C\frac{\delta}{\alpha} = \frac{B\beta + C\delta}{\alpha} = 0.$$

Мы видимъ, что искомое геометрическое мѣсто есть прямая

$$B\beta + C\delta = 0,$$

что и требовалось доказать.

Переходя отъ пучковъ линій къ рядамъ точекъ, мы получимъ аналогичную теорему, а именно, если въ точкѣ пересѣченія двухъ прямыхъ, на которыхъ расположены два гомографическихъ ряда точекъ, совпадаютъ два сопряженныхъ элемента обоихъ рядовъ, то прямыя соединяющія всѣ сопряженныя пары элементовъ этихъ рядовъ пересѣкаются въ одной точкѣ. Въ этомъ случаѣ одинъ рядъ представляетъ такъ называемую перспективу другаго.

74. Пучекъ четырехъ прямыхъ, въ томъ случаѣ когда ангармоническое его отношеніе H равно -1, составляетъ такъ называемую *гармоническую* группу.

Четыре прямыя

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \beta - \lambda_1\alpha = 0,\ \beta - \lambda_2\alpha = 0$$

составляютъ гармоническую группу, когда

$$H = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1.$$

Откуда $\lambda_2 = -\lambda_1$ и, слѣдовательно, общій видъ уравненій прямыхъ гармонической группы будетъ

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \beta - \lambda_1\alpha = 0,\ \beta + \lambda_1\alpha = 0.$$

Полагая $\lambda_1 = 1$, получимъ въ частности такую гармоническую группу

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \beta - \alpha = 0,\ \beta + \alpha = 0.$$

Если уравненія $\alpha = 0$, $\beta = 0$ приведены къ нормальному виду, то послѣдняя группа есть ничто иное, какъ двѣ прямыя $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и ихъ биссекторы угловъ.

Обращаясь къ рядамъ точекъ, мы скажемъ, что четыре точки образуютъ гармоническую группу если ихъ уравненія въ линейныхъ координатахъ могутъ быть представлены въ такомъ видѣ

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \beta - \lambda\alpha = 0,\ \beta + \lambda\alpha = 0.$$

Такъ какъ $H = -1$, то мы замѣчаемъ, что изъ точекъ

$$\beta + \lambda\alpha = 0,\ \beta - \lambda\alpha = 0$$

одна лежитъ внутри промежутка между точками $\alpha = 0$, $\beta = 0$, а другая внѣ этого промежутка.

Когда $\lambda = 1$, то получаемъ гармоническую группу, состоящую изъ точекъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, точки $\alpha + \beta = 0$, дѣлящей разстояніе между точками $\alpha = 0$, $\beta = 0$ пополамъ и наконецъ точки $\beta - \alpha = 0$, лежащей на безконечности (см. § 70).

Очевидно, что всякій гармоническій пучекъ образуетъ на сѣкущей гармоническую группу точекъ, причемъ, если въ этой группѣ одна изъ точекъ безконечно удалена, то другая точка дѣлитъ разстояніе между двумя остальными пополамъ. Въ послѣднемъ случаѣ сѣкущая параллельна одной изъ прямыхъ гармоническаго пучка.

75. *Полный четыреугольникъ.* Четыреугольникъ $AFEC$ съ продолженіями его сторонъ до встрѣчи въ точкахъ B и D называется полнымъ. Прямыя AE, FC и BD называются его діагоналями (см. черт. 37).

Будемъ вести разсужденіе наше въ трилинейныхъ координатахъ, причемъ за координатный треугольникъ примемъ треугольникъ ABC. Пусть уравненія его сторонъ BC, AB, AC будутъ

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0.$$

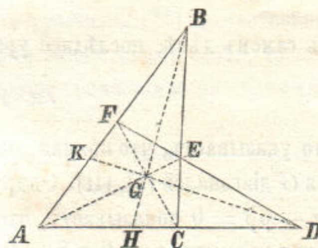
Пусть уравненіе остальной стороны FE заданнаго полнаго четыреугольника, выраженное въ трилинейныхъ координатахъ, будетъ $\delta = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$.

Уравненія діагоналей AE, FC, BD будутъ

$$\mu\beta + \nu\gamma = 0 \qquad (I)$$

$$\lambda\alpha + \nu\gamma = 0 \qquad (II)$$

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0 \qquad (III)$$



Черт. 37.

Что это такъ, легко видѣть изъ слѣдующихъ соображеній. Возьмемъ, напримѣръ, прямую (I), уравненіе $\mu\beta + \nu\gamma = 0$ показываетъ, что прямая, опредѣляемая урав-

неніемъ (I), проходитъ черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ $\beta=0$, $\gamma=0$, т. е. черезъ точку A; съ другой стороны тѣ же уравненія діагоналей могутъ быть написаны такъ

$$\delta-\lambda\alpha=0, \qquad (I)$$

$$\delta-\mu\beta=0, \qquad (II)$$

$$\delta-\nu\gamma=0, \qquad (III)$$

откуда видимъ, что прямая (I) должна проходить черезъ точку пересѣченія прямыхъ $\delta=0$ и $\alpha=0$, или, что одно и тоже, черезъ точку E. И такъ, мы видимъ, что дѣйствительно прямая (I), какъ проходящая черезъ двѣ точки A и E совпадаетъ съ діагональю AE. Подобнымъ образомъ мы убѣдимся, что уравненія (II) и (III) опредѣляютъ двѣ другія діагонали FC и BD. Легко замѣтить, что три діагонали съ четырьмя сторонами заданнаго четыреугольника образуютъ 11 полныхъ четыреугольниковъ, считая въ томъ числѣ и заданный; если теперь мы захотимъ для всѣхъ этихъ четыреугольниковъ провести діагонали, то придется еще добавить шесть прямыхъ линій, имѣющихъ уравненіями

$$\delta+\lambda\alpha=0,\ \delta+\mu\beta=0,\ \delta+\nu\gamma=0.$$

$$\lambda\alpha-\mu\beta=0,\ \mu\beta-\nu\gamma=0,\ \nu\gamma-\lambda\alpha=0.$$

Достаточно одного взгляда на эти уравненія, чтобы замѣтить, что указанныя 13 прямыхъ образуютъ въ шести вершинахъ заданнаго четыреугольника и трехъ точкахъ пересѣченія діагоналей 9 гармоническихъ пучковъ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ одинъ изъ указанныхъ 10 полныхъ четыреугольниковъ, напримѣръ, четыреугольникъ образуемый двумя діагоналями AE, FC и двумя сторонами AB и BC. Двѣ діагонали этого послѣдняго четыреугольника совпадаютъ съ прямыми FE и AC, остается добавить еще третью діагональ BG, уравненіе которой, очевидно, будетъ

$$\lambda\alpha-\mu\beta=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, послѣднее уравненіе можетъ быть написано въ видѣ

$$\lambda\alpha+\nu\gamma-(\mu\beta+\nu\gamma)=0,$$

что указываетъ, что прямая, опредѣляемая имъ проходитъ черезъ точку пересѣченія G діагоналей (I), (II). Съ другой стороны первоначальный видъ этого уравненія $\lambda\alpha-\mu\beta=0$ показываетъ, что эта прямая проходитъ черезъ точку B пересѣченія двухъ прямыхъ $\alpha=0$ и $\beta=0$.

И такъ, мы видимъ, что четыре прямыя BC, AB, GB, BD, проходящія черезъ точку B, имѣютъ уравненіями

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \lambda\alpha-\mu\beta=0,\ \alpha\lambda+\mu\beta=0,$$

что показываетъ, что эти прямыя образуютъ гармоническій пучекъ. Подобнымъ

образомъ, если мы соединимъ точку G съ точкою D прямою, то при точкѣ D образуется также гармоническій пучекъ AD, GD, FD, BD.

Слѣдовательно, четыре точки A, H, C, D составляютъ гармоническій рядъ на прямой AD, подобнымъ же образомъ на прямой AB получается гармоническій рядъ A, K, F, B.

Свойства полнаго четыреугольника примѣняются къ нѣкоторымъ геометрическимъ построеніямъ.

76. Обратимся теперь къ гомографическимъ пучкамъ, проведеннымъ вокругъ одной и той же точки.

Возьмемъ два пучка, проходящіе черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ

$$\alpha = 0,\ \beta = 0;$$

уравненія такихъ пучковъ будутъ

$$\beta - \lambda\alpha = 0,\ \beta - \mu\alpha = 0.$$

Эти пучки будутъ гомографическіе, если между λ и μ будетъ зависимость

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0.$$

Главную особенность подобныхъ пучковъ, проведенныхъ черезъ одну точку представляютъ такъ называемые двойные элементы.

77. Двойною прямою пучковъ

$$\beta - \lambda\alpha = 0,\ \beta - \mu\alpha = 0$$

мы будемъ называть прямую, въ которую сливаются двѣ сопряженныя прямыя пучковъ.

Чтобы получить двойную прямую, надо положить въ уравненіе (*) (§ 66) $\mu = \lambda$, откуда получимъ для опредѣленія λ такое квадратное уравненіе

$$A\lambda^2 + (B + C)\lambda + D = 0. \qquad (**)$$

И такъ мы видимъ, что, если корни послѣдняго уравненія (**) вещественные, то существуютъ двѣ двойныя прямыя, если же корни равны между собой, то двойныя прямыя сливаются въ одну и наконецъ, если корни уравненія мнимые, то двойныхъ прямыхъ не существуетъ.

Если существуютъ двѣ двойныя прямыя, то принимая ихъ за $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, мы приведемъ уравненіе (*) къ виду

$$B\lambda + C\mu = 0,$$

ибо тогда при $\lambda = 0$, $\mu = 0$, а при $\lambda = \infty$, $\mu = \infty$, что указываетъ, что въ пучкахъ $\beta - \lambda\alpha = 0$, $\beta - \mu\alpha = 0$, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ двойные элементы.

78. Разсмотримъ два гомографическихъ пучка

$$\beta - \lambda\alpha = 0,\ \beta - \mu\alpha = 0.$$

Положимъ, что сопряженныя прямыя L и L_1 будутъ такъ называемыя взаим-

ныя, т. е., если прямой L перваго пучка будетъ соотвѣтствовать прямая L_1 во второмъ, то, обратно, прямой L_1 разсматриваемой, какъ принадлежащей первому пучку будетъ соотвѣтствовать прямая L во второмъ. Необходимо, чтобы уравненіе (*) удовлетворилось также и въ томъ случаѣ, когда переставимъ частныя значенія λ и μ, соотвѣтствующія двумъ прямымъ L и L_1, а для этого необходимо, чтобы было

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0.$$

$$A\lambda\mu + B\mu + C\lambda + D = 0.$$

Вычитая получимъ

$$(\lambda - \mu)(B - C) = 0;$$

послѣднее же уравненіе удовлетворяется, или когда $\lambda = \mu$, или же $B = C$. Въ первомъ случаѣ мы получаемъ двойныя прямыя. Во второмъ случаѣ получается особенная гомографическая зависимость, въ которой всѣ сопряженныя прямыя взаимныя.

Такая зависимость носитъ названіе *инволюціи.*

И такъ, общій видъ уравненія (*), опредѣляющаго инволюцію, двухъ пучковъ, будетъ

$$A\lambda\mu + B(\lambda + \mu) + D = 0.$$

Это уравненіе мы значительно упростимъ, если выберемъ за основныя прямыя α и β два взаимныхъ элемента, тогда уравненіе инволюціи обратится въ болѣе простое

$$A\lambda\mu + D = 0.$$

Полагая $-\dfrac{D}{A} = M$, мы получимъ общій случай инволюціи, выраженный уравненіями

$$\beta - \lambda\alpha = 0,\ \beta - \mu\alpha = 0,$$

гдѣ λ и μ удовлетворяютъ уравненію

$$\lambda\mu = M.$$

Если $M > 0$, то существуютъ двѣ двойныя прямыя инволюціи, опредѣляемыя уравненіями

$$\beta - \sqrt{M}.\,\alpha = 0 \text{ и } \beta + \sqrt{M}.\,\alpha = 0.$$

Въ этомъ случаѣ, если примемъ за основныя прямыя $\alpha=0$, $\beta=0$ эти двѣ двойныя прямыя, то уравненіе инволюціи обратится въ такое

$$\lambda + \mu = 0.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что всякая пара сопряженныхъ элементовъ инволюціи составляетъ съ двойными ея элементами гармоническую группу.

Если $M = 0$, то $\beta = 0$ будетъ единственнымъ двойнымъ элементомъ инволюціи и наконецъ, когда $M < 0$ двойныхъ элементовъ не существуетъ.

Такъ какъ общее уравненіе инволюціи

$$\lambda\mu + L(\lambda + \mu) + M = 0$$

содержитъ два коэффиціента L и M, то мы видимъ, что инволюціонная зависимость опредѣляется вполнѣ заданіемъ двухъ паръ сопряженныхъ элементовъ. Тогда всякій элементъ третьей пары опредѣлитъ шестой соотвѣтственный элементъ. Покажемъ, какъ выразить инволюціонную зависимость шести прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку. Принимая пару сопряженныхъ прямыхъ за основныя, мы получимъ уравненія 6-ти прямыхъ, составляющихъ инволюцію въ такомъ видѣ

$$\alpha = 0,\ \beta - \lambda_1\alpha = 0,\ \beta - \lambda_2\alpha = 0,$$

$$\beta = 0,\ \beta - \mu_1\alpha = 0,\ \beta - \mu_2\alpha = 0,$$

гдѣ коэффиціенты λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\lambda_1\mu_1 = M,\ \lambda_2\mu_2 = M.$$

Изъ послѣднихъ уравненій получаемъ уравненіе, выражающее инволюціонную зависимость, въ такомъ видѣ

$$\lambda_1\mu_1 = \lambda_2\mu_2.$$

Все, что сказано объ инволюціи пучковъ, отъ слова до слова можетъ быть примѣнено къ разсмотрѣнію двухъ рядовъ точекъ, расположенныхъ на одной прямой.

Задачи:

1. Круги, проходящіе черезъ двѣ заданныя точки пересѣкаются съ прямою въ двухъ рядахъ точекъ, составляющихъ инволюцію. Эта инволюція будетъ имѣть двойные элементы, если точки лежатъ по одну сторону прямой и не будетъ ихъ имѣть, если по разныя.

2. Стороны прямаго угла, вращающагося вокругъ вершины, образуютъ на всякой третьей прямой два ряда точекъ, образующихъ инволюцію безъ двойныхъ элементовъ.

3. Всякую инволюцію точекъ безъ двойныхъ элементовъ можно образовать вращеніемъ прямаго угла вокругъ нѣкоторой точки.

4. Показать, что шесть прямыхъ, получаемыхъ черезъ соединеніе нѣкоторой точки плоскости съ шестью вершинами полнаго четыреугольника, образуютъ инволюцію; причемъ сопряженными элементами будутъ прямыя, проведенныя къ противоположнымъ вершинамъ.

5. Составить на основаніи закона двойственности предложеніе относительно рядовъ точекъ, аналогичное съ высказаннымъ въ предыдущей задачѣ.

Прямыя линіи, опредѣляемыя уравненіями высшихъ степеней.

79. Мы видѣли уже, что прямая линія опредѣляется уравненіемъ первой степени относительно координатъ x, y. Уравненія высшихъ степеней, какъ это мы увидимъ изъ дальнѣйшаго, опредѣляютъ обыкновенно криволинейныя геометрическія мѣста. Такъ напр., линіею втораго порядка называется геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію второй степени

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{1}$$

Кругъ есть одна изъ линій 2-го порядка, ибо его ур., какъ мы уже видѣли, есть частный случай уравненія общаго (1). Главною цѣлью нашихъ дальнѣйшихъ разсужденій будетъ изученіе вида и свойствъ различныхъ линій 2-го порядка, которыя можно получать задавая различныя значенія коэффиціентовъ A, B, C, D, E, F.

Но иногда уравненія высшихъ степеней опредѣляютъ одну или нѣсколько прямыхъ. Разсмотримъ нѣсколько подобныхъ случаевъ.

80. Предположимъ, что первая часть уравненія (1) линіи 2-го подрядка есть полный квадратъ первой части уравненія нѣкоторой прямой. Напр., возьмемъ уравненіе

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$$

Это уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$(x + y + 1)^2 = 0$$

и, очевидно, равносильно уравненію

$$x + y + 1 = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что линія втораго порядка, опредѣляемая заданнымъ уравненіемъ, обращается въ прямую

$$x + y + 1 = 0.$$

81. Разсмотримъ уравненіе

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0.$$

Это уравненіе можетъ быть написано такъ

$$(x+y)^2+2(x+y)=0,$$

или еще такъ

$$(x+y).(x+y+2)=0.$$

Когда произведеніе двухъ множителей равно нулю, тогда долженъ быть равенъ нулю одинъ изъ множителей, или множитель $(x+y)$, или множитель $(x+y+2)$. Оба предположенія возможны, а потому мы получаемъ два уравненія

$$x+y=0,\ x+y+2=0.$$

Линія втораго порядка опредѣляемая заданнымъ уравненіемъ есть ничто иное, какъ система двухъ параллельныхъ прямыхъ

$$x+y=0,\ x+y+2=0.$$

82. Возьмемъ уравненіе

$$x^2-y^2-2x+1=0.$$

Это уравненіе можетъ быть переписано такъ

$$(x^2-2x+1)-y^2=0,$$

или такъ

$$(x-1)^2-y^2=0.$$

Разность квадратовъ въ первой части уравненія можетъ быть разложена на два множителя, такъ что получится

$$(x-1+y).(x-1-y)=0.$$

Итакъ, мы видитъ, что линія втораго порядка, опредѣляемая уравненіемъ

$$x^2-y^2-2x+1=0,$$

есть ничто иное какъ система двухъ пересѣкающихся прямыхъ

$$x-1+y=0,\ x-1-y=0.$$

Эти прямыя пересѣкаются въ точкѣ

$$x=1,\ y=0.$$

83. Резюмируя сказанное въ послѣднихъ трехъ параграфахъ мы замѣчаемъ, что, если задано n прямыхъ уравненіями $\alpha=0$, $\beta=0,\ldots$ $\omega=0$; то уравненіе, получаемое отъ умноженія ихъ

$$\alpha\,.\,\beta.\,\gamma\ldots\omega=0$$

будетъ n-ой степени относительно x и y и будетъ представлять тотъ частный случай, когда уравненіе n-ой степени опредѣляетъ систему n прямыхъ. Если всѣ множители $\alpha,\beta,\gamma,\ldots\,\omega$ одинаковы, то мы получаемъ уравненіе n-ой степени $\alpha^n=0$, опредѣляющее одну прямую $\alpha=0$.

84. Вообще говоря, мы можемъ сказать, что если уравненіе какой нибудь степени $U=0$ имѣетъ первую часть U, разлагающуюся на множители низшихъ степеней

$$U=L.\ M.\ N\ldots,$$

то геометрическое мѣсто опредѣляемое этимъ уравненіемъ есть совокупность геометрическихъ мѣстъ, опредѣляемыхъ уравненіями

$$L=0,\ M=0,\ N=0,\ldots$$

Такъ напр., уравненіе

$$x^3+xy^2-x=0$$

можетъ быть представлено въ видѣ

$$x.\,(x^2+y^2-1)=0$$

и, слѣдовательно, опредѣляетъ геометрическое мѣсто, состоящее изъ оси y-овъ и круга

$$x^2+y^2-1=0.$$

85. Однороднымъ уравненіемъ n-ой степени между двумя координатами называется уравненіе вида

$$(1)\quad y^n+A_1y^{n-1}\,x+A_2y^{n-2}\,x^2+\ldots+A_{n-1}\,y\,x^{n-1}+A_nx^n=0$$

во всѣхъ членахъ котораго сумма показателей надъ x и надъ y одинакова и равна n показателю степени уравненія.

Относительно уравненія (1) мы замѣчаемъ, что дѣля это уравненіе на x^n и подставляя $\dfrac{y}{x}=\rho$, получимъ уравненіе

$$(2)\qquad \rho^n+A_1\rho^{n-1}+A_2\rho^{n-2}+\ldots+A_{n-1}\,\rho+A_n=0.$$

Предположимъ теперь, что всѣ n корней уравненія (2) дѣйствительны и пусть они будутъ

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots \rho_n.$$

Тогда мы замѣчаемъ, что уравненіе (1) равносильно совокупности уравненій

(3) $$y = \rho_1 x,\ y = \rho_2 x,\ y = \rho_3 x, \dots y = \rho_n x$$

и, слѣдовательно, опредѣляетъ систему прямыхъ (3).

Всѣ эти прямыя проходятъ черезъ начало координатъ и составляютъ съ осью x-овъ углы, тангенсы которыхъ равны $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$. Въ дѣйствительности будетъ менѣе чѣмъ n различныхъ прямыхъ, если нѣкоторые изъ корней $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots \rho_n$ будутъ равными или мнимыми. Такъ напримѣръ, если корень ρ_1 мнимый, то уравненіе $y = \rho_1 x$ кромѣ начала координатъ, координаты котораго удовлетворяютъ очевидно уравненію, не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста.

Иногда говорятъ, что уравненіе $y = \rho_1 x$ опредѣляетъ и при ρ_1 мнимомъ такъ называемую *мнимую* прямую, проходящую черезъ начало координатъ; а тогда можно высказать общее заключеніе. Всякое однородное уравненіе n-ой степени опредѣляетъ n прямыхъ проходящихъ черезъ начало координатъ. Конечно, при этомъ надо помнить, что нѣкоторыя изъ этихъ прямыхъ могутъ совпадать другія дѣлаться мнимыми.

86. Если всѣ n прямыхъ, опредѣляемыхъ однороднымъ уравненіемъ, мнимыя, тогда это уравненіе опредѣляетъ въ дѣйствительности только одну точку, а именно начало координатъ, ибо оно удовлетворяется только для значеній

$$x = 0,\ y = 0.$$

Напримѣръ, уравненіе

$$x^2 + y^2 = 0$$

опредѣляетъ начало координатъ, ибо сумма двухъ квадратовъ дѣйствительныхъ чиселъ не иначе можетъ равняться нулю, какъ если оба квадрата одновременно равны нулю, что даетъ

$$x^2 = 0,\ y^2 = 0;\ x = 0,\ y = 0,$$

т. е. координаты начала. Заданное уравненіе, очевидно, однородное, а потому поступая по указанному пріему мы получимъ

$$1+\frac{y^2}{x^2}=0,\quad \rho^2+1=0,$$

откуда

$$\rho_1=+\sqrt{-1},\ \rho_2=-\sqrt{-1};$$

обѣ прямыя, опредѣляемыя нашимъ уравненіемъ мнимыя и имѣютъ уравненія.

$$y=\sqrt{-1}\,.\,x,\ y=-\sqrt{-1}\,.\,x.$$

87. Вообще говоря, если заданное уравненіе можетъ быть приведено къ виду

$$U^2+V^2=0, \tag{1}$$

то оно опредѣляетъ систему точекъ, лежащихъ на пересѣченіи двухъ кривыхъ $U=0$, $V=0$, ибо уравненію (1) не иначе возможно удовлетворить дѣйствительными значеніями координатъ, а, слѣдовательно, и величинъ U и V, которыя отъ этихъ координатъ зависятъ, какъ полагая совмѣстно $U=0$ и $V=0$, и, слѣдовательно, координаты точекъ геометрическаго мѣста (1) должны удовлетворять заразъ двумъ уравненіямъ $U=0$ и $V=0$. Напримѣръ, уравненіе

$$(x^2-1)^2+(y^2-1)^2=0$$

опредѣляетъ точки пересѣченія геометрическихъ мѣстъ, опредѣляемыхъ уравненіями

$$x^2-1=0,\ y^2-1=0$$

и, слѣдовательно, заданное уравненіе опредѣляетъ четыре точки, лежащія въ вершинахъ четыреугольника, образуемаго прямыми

$$x=1,\ x=-1,\ y=1,\ y=-1.$$

88. Прежде чѣмъ перейдемъ къ подробному изученію линій втораго порядка, найдемъ условіе, при которомъ уравненіе

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1}$$

опредѣляетъ двѣ прямыя.

Напишемъ это уравненіе въ формѣ

$$Ax^2+(By+D)\,x+Cy^2+Ey+F=0.$$

Если A не равно нулю, то рѣшая это квадратное уравненіе получимъ

$$x = -\frac{By+D}{2A} \pm$$

$$\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)\,y^2+2\,(BD-2AE)\,y+D^2-4\,AF}$$

Это уравненіе только тогда приведется къ виду $x = my + n$, когда подкоренная величина будетъ полный квадратъ, а это будетъ, очевидно, когда

$$(B^2-4AC)\;(D^2-4AF) = (BD-2AE)^2.$$

Раскрывая скобки и сокращая на $4A$, получимъ

$$AE^2+CD^2+BF^2-BDE-4ACF=0 \qquad (2)$$

что и есть искомое условіе того, что уравненіе (1) опредѣляетъ двѣ прямыя. Первая часть уравненія (2) называется *дискриминантомъ* уравненія (1).

89. Разсмотримъ напримѣръ уравненіе

$$(\alpha x+\beta y-r^2)^2 = (\alpha^2+\beta^2-r^2)\;(x^2+y^2-r^2)$$

и покажемъ, что если $\alpha^2+\beta^2 > r^2$, то это уравненіе опредѣляетъ ничто иное, какъ двѣ касательныя, проведенныя къ кругу $x^2+y^2-r^2=0$ изъ точки съ координатами (α, β). Раскрывая скобки въ уравненіи получимъ

$$(\alpha x+\beta y)^2-(\alpha^2+\beta^2)\,(y^2+y^2)-r^2.\,[2\,(\alpha x+\beta y)-x^2-y^2-\alpha^2-\beta^2]=0$$

Воспользуемся тождествомъ

$$(\alpha^2+\beta^2)\,(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=(\alpha y-\beta x)^2;$$

получимъ

$$(\alpha y-\beta x)^2-r^2\,[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]=0,$$

откуда

$$[\alpha\,(y-\beta)-\beta\,(x-\alpha)]^2-r^2[(x-\beta)^2+(y-\beta)^2]=0$$

и окончательно

$$(\alpha^2-r^2)\,(x-\beta)^2-2\beta\alpha\,(x-\beta)\,(y-\beta)+(\beta^2-r^2)\,(y-\beta)^2=0.$$

Это уравненіе однородное относительно $x-\alpha$ и $y-\beta$ поэтому опредѣляетъ двѣ прямыя, проходящія черезъ точку (α, β). Въ самомъ дѣлѣ, полагая $y-\beta = \rho\,(x-\alpha)$ получимъ для нахожденія ρ квадратное уравненіе

$$(\alpha^2-r^2)\,\rho^2-2\alpha\beta\,\rho+\beta^2-r^2=0.$$

Откуда окончательно

$$\rho = \frac{\alpha\beta \pm r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}}{\alpha^2 - r^2}$$

Если

$$\alpha^2 + \beta^2 > r^2,$$

то оба корня ρ_1 и ρ_2 вещественные и, слѣдовательно, уравненія

$$y - \beta = \rho_1 (x - \alpha), \quad y - \beta = \rho_2 (x - \alpha)$$

опредѣляютъ двѣ прямыя, проходящія черезъ точку (α, β); что эти прямыя касаются къ кругу $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ видно изъ того, что разстояніе начала координатъ до нихъ равно r, въ чемъ не трудно убѣдиться.

Задачи:

1. Что опредѣляетъ уравненіе $xy = 0$?

Отв. Двѣ оси кооординатъ.

2. Какое мѣсто опредѣляетъ уравненіе $x^2 - y^2 = 0$?

Отв. Биссекторы угловъ между осями.

3. Мѣсто, опредѣляемое уравненіемъ $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$?

Отв. $x - 2y = 0$, $x - 3y = 0$.

4. Какое мѣсто опредѣляетъ уравненіе $x^2 - 2xy\, Sec\,\theta + y^2 = 0$

Отв. $x = y\, tg\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\theta}{2}\right)$.

5. Опредѣлить B такъ чтобы $x^2 + Bxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ опредѣляло прямыя линіи.

Отв. Отрѣзки на осяхъ получаются изъ уравненій $x^2 - 5x + 6 = 0$, $y^2 - 7y + 6 = 0$ корни ихъ суть $x = 2$, $x = 3$, $y = 1$, $y = 6$.

Составляя уравненія линій, соединяющихъ найденныя точки мы видимъ, что, если уравненіе выражаетъ прямыя линіи, то оно должно дать одну или другую изъ формъ

$$(x + 2y - 2)(2x + y - 6) = 0, \quad (x + 3y - 3)(3x + y - 6) = 0,$$

откуда перемножая опредѣлимъ B.

Линіи втораго порядка.

90. Переходя къ изслѣдованію уравненія

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

въ общемъ видѣ, мы будемъ во всемъ дальнѣйшемъ оси координатъ предполагать прямоугольными. Это предположеніе мы имѣемъ право дѣлать, ибо мы вывели раньше формулы, при помощи которыхъ мо-

жемъ перейти отъ любой косоугольной системы координатъ къ системѣ прямоугольной. Такъ какъ формулы преобразованія однѣхъ координатъ въ другія всегда первой степени относительно координатъ, какъ старыхъ такъ и новыхъ, то уравненіе второй степени (1) отъ такого преобразованія координатъ обратится въ уравненіе тоже второй степени относительно новыхъ координатъ. Это новое уравненіе будетъ, очевидно, имѣть тотъ же видъ, что и уравненіе (1)

$$A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0.$$

Для удобства дальнѣйшихъ выкладокъ будемъ писать уравненіе (1) въ такомъ видѣ

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (A)$$

Уравненіе (A) отличается только множителемъ 2, присоединеннымъ къ нѣкоторымъ коэффиціентамъ.

91. Прежде чѣмъ обратиться къ классификаціи и изученію различныхъ видовъ линій 2-го порядка, мы замѣтимъ ихъ нѣкоторыя общія свойства.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что уравненіе (1) заключаетъ 6 коэффиціентовъ, или, собственно говоря, пять параметровъ, получаемыхъ отъ дѣленія пяти изъ числа коэффиціентовъ на шестой, а потому линія втораго порядка опредѣляется изъ пяти условій. Можно требовать, напримѣръ, чтобы линія втораго порядка проходила черезъ 5 точекъ.

92. Намъ придется въ дальнѣйшемъ переносить начало координатъ въ точку a, b, оставляя направленіе осей прежнимъ. По извѣстнымъ уже намъ формуламъ преобразованія координатъ, мы замѣчаемъ, что уравненіе (A) обратится въ слѣдующее

$$A(x+a)^2+2B(x+a)(y+b)+C(y+b)^2+2(x+a)D+$$
$$+2E(y+b)+F=0;$$

откуда получимъ новое уравненіе въ такомъ видѣ

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0,$$

причемъ мы замѣчаемъ, что коэффиціенты A, B, C при x^2, xy, y^2 не измѣнились отъ произведеннаго преобразованія координатъ

натъ, что касается до коэффиціентовъ D_1, E_1, F_1, то они равны

$$D_1 = Aa + Bb + D$$

$$E_1 = Ba + Cb + E$$

$$F_1 = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F.$$

Итакъ, мы получаемъ въ высшей степени важное замѣчаніе, состоящее въ томъ, что независящій отъ координатъ членъ F_1 въ преобразованномъ уравненіи равенъ результату подстановки въ первую часть заданнаго уравненія координатъ новаго начала.

93. Линія втораго порядка пересѣкается всякою прямою въ двухъ точкахъ дѣйствительныхъ, совпадающихъ или мнимыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ прямую

$$y = mx + n; \qquad (*)$$

координаты точки пересѣченія прямой (*) и линіи втораго порядка (A) удовлетворятъ сразу двумъ уравненіямъ (A) и (*), а потому координаты эти должны представлять систему рѣшеній относительно x и y двухъ уравненій (A) и (*). Исключаемъ сначала y, подставляя его выраженіе изъ уравненія (*), въ уравненіе (A), тогда получимъ для опредѣленія x квадратное уравненіе.

$$(**)\ Ax^2 + 2Bx\,(mx + n) + C\,(mx + n)^2 + 2Dx +$$
$$+ 2E\,(mx + n) + F = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что существуютъ двѣ точки пересѣченія прямой (*) съ линіей втораго порядка (A), абсциссы которыхъ получатся черезъ рѣшеніе уравненія (**) относительно x. Если корни послѣдняго уравненія оба дѣйствительные, то прямая (*) пересѣчетъ линію (A) въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ; если корни одинаковы, то обѣ точки пересѣченія обращаются въ одну точку, а сѣкущая (*) становится касательною; наконецъ, если корни уравненія (**) мнимые, то прямая не пересѣкаетъ линію втораго порядка.

Преобразованіе первой части уравненія линіи втораго порядка.

94. Всѣ наши разсужденія, касающіяся классиффикаціи и изученія вида линій втораго порядка будутъ основаны на одномъ алге-

браическомъ преобразованіи уравненія (A) § 90, состоящемъ въ выдѣленіи въ первой части уравненія квадратовъ линейныхъ функцій (*) отъ координатъ.

95. Прежде всего замѣтимъ, что мы всегда можемъ предполагать, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ коэффиціентовъ A, B, C не равенъ нулю, ибо въ противномъ случаѣ уравненіе (A) обращается въ уравненіе первой степени

$$2Dx + 2Ey + F = 0$$

и опредѣляетъ, слѣдовательно, нѣкоторую прямую линію.

96. Оставляя до дальнѣйшаго случай равенства нулю обоихъ коэффиціентовъ A и C, мы здѣсь остановимся на случаѣ, когда одинъ изъ нихъ, напр. A не равенъ нулю.

Расположимъ первую часть уравненія по степенямъ координаты x, тогда получимъ

$$Ax^2 + 2x(By + D) + Cy^2 + 2Ey + F = 0. \qquad (A)$$

Умножимъ кромѣ того для удобства послѣднее уравненіе на A.

$$(Ax)^2 + 2Ax.(By + D) + ACy^2 + 2AEy + AF = 0.$$

Прибавляя къ первой части и вычитая изъ нея квадратъ двучлена $By + D$, получимъ

$$(Ax)^2 + 2Ax(By + D) + (By + D)^2 - (By + D)^2 +$$
$$+ ACy^2 + 2AEy + AF = 0.$$

Откуда получаемъ

$$[Ax + (By + D)]^2 - B^2y^2 - 2BDy - D^2 + ACy^2 +$$
$$+ 2AEy + AF = 0,$$

или окончательно

$$(Ax + By + D)^2 + Ly^2 + 2My + N = 0, \qquad (A')$$

гдѣ обозначено

$$L = AC - B^2,\ M = AE - BD,\ N = AF - D^2.$$

---

*) Линейною функціею отъ ξ, η, ς, ... τ называется выраженіе вида

$$a\xi + b\eta + e\varsigma + \ldots + \partial\tau + c.$$

Если $L = 0$, тогда разложеніе первой части уравненія (A) окончено, ибо тогда уравненіе (A') получаетъ видъ

$$(Ax + By + D)^2 + 2My + N = 0. \qquad (B)$$

Уравненіе (B) показываетъ, что въ случаѣ

$$AC - B^2 = 0,$$

по выдѣленіи квадрата линейной функціи

$$Ax + By + D$$

остается линейная функція

$$2My + N.$$

Итакъ, въ случаѣ $L = 0$ получаемъ первый видъ линій втораго порядка, уравненіе которыхъ можетъ быть приведено къ виду

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

гдѣ

$$\alpha = Ax + By + D, \ \beta = 2My + N.$$

Переходимъ теперь къ случаю когда L не равно нулю. Въ этомъ случаѣ можно умножить уравненіе (A') на L и продолжать разложеніе на сумму квадратовъ далѣе. Получимъ

$$L\,(Ax + By + D)^2 + L^2y^2 + 2LMy + LN = 0.$$

Прибавляемъ къ первой части этого уравненія и вычитаемъ изъ нея M^2, тогда получаемъ

$$L\,(Ax + By + D)^2 + (Ly)^2 + 2\,(Ly)\,M + M^2 + LN - M^2 = 0,$$

или окончательно

$$L\,(Ax + By + D)^2 + (Ly + M)^2 + P = 0, \qquad (C)$$

гдѣ

$$P = LN - M^2.$$

Уравненіе (C) представляетъ изъ себя окончательный результатъ разложенія первой части уравненія (A) на сумму квадратовъ линейныхъ функцій. По выдѣленіи двухъ квадратовъ линейныхъ функцій $Ax + By + D$ и $Ly + M$ остается постоянное число

$$P = LN - M^2.$$

Итакъ, въ случаѣ, когда L не $= 0$, получаются кривыя втораго вида, уравненіе которыхъ можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0,$$

гдѣ

$$\alpha = Ax + By + D,\ \beta = Ly + M.$$

97. Напримѣръ, задано уравненіе

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 1 = 0.$$

Переписывая въ такомъ видѣ:

$$x^2 - 2x(y-1) + y^2 - 1 = 0,$$

прибавляя и вычитая квадратъ $(y-1)^2$, получимъ

$$x^2 - 2x(y-1) + (y-1)^2 - (y-1)^2 + y^2 - 1 = 0,$$

откуда

$$[x - (y-1)]^2 - (y^2 - 2y + 1) + y^2 - 1 = 0;$$

$$(x - y + 1)^2 + 2y - 2 = 0.$$

Кривая принадлежитъ къ первому виду, ибо уравненіе ея представляется въ видѣ

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

гдѣ

$$\alpha = x - y + 1,\ \beta = 2y - 2.$$

Возьмемъ уравненіе

$$2x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y - 1 = 0.$$

Умножимъ на 2

$$(2x)^2 - 2(2x)y + 6y^2 - 2(2x) + 4y - 2 = 0,$$

или

$$(2x)^2 - 2(2x)(y+1) + 6y^2 + 4y - 2 = 0,$$

отсюда

$$[2x - (y+1)]^2 - (y^2 + 2y + 1) + 6y^2 + 4y - 2 = 0,$$

или

$$(2x - y - 1)^2 + 5y^2 + 2y - 3 = 0.$$

Умножая на 5, получимъ

$$5(2x - y - 1)^2 + 25y^2 + 2(5y) + 1 - 16 = 0,$$

или окончательно

$$5(2x-y-1)^2+(5y+1)^2-16=0.$$

Получается линія втораго порядка втораго вида, ибо заданное уравненіе можно представить въ видѣ:

$$L\alpha^2+\beta^2+P=0,$$

гдѣ

$$L=5,\ \alpha=2x-y-1,\ \beta=5y+1,\ P=16.$$

Изслѣдованіе уравненія (A) въ случаѣ $AC-B^2=0$.

98. Итакъ, мы обращаемся къ разсмотрѣнію линій втораго порядка перваго рода, т. е. когда уравненіе (A) можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ

$$\alpha^2+\beta=0, \qquad (B)$$

гдѣ

$$\alpha=Ax+By+D,\ \beta=2My+N,$$

а

$$M=EA-BD,\ N=AF-D^2.$$

99. Замѣтимъ прежде всего, что условіе $AC-B^2=0$ показываетъ, что первые три члена $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ составляютъ полный квадратъ линейной функціи.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$AC-B^2=0,$$

то

$$C=\frac{B^2}{A}$$

и мы получимъ

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=Ax^2+2Bxy+\frac{B^2}{A}y^2=$$

$$=\frac{1}{A}(A^2x^2+2ABxy+B^2y^2)=\left[\frac{1}{\sqrt{A}}(Ax+By)\right]^2$$

100. Разсмотримъ сначала геометрическія мѣста, опредѣляемыя уравненіемъ (B) въ томъ случаѣ, когда β постоянное, другими сло-

или, когда $M = 0$; такъ что $\beta = N$. Этотъ случай разбивается въ свою очередь на три слѣдующихъ:

$$N > 0,\ N = 0,\ N < 0.$$

101. Въ первомъ случаѣ, т. е. когда $N > 0$, уравненіе $\alpha^2 + N = 0$ не можетъ удовлетворяться ни при какихъ вещественныхъ значеніяхъ координатъ x и y, ибо первая часть этого уравненія есть сумма двухъ членовъ: N большаго нуля и другаго положительнаго числа α^2. Ни при какихъ значеніяхъ координатъ α^2 не можетъ быть сдѣланъ меньше нуля и, слѣдовательно, сумма $N + \alpha^2$ будучи не менѣе положительнаго числа N не можетъ равняться нулю. Итакъ, въ случаѣ $N > 0$ уравненіе $\alpha^2 + N = 0$ не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста.

102. Обращаемся къ случаю $N = 0$, тогда уравненіе $\alpha^2 + N = 0$ обращается въ слѣдующее

$$\alpha^2 = 0,$$

или, что одно и то же,

$$\alpha = 0.$$

Опредѣляемое уравненіемъ

$$\alpha^2 + N = 0$$

въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто есть прямая

$$\alpha = Ax + By + D = 0.$$

103. Наконецъ въ случаѣ $N < 0$ получимъ двѣ параллельныя прямыя. Въ самомъ дѣлѣ, если N отрицательно, то можно положить

$$N = -\delta^2,$$

гдѣ δ нѣкоторое вещественное число, и тогда уравненіе

$$\alpha^2 + N = 0$$

обратится въ слѣдующее

$$\alpha^2 - \delta^2 = 0, \quad (\alpha + \delta)\ (\alpha - \delta) = 0,$$

которое, въ свою очередь, разбивается на два слѣдующихъ

$$\alpha + \delta = 0,\ \alpha - \delta = 0.$$

Эти уравненія опредѣляютъ двѣ параллельныя прямыя

$$Ax + By + (D + \delta) = 0,\ Ax + By + (D - \delta) = 0.$$

Примѣры:

1. Пусть задано уравненіе

$$x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0.$$

Это уравненіе можно написать такъ:

$$(x + y)^2 + 1 = 0.$$

Уравненіе не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста.

2. Задано уравненіе

$$x^2 + 2xy + y^2 = 0.$$

Это уравненіе можно написать такъ

$$(x + y)^2 = 0, \quad \text{или} \quad x + y = 0$$

и, слѣдовательно, оно опредѣляетъ прямую, дѣлящую пополамъ углы, второй и четвертый между осями координатъ.

3. $$x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0.$$

Это уравненіе можетъ быть написано такъ

$$(x + y)^2 - 2^2 = 0; \ (x + y + 2)\,(x + y - 2) = 0.$$

Заданное уравненіе опредѣляетъ двѣ параллельныя прямыя

$$x + y + 2 = 0; \ x + y - 2 = 0.$$

104. Резюмируя сказанное относительно случая, когда β постоянное, мы можемъ сказать, что въ этомъ случаѣ линія 2-го порядка обращается въ систему двухъ параллельныхъ прямыхъ, причемъ эти прямыя могутъ быть разныя, совпадающія или мнимыя.

Парабола.

105. Обращаемся теперь къ болѣе общему случаѣ, когда коэффиціентъ M не равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ β есть линейная функція

$$2My + N.$$

Линія второго порядка, опредѣляемая въ этомъ случаѣ уравненіемъ

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

есть нѣкоторая особая кривая линія, называемая *параболою*.

106. Итакъ, мы приступимъ къ изученію вида и свойствъ параболы. Изъ уравненія

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

очевидно, что на разсматриваемой кривой лежитъ точка пересѣченія двухъ прямыхъ

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0,$$

ибо координаты этой точки удовлетворяютъ заразъ двумъ уравненіямъ

$$\alpha = 0, \ \beta = 0$$

и, слѣдовательно, удовлетворяютъ также и уравненію

$$\alpha^2 + \beta = 0.$$

Будемъ разсматривать точки пересѣченія заданной параболы съ прямыми, параллельными прямымъ

$$\alpha = 0, \ \beta = 0.$$

107. Общій видъ уравненія прямой параллельной $\alpha = 0$ есть $\alpha = k$, гдѣ k какое-нибудь заданное число; если это число положительное, то прямая $\alpha = k$ лежитъ по одну сторону прямой $\alpha = 0$, а если оно отрицательное, то по другую. Двѣ прямыя

$$\alpha = + k \text{ и } \alpha = - k$$

лежатъ съ разныхъ сторонъ относительно прямой $\alpha = 0$ и, какъ легко сообразить, на основаніи изложеннаго въ § 32, онѣ лежатъ на одинаковомъ разстояніи отъ послѣдней, такъ что прямая $\alpha = 0$ лежитъ по срединѣ между прямыми

$$\alpha = + k \text{ и } \alpha = - k.$$

Это замѣчаніе будетъ играть существенную роль во всѣхъ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ.

Итакъ, займемся сначала сѣкущими $\alpha = k$, параллельными прямой $\alpha = 0$. Легко показать, что всѣ такія сѣкущія пересѣкаютъ параболу въ одной точкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, точки пересѣченія сѣкущей $\alpha = k$ съ параболою

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

опредѣляются координатами, удовлетворяющими заразъ двумъ уравненіямъ

$$\alpha = k \quad \text{и} \quad \alpha^2 + \beta = 0,$$

а потому, чтобы получить искомыя координаты, надо рѣшить относительно x и y два уравненія

$$\alpha = k, \quad \alpha^2 + \beta = 0.$$

Послѣднюю систему уравненій, прежде чѣмъ рѣшать относительно x и y, мы имѣемъ право подвергнуть любому тождественному преобразованію, а именно, замѣною α на k, на основаніи перваго уравненія, мы можемъ второе уравненіе написать такъ

$$k^2 + \beta = 0,$$

откуда мы видимъ, что координаты точекъ пересѣченія могутъ быть опредѣлены изъ такой системы уравненій

$$\alpha = k, \quad k^2 + \beta = 0.$$

Оба послѣднія уравненія первой степени относительно x и y, а потому опредѣляютъ двѣ прямыя линіи, пересѣкающіяся въ одной точкѣ; эта послѣдняя точка и будетъ не что иное, какъ пересѣченіе прямой $\alpha = k$ съ параболою

$$\alpha^2 + \beta = 0.$$

108. Обращаемся теперь къ сѣкущимъ $\beta = k$, параллельнымъ прямой $\beta = 0$.

Координаты точекъ пересѣченія прямой $\beta = k$ и параболы

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

опредѣляется черезъ рѣшеніе относительно x и y системы уравненій

$$\beta = k, \quad \alpha^2 + \beta = 0.$$

Послѣдняя система можетъ быть замѣнена слѣдующею

$$\beta = k, \quad \alpha^2 + k = 0.$$

Уравненіе $\alpha^2 + k = 0$ при $k > 0$ не можетъ быть удовлетворено никакими дѣйствительными значеніями координатъ x и y, а потому прямая $\beta = k$ при $k > 0$ не пересѣкаетъ параболы

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

и, слѣдовательно, парабола лежитъ съ той стороны $\beta = 0$, съ которой β отрицательно.

Итакъ, будемъ искать точки пересѣченія параболы

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

съ прямою $\beta = k$, гдѣ $k < 0$. Въ этомъ случаѣ число k можно приравнять квадрату нѣкотораго дѣйствительнаго числа, взятому со знакомъ минусъ, а именно $k = -\delta^2$.

Прямая $\beta = 0$ параллельна оси x-овъ, ибо ея уравненіе имѣетъ видъ

$$2My + N = 0,$$

откуда

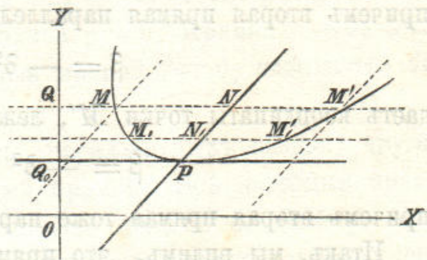
$$y = -\frac{N}{2M}.$$

Прямая же $\alpha = 0$, вообще говоря, не параллельна ни одной изъ осей, ибо ея уравненіе имѣетъ видъ

$$Ax + By + D = 0,$$

гдѣ A и B не равны нулю (см. черт. 38). Точка пересѣченія P прямыхъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ лежитъ, какъ мы уже сказали на искомой параболѣ. Положимъ, что

$$-\frac{N}{2M} > 0,$$



Черт. 38.

тогда прямая $\beta = 0$ лежитъ такъ, какъ это показано на чертежѣ, если, кромѣ того начало координатъ лежитъ съ той стороны прямой $\beta = 0$, съ которой β положительно, то вся парабола лежитъ по другую сторону прямой $\beta = 0$ относительно начала, т. е. опять таки такъ, какъ это показано на чертежѣ.

Покажемъ теперь, что каждая изъ прямыхъ

$$\beta = -\delta^2$$

пересѣкаетъ параболу въ двухъ точкахъ. Въ самомъ дѣлѣ, мѣняя величину δ мы будемъ получать различныя прямыя MM', M_1M_1', параллельныя прямой $\beta = 0$ и лежащія съ той стороны, гдѣ находится парабола.

Для нахожденія координатъ точекъ пересѣченія прямой

$$\beta = -\delta^2$$

съ параболой, необходимо рѣшить относительно x и y два уравненія

$$\beta = -\delta^2 \text{ и } \alpha^2 + \beta = 0;$$

эта система уравненій равносильна со слѣдующей

$$\beta = -\delta^2, \quad \alpha^2 - \delta^2 = 0,$$

или, что одно и то же,

$$\beta = -\delta^2, \ (\alpha + \delta)\,(\alpha - \delta) = 0.$$

Послѣдняя система уравненій равносильна двумъ системамъ

$$\left.\begin{matrix}\beta = -\delta^2 \\ \alpha + \delta = 0\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\beta = -\delta^2 \\ \alpha - \delta = 0\end{matrix}\right\}.$$

Первая система

$$(\beta = -\delta^2, \ \alpha = -\delta)$$

даетъ координаты точки M, лежащей на пересѣченіи прямыхъ

$$\beta = -\delta^2 \text{ и } \alpha = -\delta,$$

причемъ вторая прямая параллельна прямой $\alpha = 0$. Вторая система

$$\beta = -\delta^2, \ \alpha = +\delta$$

даетъ координаты точки M', лежащей на пересѣченіи прямыхъ

$$\beta = -\delta^2 \text{ и } \alpha = +\delta,$$

причемъ вторая прямая тоже параллельна прямой $\alpha = 0$.

Итакъ, мы видимъ, что прямая $\beta = -\delta^2$ пересѣкаетъ искомую параболу въ двухъ точкахъ M и M'. Точно также мы покажемъ, что всякая другая прямая $\beta = -\delta_1{}^2$, параллельная прямой $\beta = 0$, пересѣкаетъ искомую параболу въ двухъ точкахъ M_1 и M'_1.

По мѣрѣ уменьшенія величины δ точки M и M' сближаются, такъ что, когда $\delta = o$, то прямая $\beta = -\delta^2$ обращается въ касательную.

109. Покажемъ теперь, что прямая $\alpha = 0$ пересѣкаетъ всѣ хорды MM', $M_1 M_1'$, параллельныя прямой $\beta = 0$ въ точкахъ N, N_1, дѣлящихъ эти хорды пополамъ.

Возьмемъ нѣкоторую изъ разсматриваемыхъ нами хордъ, напр. MM' и пусть уравненіе этой хорды будетъ

$$\beta = -\delta^2,$$

гдѣ δ нѣкоторое дѣйствительное число. Координаты концовъ M и M' хорды MM' будутъ опредѣляться системами:

$$(M)\ldots\ldots \begin{cases} \beta = -\delta^2 \\ \alpha = -\delta \end{cases} \qquad (M')\ldots\ldots \begin{cases} \beta = -\delta^2 \\ \alpha = +\delta \end{cases}.$$

Координаты же точки N, въ которой хорду $\beta = -\delta^2$ пересѣкаетъ прямая $\alpha = 0$, опредѣляются изъ слѣдующей системы

$$(N)\ldots\ldots \begin{cases} \beta = -\delta^2 \\ \alpha = 0 \end{cases}.$$

Итакъ, мы видимъ, что точки M, N, M' опредѣляются, какъ пересѣченіе прямой $\beta = -\delta^2$ тремя прямыми

$$\alpha = -\delta, \quad \alpha = 0, \quad \alpha = +\delta.$$

Послѣднія три прямыя параллельны между собой и находятся въ равномъ разстояніи другъ отъ друга, откуда заключаемъ, что точка N есть средина хорды MM'.

Итакъ, мы видимъ, что прямая $\alpha = 0$ есть геометрическое мѣсто срединъ хордъ, параллельныхъ прямой $\beta = 0$. Прямая $\alpha = 0$, дѣлящая пополамъ хорды, параллельныя прямой $\beta = 0$, называется *діаметромъ* параболы.

Покажемъ, что средины хордъ, параллельныхъ всякому другому направленію, лежатъ на нѣкоторой прямой. Всѣ подобныя прямыя называются *діаметрами* параболы. Это опредѣленіе діаметра перенесено съ круга, ибо въ кругѣ средины хордъ, параллельныхъ между собой, лежатъ всегда на нѣкоторомъ діаметрѣ.

Итакъ, обращаемся къ разсмотрѣнію хордъ, не параллельныхъ прямой $\beta = 0$.

110. Докажемъ предварительно слѣдующую лемму.

Лемма. Заданы двѣ линейныя функціи

$$\alpha = Ax + By + D, \quad \beta = 2My + N.$$

Уравненіе всякой прямой

$$A_0 x + B_0 y + C_0 = 0 \qquad (1)$$

можетъ быть написано въ такомъ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0, \tag{2}$$

гдѣ l, m, n суть нѣкоторыя числа.

Въ самомъ дѣлѣ, числа l, m, n могутъ быть опредѣлены, сравнивая коэффиціенты въ уравненіяхъ (1) (2).

Уравненіе (2) можетъ быть написано такъ

$$l(Ax + By + D) + m(2My + N) + n = 0$$

$$lAx + (lB + 2mM)y + lD + mN + n = 0. \tag{2'}$$

Для того чтобы уравненіе (2′) совпало съ уравненіемъ (1), необходимо приравнять коэффиціенты при x и y и членъ, независящій отъ координатъ, въ одномъ уравненіи коэффиціентамъ и члену въ другомъ. Получимъ три уравненія

$$lA = A_0,\quad lB + 2mM = B_0,\quad lD + mN + n = C_0,$$

откуда получаемъ для l, m, n выраженія

$$l = \frac{A_0}{A},\quad m = \frac{B_0 A - A_0 B}{2AM},$$

$$n = \frac{C_0 A - A_0 D}{A} + N\,\frac{BA_0 - AB_0}{2MA}.$$

Примѣръ:

$$\alpha = x + y + 1,\ \beta = 2y - 1,$$

требуется уравненіе

$$3x - 2y + 1 = 0 \tag{*}$$

написать въ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0.$$

Уравненіе

$$l(x + y + 1) + m(2y - 1) + n = 0$$

можетъ быть написано въ такомъ видѣ

$$lx + (l + 2m)y + l - m + n = 0;$$

сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (*), мы получимъ

$$l = 3,\quad l + 2m = -2,\quad l - m + n = 1,$$

откуда получимъ

$$l=3,\quad m=-\frac{5}{2},\quad n=1-3-\frac{5}{2}=-\frac{9}{2}.$$

Уравненіе (*) можетъ быть окончательно представлено въ слѣдующемъ видѣ

$$3\alpha-\frac{5}{2}\beta-\frac{9}{2}=0.$$

Для рѣшенія той же задачи можно было-бы поступать еще такъ рѣшаемъ уравненія

$$\alpha=x+y+1 \text{ и } \beta=2y-1$$

относительно x и y и получаемъ

$$y=\frac{\beta+1}{2},\quad x=\alpha-1-\frac{\beta+1}{2};$$

подставляя полученныя выраженія для x и y въ уравненіе

$$3x-2y+1=0,$$

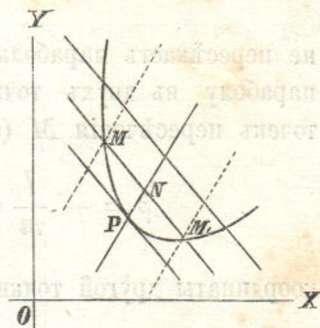
получаемъ

$$3\left(\alpha-1-\frac{\beta+1}{2}\right)-2\,\frac{\beta+1}{2}+1=0,$$

откуда окончательно

$$3\alpha-\frac{5}{2}\beta-\frac{9}{2}=0,$$

что совпадаетъ съ полученнымъ уже результатомъ.



Черт. 39.

111. Будемъ разсматривать теперь хорды, параллельныя нѣкоторой прямой

$$l\alpha+m\beta+n=0.$$

Уравненія всѣхъ этихъ хордъ мы получимъ, оставляя l, m безъ перемѣны и мѣняя n.

Предположимъ, что мы задаемъ для числа n нѣкоторое опредѣленное значеніе, тогда получаемъ нѣкоторую прямую, которая пересѣкаетъ параболу въ двухъ точкахъ M и M' (черт. 39), координаты которыхъ опредѣлятся черезъ рѣшеніе относительно x и y си-

стемы уравненій

$$\left. \begin{aligned} l\alpha + m\beta + n = 0 \\ \alpha^2 + \beta = 0 \end{aligned} \right\}$$

Эта система можетъ быть замѣнена слѣдующею

$$\begin{cases} \beta = -\dfrac{l}{m}\alpha - \dfrac{n}{m} \\ \alpha^2 - \dfrac{l}{m}\alpha - \dfrac{n}{m} = 0 \end{cases}$$

Послѣднее изъ уравненій можетъ быть рѣшено относительно α и мы тогда получимъ

$$\alpha = \frac{l}{2m} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4m^2} + \frac{n}{m}} = \frac{l}{2m} \pm \sqrt{R_n}.$$

Если $R_n > 0$, такъ что корень $\sqrt{R_n}$ вещественный, тогда существуютъ двѣ точки пересѣченія M и M' хорды $\overline{MM'}$ съ параболою. Въ случаѣ $R_n = 0$ обѣ точки пересѣченія сливаются въ одну и хорда обращается въ касательную къ параболѣ. Для значеній коэффиціента n, обращающихъ R_n въ число отрицательное, прямая

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

не пересѣкаетъ параболы. Въ томъ случаѣ, когда хорда пересѣкаетъ параболу въ двухъ точкахъ, мы получимъ координаты одной изъ точекъ пересѣченія M (см. черт. 39) изъ системы уравненій:

$$\beta = -\frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m}, \quad \alpha = \frac{l}{2m} + \sqrt{R_n};$$

координаты другой точки M' мы получимъ изъ системы:

$$\beta = -\frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m}, \quad \alpha = \frac{l}{2m} - \sqrt{R_n}.$$

Точка N лежитъ на прямой

$$\beta = -\frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m}$$

по срединѣ между точками M и M' и слѣдовательно, можетъ быть,

опредѣлена, какъ пересѣченіе прямой

$$\beta = -\frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m}$$

съ прямой

$$\alpha = \frac{l}{2m}.$$

Будемъ брать разныя хорды, параллельныя хордѣ $\overline{MM'}$. Перемѣна положенія хорды соотвѣтствуетъ измѣненію коэффиціента n, но при этомъ всегда средина хорды лежитъ на прямой

$$\alpha = \frac{l}{2m}$$

и, слѣдовательно, каждой системѣ параллельныхъ хордъ

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

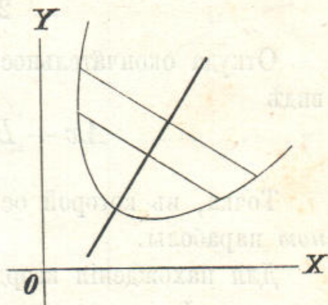
будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленный діаметръ

$$\alpha = \frac{l}{2m}.$$

Итакъ, мы видимъ, что всѣ діаметры имѣютъ уравненіе

$$\alpha = \frac{l}{2m}$$

и мы получимъ различные діаметры, подставляя въ послѣднее уравненіе различныя значенія для l и m. Видъ уравненія показываетъ, что всѣ діаметры параллельны между собою и параллельны діаметру $\alpha = 0$. Мы уже видѣли, что каждый изъ діаметровъ пересѣкаетъ параболу (B) только въ одной точкѣ.



Черт. 40.

112. Поищемъ теперь діаметръ перпендикулярный къ хордамъ, которыя онъ дѣлитъ пополамъ. Такой діаметръ называется *осью* параболы и относительно него парабола симметрична (см. черт. 40). Мы уже получили уравненіе діаметра

$$\alpha = \frac{l}{2m}, \qquad (*)$$

дѣлящаго хорды

$$l\alpha + m\beta + n = 0 \qquad (^{**})$$

пополамъ. Остается подобрать l и m такъ, чтобы двѣ прямыя (*) и (**) были взаимно перпендикулярны. Наши уравненія (*) и (**) могутъ быть написаны такъ

$$Ax + By + D = \frac{l}{2m} \qquad (^{*})$$

$$l(Ax + By + D) + m(2My + N) + n = 0. \qquad (^{**})$$

Уравненіе (**) можно написать еще такъ

$$lAx + y(lB + 2mM) + lD + mN + n = 0. \qquad (^{**})$$

Для перпендикулярности уравненій (*) и (**) должно существовать условіе

$$1 + \left(-\frac{A}{B}\right)\cdot\left(-\frac{lA}{lB + 2mM}\right) = 0.$$

Раскрывая это условіе, мы получимъ

$$lB^2 + 2mBM + lA^2 = 0,$$

откуда

$$l(A^2 + B^2) + 2mBM = 0,$$

или

$$\frac{l}{2m} = -\frac{BM}{A^2 + B^2}.$$

Откуда окончательное уравненіе оси напишется въ слѣдующемъ видѣ

$$Ax + By + D = -\frac{BM}{A^2 + B^2}.$$

Точка, въ которой ось пересѣкаетъ параболу называется *вершиною* параболы.

Для нахожденія координатъ вершины параболы, необходимо рѣшить совмѣстно относительно x и y уравненіе оси

$$Ax + By + D = -\frac{BM}{A^2 + B^2}$$

и уравненіе параболы

$$(Ax + By + D)^2 + 2My + N = 0.$$

Легко видѣть, что вершина опредѣлится какъ пересѣченіе двухъ прямымъ

$$Ax + By + D = -\frac{BM}{A^2 + B^2}$$

$$2My + N = -\left(\frac{BM}{A^2 + B^2}\right)^2.$$

113. Уравненіе параболы приметъ особенно простой видъ, если мы перейдемъ къ новымъ координатамъ, причемъ за новую ось x-овъ возьмемъ ось симметріи параболы, новое начало помѣстимъ въ вершинѣ параболы, а новую ось y-овъ расположимъ параллельно хордамъ, которыя дѣлитъ попаламъ ось симметріи.

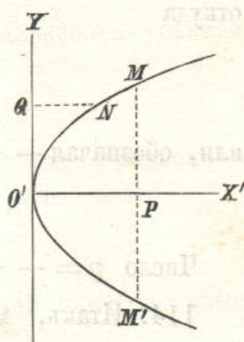
На основаніи сказаннаго относительно оси параболы мы заключаемъ, что новая ось y-овъ будетъ перпендикулярна къ оси симметріи параболы и будетъ касаться къ послѣдней въ вершинѣ. Послѣ преобразованія координатъ уравненіе параболы (B) приметъ видъ:

$$A_1 x'^2_1 + 2B_1 x'y' + C_1 y'^2 + 2D_1 x' + 2E_1 y' + F_1 = 0 \quad (A_1)$$

Прежде всего мы замѣчаемъ, что $F_1 = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, новое начало координатъ $0'$ есть вершина параболы, отсюда мы видимъ, что координаты этого начала $x' = 0$, $y' = 0$ должны удовлетворять уравненію (A_1). Мы получаемъ

$$A_1 0 + 2B_1 0 + C_1 0 + 2D_1 0 + 2E_1 0 + F_1 = 0,$$

откуда выходитъ $F_1 = 0$.



Черт. 41.

Для каждаго заданнаго значенія для y'-ка напр. для значенія $y' = +\overline{0'Q}$ (см. черт. 41), мы должны получить только одно значеніе для x' равное $+\overline{QN}$, ибо прямая QN, параллельная оси параболы, есть нѣкоторый діаметръ параболы и, слѣдовательно, по доказанному пересѣкаетъ параболу только въ одной точкѣ N.

Итакъ, мы видимъ, что уравненіе (A_1) должно для каждаго значенія y' давать только одно значеніе для x' и, слѣдовательно, это уравненіе должно быть первой степени относительно x', другими словами, должно быть $A_1 = 0$.

Съ другой стороны каждой абсциссѣ $x' = +0'P$ должны на пара-

болѣ соотвѣтствовать двѣ точки M и M' имѣющія равныя по абсолютной величинѣ ординаты, но разныхъ знаковъ; такъ что для точки M

$$y' = +PM,$$

а для точки M'

$$y' = -PM'.$$

Итакъ, мы видимъ, что уравненіе (A_1) должно давать для y' при всякомъ x' два корня равныхъ по абсолютной величинѣ, но съ разными знаками, что не иначе возможно какъ тогда, когда уничтожается коэффиціентъ

$$2B_1x' + 2E_1$$

при первой степени y', что даетъ уравненіе

$$B_1x' + E_1 = 0.$$

Такъ какъ послѣднее уравненіе должно удовлетворяться при всевозможныхъ значеніяхъ для x', то должно быть

$$B_1 = 0 \quad \text{и} \quad E_1 = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что уравненіе (A_1) окончательно должно имѣть видъ

$$C_1y'^2 + 2D_1x' = 0,$$

откуда

$$y'^2 = -2\,\frac{D_1}{C_1}\,x',$$

или, обозначая $-\dfrac{D_1}{C_1}$ черезъ p, получимъ

$$y'^2 = 2px'.$$

Число $p = -\dfrac{D_1}{C_1}$ называется *параметромъ* параболы.

114. Итакъ, мы видимъ, что для опредѣленія параметра параболы нужно выбрать за оси координатъ ось параболы и касательную въ вершинѣ. Преобразованіе къ новымъ осямъ легко сдѣлать, ибо мы уже опредѣлили координаты вершины параболы, которая принимается за новое начало координатъ; что касается угла, составляемаго новою осью x-овъ съ прежнею, то этотъ уголъ есть нечто иное какъ уголъ составляемый осью параболы съ осью x-овъ.

115. Параметръ параболы можно опредѣлить проще на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Мы видѣли уже, что уравненіе параболы можетъ быть приведено къ виду

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

гдѣ $\alpha = 0$ есть нѣкоторый діаметръ, а $\beta = 0$ есть касательная къ параболѣ въ точкѣ сѣченія параболы діаметромъ $\alpha = 0$. Мы преобразовали первую часть уравненія параболы такимъ образомъ, что заключили букву x въ квадратъ α^2, такъ что линейная функція β этой буквы болѣе не содержала. Мы могли бы вести преобразованіе иначе: можно было бы въ первый квадратъ заключить букву y, тогда уравненіе параболы имѣло бы видъ

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

съ тою лишь разницею, что функція β зависѣла бы отъ одного x. Въ этомъ случаѣ $\beta = 0$ была бы касательная къ параболѣ параллельная оси y-овъ, а $\alpha = 0$ соотвѣтственный діаметръ. Однимъ словомъ мы замѣчаемъ, что, какимъ бы образомъ мы ни преобразовали уравненіе параболы къ виду

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

всегда будетъ $\alpha = 0$ діаметръ параболы, а $\beta = 0$ соотвѣтственная касательная.

Для опредѣленія параметра возьмемъ ось параболы, уравненіе которой имѣетъ видъ

$$Ax + By + \lambda = 0.$$

Этой оси соотвѣтствуютъ перпендикулярныя хорды. Уравненіе касательной, параллельной этимъ хордамъ будетъ имѣть видъ

$$Bx - Ay + \mu = 0.$$

Отсюда мы заключаемъ, что уравненіе заданной параболы можетъ быть приведено къ виду

$$(Ax + By + \lambda)^2 = 2P\ (Bx - Ay + \mu) \qquad (*)$$

Остается опредѣлить λ, μ, P подъ тѣмъ условіемъ, чтобы это уравненіе совпадало съ заданнымъ уравненіемъ параболы

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Послѣднее уравненіе можно написать такъ

$$A^2x^2 + 2BAxy + B^2y^2 + 2DAx + 2EAy + AF = 0.$$

Раскрывая скобки въ уравненіи (*), мы получимъ

$$A^2x^2 + 2ABxy + B^2y^2 + 2\,(A\lambda - PB)\,x + 2\,(B\lambda + AP)\,y + \\ + \lambda^2 - 2P\mu = 0,$$

Откуда получаемъ для опредѣленія λ, μ, P три уравненія

$$A\lambda - PB = DA,\ B\lambda + AP = EA,\ \lambda^2 - 2P\mu = FA.$$

Изъ первыхъ двухъ уравненій получаемъ

$$\lambda = A\,.\,\frac{DA + BE}{A^2 + B^2},\ P = A\,\frac{EA - DB}{A^2 + B^2} = \frac{AM}{A^2 + B^2}$$

наконецъ

$$\mu = \frac{\lambda^2 - FA}{2P}.$$

Припоминая, что координаты ξ и η относительно новыхъ осей координатъ суть не что иное какъ разстоянія до касательной въ вершинѣ и до оси параболы, мы получимъ

$$\xi = \frac{Bx - Ay + \mu}{\sqrt{A^2 + B^2}};\ \eta = \frac{Ax + By + \lambda}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подставляя въ уравненіе (*), получимъ

$$(A^2 + B^2).\ \eta^2 = 2P.\ \sqrt{A^2 + B^2}.\xi$$

Отсюда

$$\eta^2 = 2\,\frac{P}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,\xi.$$

Итакъ, мы получимъ окончательно выраженіе для параметра параболы въ такомъ видѣ

$$p = \frac{P}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

116. Пояснимъ изложенную теорію численнымъ примѣромъ.

Возьмемъ уравненіе

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0.$$

Это уравненіе, по разложеніи на сумму квадратовъ, обращается въ слѣдующее

$$(x + y - 1)^2 + 2y = 0$$

и, слѣдовательно, опредѣляетъ нѣкоторую параболу, ибо имѣетъ видъ

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

гдѣ $\alpha = x + y - 1$, а $\beta = 2y$.

Прежде всего замѣчаемъ, что на параболѣ лежитъ точка пересѣченія двухъ прямыхъ $\alpha = 0, \beta = 0$. Прямая $\beta = 0$ въ данномъ случаѣ совпадаетъ съ осью x-овъ, ибо $\beta = 2y$, такъ что уравненіе $\beta = 0$ обращается въ уравненіе оси OX $y = 0$ (см. черт. 42).

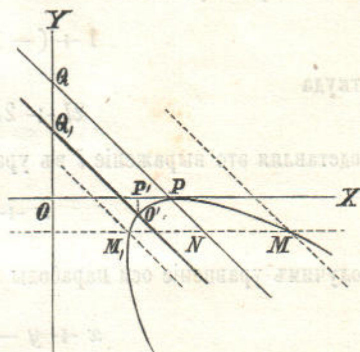
Прямая $\alpha = 0$ имѣетъ видъ

$$x + y = 1$$

и, слѣдовательно, пересѣкаетъ оси координатъ въ точкахъ P и Q, причемъ

$$OP = OQ = 1.$$

Точка P принадлежитъ параболѣ.



Черт. 42.

Уравненіе параболы

$$\alpha^2 + 2y = 0 \qquad (B)$$

показываетъ, что вся парабола лежитъ ниже оси OX, ибо для того, чтобы уравненіе (B) было возможно, необходимо, чтобы $2y = \beta$ было отрицательно; полагая на самомъ дѣлѣ $\beta = -k$ (гдѣ k положительное число), мы получимъ прямую параллельную оси x-овъ, которая пересѣчетъ параболу въ двухъ точкахъ M и M_1, изъ которыхъ одна получится какъ пересѣченіе прямой $\beta = -k$ съ діаметромъ $\alpha = +\sqrt{k}$, а другая, какъ пересѣченіе той же прямой $\beta = -k$ съ діаметромъ $\alpha = -\sqrt{k}$. Для нахожденія оси параболы пишемъ уравненіе любой хорды

$$l\alpha + m\beta + n = 0,$$

которое въ нашемъ частномъ случаѣ имѣетъ видъ

$$l(x + y - 1) + m(2y) + n = 0.$$

Уравненіе соотвѣтственнаго діаметра будетъ

$$\alpha = \frac{l}{2m}, \text{ т. е. } x + y - 1 = \frac{l}{2m}.$$

Остается для нахожденія оси подобрать l и m такъ, чтобы прямая

$$l\alpha + m\beta + n = 0,$$

имѣющая уравненіе

$$lx+(l+2m)\,y-l+n=0,$$

была перпендикулярна къ діаметру

$$x+y-1=\frac{l}{2m}.$$

Для этого необходимо, чтобы угловые коэффиціенты

$$-\frac{l}{l+2m} \text{ и } -1$$

удовлетворяли условію

$$1+(-1).\left(-\frac{l}{l+2m}\right)=0,$$

откуда

$$2l+2m=0,\quad l=-m$$

подставляя это выраженіе l въ уравненіе

$$x+y-1=\frac{l}{2m},$$

получимъ уравненіе оси параболы въ слѣдующемъ видѣ

$$x+y-1=-\frac{m}{2m}=-\frac{1}{2},$$

откуда, окончательно, получимъ уравненіе оси $P'Q'$ въ слѣдующемъ видѣ

$$x+y=\frac{1}{2}.$$

Координаты вершины получимъ, рѣшая относительно x и y систему уравненій

$$(x+y-1)^2+2y=0$$

$$x+y-1=-\frac{1}{2};$$

откуда

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2y=0,\quad y=-\frac{1}{8},$$

подставляя полученное значеніе въ уравненіе

$$x+y-1=-\frac{1}{2},$$

получимъ для абсциссы вершины значеніе

$$x=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

Итакъ, координаты вершины параболы будутъ

$$x=+\frac{5}{8},\quad y=-\frac{1}{8}.$$

Отнесемъ заданную параболу къ новымъ осямъ координатъ, причемъ возьмемъ за новую ось x-овъ ось параболы

$$x + y = \frac{1}{2},$$

за новое начало возьмемъ вершину параболы

$$\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right).$$

Придется употребить слѣдующія формулы преобразованія координатъ

$$x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

$$y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

гдѣ
$$a = \frac{5}{8},\ b = -\frac{1}{8},\ \alpha = -45^\circ;$$

$$\cos \alpha = + \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \alpha = - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$x = \frac{5}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

$$y = -\frac{1}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y');$$

откуда

$$x + y - 1 = \sqrt{2}\ y' - \frac{1}{2}.$$

Уравненіе параболы

$$(x + y - 1)^2 + 2y = 0$$

можетъ быть написано такъ:

$$\left(\sqrt{2}\, y' - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left[-\frac{1}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')\right] = 0,$$

или, раскрывая скобки и сокращая, получимъ

$$2y'^2 - \sqrt{2}\, x' = 0,$$

откуда, окончательно, получаемъ уравненіе параболы въ простѣйшемъ видѣ

$$y'^2 = 2\,\frac{\sqrt{2}}{4}\, x'.$$

Итакъ, мы видимъ, что параметръ параболы p равенъ $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Получимъ параметръ другимъ указаннымъ нами способомъ. Сравниваемъ уравненіе

$$(x + y + \lambda)^2 = 2P\,(x - y + \mu)$$

съ уравненіемъ заданнымъ

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0,$$

тогда получимъ три уравненія

$$\lambda - P = -1, \quad \lambda + P = 0, \quad \lambda^2 - 2P\mu = 1,$$

откуда получаемъ

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \quad P = \frac{1}{2}, \quad \mu = -\frac{3}{4}.$$

Параметръ

$$p = \frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2};$$

уравненіе оси

$$x + y - \frac{1}{2} = 0;$$

уравненіе касательной въ вершинѣ

$$x - y - \frac{3}{4} = 0.$$

117. Пріемъ, употребленный нами въ § 115 для полученія параметра параболы въ случаѣ прямоугольныхъ осей координатъ, можетъ быть примѣненъ и къ случаю осей косоугольныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ θ уголъ между осями координатъ, опредѣлимъ λ, μ, P черезъ сравненіе уравненія

$$(Ax + By + \lambda)^2 = 2P.\,[(B - A\cos\theta)\,x - (A - B\cos\theta)\,y + \mu]$$

съ уравненіемъ заданнной параболы

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Получаемъ три уравненія

$$A\lambda - P\,(B - A\cos\theta) = AD$$
$$B\lambda + P\,(A - B\cos\theta) = AE$$
$$\lambda^2 - 2P\mu = AF,$$

откуда найдемъ три числа λ, μ, P.

Преобразованіе къ новымъ координатамъ совершится по формуламъ

$$\xi = \frac{[(B - A\cos\theta)\,x - (A - B\cos\theta)\,y + \mu]\sin\theta}{\sqrt{(B - A\cos\theta)^2 + (A - B\cos\theta)^2 + 2\,(B - A\cos\theta)\,(A - B\cos\theta)\cos\theta}} =$$

$$= \frac{(B - A\cos\theta)\,x - (A - B\cos\theta)\,y + \mu}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}},$$

$$\eta = \frac{(Ax + By + \lambda)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}},$$

откуда, окончательно, получаемъ уравненіе параболы въ такомъ видѣ

$$\frac{A^2+B^2-2AB\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\eta^2 = 2P\xi\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}\,,$$

или

$$\eta^2 = 2\,\frac{P\sin^2\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}\,\xi.$$

118. Если мы за ось x-овъ возьмемъ какой нибудь діаметръ, за новое начало точку, въ которой діаметръ пересѣкаетъ параболу, за другую же ось y-овъ прямую параллельную хордамъ дѣлящимся пополамъ діаметромъ взятымъ за ось x-овъ, то отъ такого преобразованія координатъ выйдетъ уравненіе параболы въ слѣдующемъ видѣ

$$y'^2 = 2p_1\,x',$$

въ чемъ легко убѣдиться на основаніи соображеній, подобныхъ изложеннымъ въ § 113. Вся разница будетъ состоять лишь въ томъ, что новыя оси координатъ косоугольныя и коэффиціентъ p_1 не равенъ параметру параболы.

119. На основаніи изложеннаго въ § 117 легко указать зависимость между p_1 и параметромъ p. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что задано уравненіе параболы

$$y^2 = 2p_1\,x,$$

отнесенное къ нѣкоторому діаметру и касательной, составляющимъ между собою уголъ θ. Придется съ этимъ уравненіемъ сравнивать слѣдующее

$$(y+\lambda)^2 = 2P\,(x + \cos\theta\;y + \mu);$$

получаемъ

$$P = p_1,$$

потомъ

$$\eta = (y+\lambda)\sin\theta,\;\; \xi = x + \cos\theta\;y + \mu,$$

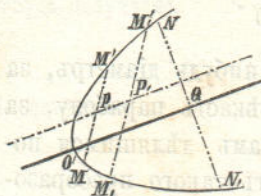
$$\eta^2 = 2p_1\sin^2\theta\;\xi,$$

откуда получаемъ искомую зависимость

$$p = p_1\sin^2\theta.$$

120. На основаніи всего изложеннаго мы замѣчаемъ слѣдующее геометрическое правило для построенія оси параболы, если задано очертаніе этой параболы. Беремъ двѣ произвольныя взаимно параллельныя хорды параболы MM' и $M_1M'_1$ и дѣлимъ эти хорды въ точкахъ p и p' пополамъ. Соединяя точки p и p', получимъ одинъ изъ діаметровъ параболы (см. черт. 43). Проводимъ произвольную

прямую перпендикулярную къ діаметру pp_1 и пересѣкающую параболу въ нѣкоторыхъ двухъ точкахъ N и N'. Хорду NN' дѣлимъ въ точкѣ Q попаламъ. Черезъ точку Q проводимъ прямую параллельную діаметру pp_1; эта послѣдняя прямая и будетъ осью симметріи параболы.



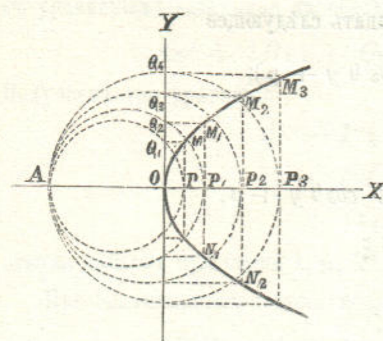
Черт. 43.

121. Изъ разсмотрѣнія уравненія параболы въ простѣйшемъ видѣ $y^2 = 2p\,x$, получаемаго, когда возьмемъ за ось x-овъ ось симметріи, и за ось y-овъ касательную въ вершинѣ, легко вывести слѣдующее весьма простое геометрическое правило для построенія параболы по точкамъ. Изъ уравненія параболы видно, что y есть среднее пропорціональное число между числами $2p$ и x. Отложимъ на оси OX отрѣзки OP и OA равныя нѣкоторой асциссѣ x и удвоенному параметру $2p$. На прямой AP какъ на діаметрѣ построимъ кругъ AQ_1P, который пересѣчетъ ось OY въ точкѣ Q_1. По извѣстной теоремѣ элементарной геометріи получимъ, что

$$OQ^2{}_1 = AO.\,OP,$$

откуда, принимая во вниманіе, что

$$AO = 2p \text{ и } OP = x$$



Черт. 44.

для точки M, замѣчаемъ, что

$$OQ^2{}_1 = 2p\cdot x,$$

и, слѣдовательно, на основаніи уравненія параболы получимъ, что

$$OQ_1 = y.$$

И, слѣдовательно, точка M на параболѣ получится (см. черт. 44) какъ пересѣченіе двухъ прямыхъ PM и Q_1M, параллельныхъ осямъ координатъ. Другую точку M_1 на параболѣ получимъ, выбирая соотвѣтствующую ей абсциссу OP_1, тогда ординатою этой точки M_1 будетъ отрѣзокъ OQ_2, гдѣ Q_2 есть точка пересѣченія оси OY съ кругомъ AQ_2P_1, построеннымъ на длинѣ AP_1, какъ на діаметрѣ. Подобнымъ же образомъ получимъ изъ круга

AQ_3P_2 точку M_2, лежащую на искомой параболѣ. Итакъ, мы видимъ, что указанное построеніе даетъ возможность указать сколько угодно точекъ M, M_1, M_2, ... на искомой параболѣ. Каждой изъ точекъ M, M_1, M_2, ..., лежащихъ по одну сторону оси симметріи соотвѣтствуетъ нѣкоторая точка, симметрично лежащая по другую сторону, такъ что найдя точки M, M_1, M_2 и т. д., мы непосредственно получимъ рядъ точекъ N, N_1, N_2, и т. д., лежащихъ на параболѣ по другую сторону оси.

Касательная.

122. Мы видѣли уже, что точки пересѣченія хорды

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

съ параболою

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

опредѣляются черезъ рѣшеніе системы уравненій

$$l\alpha + m\beta + n = 0, \quad \alpha^2 - \frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m} = 0,$$

или, что одно и тоже, изъ системы

$$l\alpha + m\beta + n = 0, \quad \alpha = \frac{l}{2m} \pm \sqrt{R_n},$$

гдѣ

$$R_n = \frac{l^2}{4m^2} + \frac{n}{m}.$$

Эти точки пересѣченія совпадаютъ, если $R_n = 0$, тогда хорда

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

обращается въ касательную.

Въ самомъ дѣлѣ

$$R_n = \frac{l^2 + 4nm}{4m^2} = 0,$$

откуда получаемъ

$$l^2 + 4nm = 0, \; n = -\frac{l^2}{4m}.$$

Итакъ, мы получаемъ общее уравненіе касательной къ параболѣ въ такомъ видѣ

$$l\alpha + m\beta - \frac{l^2}{4m} = 0.$$

Раздѣляя на m это уравненіе и обозначая $\frac{l}{2m} = u$, получимъ уравненіе касательной въ такомъ видѣ

$$2u\alpha + \beta - u^2 = 0. \qquad (*)$$

123. **Задача**. Черезъ точку, лежащую на параболѣ, провести къ параболѣ касательную.

Пусть координаты заданной точки M на параболѣ будутъ x_0, y_0; обозначимъ черезъ α_0, β_0 результатъ подстановки координатъ x_0, y_0 въ функціи α и β. Такъ какъ по предположенію точка M лежитъ на заданной параболѣ, то должно быть

$$\alpha^2{}_0 + \beta_0 = 0.$$

Остается опредѣлить въ уравненіи (*) § 122 коэффиціентъ u подъ тѣмъ условіемъ, чтобы касательная проходила черезъ точку M; для этой цѣли необходимо удовлетворить уравненію

$$2u\alpha_0 + \beta_0 - u^2 = 0.$$

Принимая въ соображеніе, что

$$\beta_0 = -\alpha^2{}_0,$$

получимъ

$$2u\alpha_0 - \alpha^2{}_0 - u^2 = 0,\ -(u - \alpha_0)^2 = 0,\ u - \alpha_0 = 0,\ u = \alpha_0.$$

Такимъ образомъ мы опредѣлили величину искомаго параметра u; остается полученное значеніе u подставить въ уравненіе (*), тогда мы получимъ, окончательно, уравненіе искомой касательной въ такомъ видѣ

$$2\alpha_0\alpha + \beta - \alpha^2{}_0 = 0,$$

или въ болѣе симметричномъ видѣ

$$2\alpha_0\alpha + \beta + \beta_0 = 0.$$

Если уравненіе параболы приведено къ простѣйшему виду

$$y^2 = 2px,$$

то

$$\alpha = y,\ \beta = -2px,$$

такъ что уравненіе касательной будетъ имѣть видъ

$$2yy_0 - 2px - 2px_0 = 0,$$

или

$$yy_0 = p\,(x + x_0).$$

124. **Задача.** Черезъ точку, лежащую внѣ параболы, провести къ параболѣ касательную.

Пусть координаты, заданной точки M суть x_1, y_1, обозначимъ черезъ α_1 и β_1 результатъ подстановки координатъ x_1 и y_1 въ функціи α и β. Обозначая черезъ x_0 и y_0 координаты точки касанія искомой касательной, мы получимъ для этой касательной уравненіе

$$2\alpha\alpha_0 + \beta + \beta_0 = 0. \qquad (1)$$

Чтобы эта касательная проходила черезъ точку M, необходимо, чтобы удовлетворялось условіе

$$2\alpha_0\alpha_1 + \beta_0 + \beta_1 = 0, \qquad (2)$$

причемъ, очевидно, должно быть

$$\alpha^2{}_0 + \beta_0 = 0, \qquad (3)$$

ибо точка (x_0 y_0) лежитъ на параболѣ. Рѣшая уравненія (2) и (3) относительно α_0 и β_0, мы для нихъ получимъ двѣ системы рѣшеній, подставляя которыя въ уравненіе (1) мы получимъ двѣ касательныя проходящія черезъ точку M. Производя указанное рѣшеніе, мы получаемъ.

$$\alpha_0 = \alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1{}^2 + \beta_1},\quad \beta_0 = -\alpha_0{}^2.$$

Послѣднія формулы показываютъ, что существуютъ двѣ дѣйствительныя касательныя, когда

$$\alpha^2{}_1 + \beta_1 > 0,$$

то есть когда точка M лежитъ съ той стороны параболы, куда кривая обращена выпуклостью и, наоборотъ, касательныхъ нѣтъ, если

$$\alpha_1{}^2 + \beta_1 < 0;$$

если же

$$\alpha_1^2 + \beta_1 = 0,$$

тогда

$$\alpha_0 = \alpha_1, \quad \beta_0 = \beta_1$$

и касательная будетъ одна

$$2\alpha\alpha_1 + \beta + \beta_1 = 0,$$

что мы видѣли уже въ предыдущемъ параграфѣ.

125. Мы опредѣляли координаты точки касанія, или что одно и то же, значенія функцій α_0 и β_0 изъ уравненій

$$2\alpha\alpha_1 + \beta + \beta_1 = 0, \quad \alpha^2 + \beta = 0,$$

что приводится къ опредѣленію точекъ пересѣченія параболы

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

съ прямою

$$2\alpha\alpha_1 + \beta + \beta_1 = 0.$$

Послѣдняя прямая, какъ показываетъ ея уравненіе, дѣйствительная для всякаго положенія точки M называется *полярою* этой точки, точка же M по отношенію къ полярѣ называется *полюсомъ*.

Примѣръ.

Провести къ параболѣ

$$(x = y)^2 + 3x - 1 = 0$$

касательную черезъ точку $(x_1 = 1, y_1 = 0)$;

$$\alpha_1 = 1 - 0 = 1, \quad \beta_1 = 3 - 1 = 2$$

$$\alpha_0 = 1 \pm \sqrt{3}; \quad \beta_0 = -4 \mp 2\sqrt{3} = -\alpha_0^2,$$

откуда, окончательно, уравненія касательныхъ будутъ

$$2(x - y)(1 + \sqrt{3}) + 3x - 5 - 2\sqrt{3} = 0,$$

$$2(x - y)(1 - \sqrt{3}) + 3x - 5 + 2\sqrt{3} = 0.$$

126. Легко замѣтить, что уравненія касательныхъ будутъ

$$2\alpha\alpha_1 + \beta - 2\alpha_1^2 - \beta_1 + 2(\alpha - \alpha_1)\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1} = 0,$$

$$2\alpha\alpha_1 + \beta - 2\alpha_1^2 - \beta_1 - 2(\alpha - \alpha_1)\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1} = 0,$$

перемножая первыя части, мы получимъ уравненіе, опредѣляющее совокупность

двухъ касательныхъ, проведенныхъ черезъ точку M, въ такомъ видѣ

$$(2\alpha\alpha_1 + \beta - 2\alpha_1^2 - \beta_1)^2 - 4(\alpha - \alpha_1)^2(\alpha_1^2 + \beta_1) = 0,$$

откуда окончательно

$$4.(\alpha^2 + \beta).(\alpha_1^2 + \beta_1) - (2\alpha\alpha_1 + \beta + \beta_1)^2 = 0.$$

127. **Задача.** Провести касательную къ параболѣ параллельно заданной прямой.

Уравненіе заданной прямой можно представить въ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ касательной

$$2\alpha\alpha_0 + \beta + \beta_0 = 0,$$

мы замѣчаемъ, что

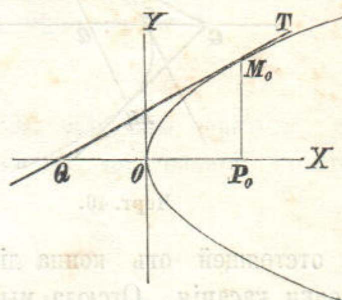
$$2\alpha_0 = \frac{l}{m},$$

или

$$\alpha_0 = \frac{l}{2m}, \quad \beta_0 = -\alpha_0^2 = -\frac{l^2}{4m^2};$$

получаемъ окончательно уравненіе касательной въ такомъ видѣ

$$\frac{l}{m}\alpha + \beta - \frac{l^2}{4m^2} = 0.$$



Черт. 45.

128. Возьмемъ уравненіе параболы, отнесенное къ оси симметріи и касательной въ вершинѣ.

Пусть уравненіе заданной параболы будетъ

$$y^2 = 2px.$$

Тогда, обозначая черезъ x_0, y_0 координаты точки касанія M_0, мы напишемъ уравненіе касательной въ такомъ видѣ

$$(1) \qquad yy_0 = p\,(x + x_0).$$

Опредѣлимъ точку Q (см. черт. 45), въ которой касательная пересѣкаетъ ось x-овъ. Для этого надо въ уравненіи (1) положить $y = 0$, тогда для x, т. е. абсциссы точки Q, получимъ значеніе

$$x = -x_0,$$

что даетъ простой способъ построенія касательной въ точкѣ на параболѣ по равенству $\overline{OQ} = \overline{OP}_0$.

129. Весьма важно замѣтить, что уравненіе касательной сохраняетъ свой видъ

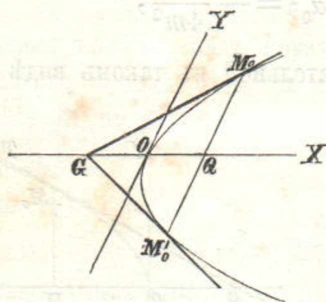
$$yy_0 = p(x + x_0)$$

и въ томъ случаѣ, когда парабола опредѣляемая уравненіемъ

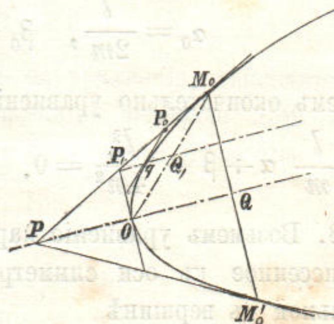
$$y^2 = 2px$$

отнесена къ одному изъ діаметровъ и къ соотвѣтственной касательной. Справедливость сказаннаго явствуетъ изъ того, что во всѣхъ нашихъ общихъ заключеніяхъ о касательныхъ параболы, приведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, мы оси координатъ можемъ считать совершенно произвольными.

Отсюда слѣдуетъ, что касательная пересѣкаетъ діаметръ, принятый за ось x-овъ въ точкѣ G, лежащей внѣ параболы (см. черт. 46)



Черт. 46.



Черт. 47.

и отстоящей отъ конца діаметра O на разстояніе равное абсциссѣ точки касанія. Отсюда мы выводимъ слѣдующее: такъ какъ концы хорды $M_0 QM'_0$, дѣлящейся пополамъ діаметромъ, принятымъ за ось x-овъ, имѣютъ абсциссу OQ, то касательныя, проведенныя къ параболѣ въ этихъ концахъ пересѣкаютъ діаметръ, принятый за ось x-овъ въ одной общей точкѣ G.

Изъ послѣдняго замѣчанія вытекаетъ какъ слѣдствіе простой способъ построенія по двумъ заданнымъ касательнымъ параболы любого числа другихъ касательныхъ. Пусть будутъ заданы двѣ касательныя параболы PM_0 и PM'_0, причемъ M_0 и M'_0 суть точки касанія (см. черт. 47). Соединяемъ точки M_0 и M'_0 прямою и дѣ-

лимъ отрѣзокъ $M_0 M'_0$ точкою Q пополамъ. Соединяемъ точку Q съ вершиною угла P, образуемаго касательными и дѣлимъ пополамъ точкою O отрѣзокъ PQ. Точка O лежитъ на параболѣ, причемъ касательная къ параболѣ въ этой точкѣ O будетъ прямая OP_1, параллельная прямой $M_0 M'_0$. Пусть касательная OP_1 пересѣкаетъ заданную касательную PM_0 въ точкѣ P_1, тогда можемъ повторить предыдущее построеніе уже относительно касательныхъ $P_1 M_0$ и $P_1 O$, причемъ точки касанія будутъ M_0 и O. Дѣлимъ отрѣзокъ $\overline{M_0 O}$ точкою Q_1 пополамъ. Соединяемъ точку Q_1 съ вершиною P_1, чрезъ средину q отрѣзка $P_1 Q_1$ проводимъ прямую qP_2 параллельно OM_0, получаемъ въ послѣдней прямой новую касательную къ параболѣ qP_2, причемъ точка касанія будетъ q. Подобнымъ построеніемъ можемъ получить сколько угодно новыхъ касательныхъ параболы. Замѣтимъ кстати, что прямыя PQ, $P_1 Q_1$, и т. д. должны быть параллельны между собою, ибо онѣ суть не что иное, какъ діаметры параболы.

Нормаль.

130. Прямая, проведенная черезъ точку на параболѣ перпендикулярно къ касательной этой точки, называется *нормалью.*

Возьмемъ уравненіе параболы въ простѣйшемъ видѣ

$$y^2 = 2px.$$

Обозначая координаты нѣкоторой точки M_0 параболы черезъ x_0, y_0, мы получимъ, какъ уже видѣли, уравненіе касательной въ этой точкѣ въ слѣдующемъ видѣ

$$yy_0 = p(x + x_0);$$

очевидно, что уравненіе перпендикуляра, проведеннаго къ этой касательной черезъ точку (x_0, y_0) будетъ имѣть видъ

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0). \qquad (*)$$

Это послѣднее уравненіе и есть уравненіе нормали.

Разстояніе между точкою N, въ которой нормаль (*) пересѣкаетъ ось x-овъ, и точкою P, въ которой ту-же ось пересѣкаетъ перпендикуляръ опущенный изъ точки M_0 на эту ось, называется *поднормалью* параболы.

Легко показать, что поднормаль параболы есть величина постоянная для всѣхъ точекъ параболы и равная p, параметру параболы.

Абсциса точки P есть не что иное, какъ x_0, абсцису же точки N назовемъ x_n и получимъ ее, подставляя въ уравненіе нормали (*) $y=0$, тогда будетъ:

$$y_0 = \frac{y_0}{p}(x_n - x_0),$$

величина искомой поднормали есть не что иное, какъ $x_n - x_0$, и, на основаніи предыдущаго уравненія, очевидно, равна p.

Задачи.

1. Какія геометрическія мѣста опредѣляютъ уравненія

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 9 = 0$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$$

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 20x - 30y + 21 = 0$$

$$2x - 8xy + 8y^2 - 7x + 1 = 0$$

Отв. Прямая, ничего, двѣ параллельныя прямыя, парабола.

2. Какія геометрическія мѣста опредѣляютъ при разныхъ знакахъ уравненія

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{2x}{a} \pm \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

3. Разсмотрѣть параболу

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x - 7y + 1 = 0.$$

Отв. Ось $x - 3y + \frac{23}{20} = 0$, координаты вершины $\left(-\frac{433}{400}, \frac{9}{400}\right)$, уравненіе параболы въ простѣйшемъ видѣ $y^2 = 2\,\frac{\sqrt{10}}{200}\,x$.

4. Разсмотрѣть параболу

$$y^2 - 2x + y - 1 = 0.$$

Отв. $\alpha = y$, $\beta = -2x + y - 1$, откуда діаметръ $y = \frac{l}{2m}$ соотвѣтствуетъ хордамъ $ly + m(-2x + y - 1) = 0$, или, что одно и то-же, хордамъ $-2mx + (l+m)\,y - m = 0$; для перпендукулярности необходимо положить $l + m = 0$ (оси координатъ мы предполагаемъ прямоугольными), откуда $m = -l$ и ось параболы будетъ $y = -\frac{1}{2}$ координаты вершины суть $\left(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right)$. Уравненіе параболы въ простѣйшемъ видѣ будетъ $y^2 = 2x$.

5. Разсмотрѣть параболу

$$3x^2 - 2x + 3y - 2 = 0.$$

Отв. Умножая на 3, мы получимъ $\alpha = 3x$, $\beta = -6x + 9y - 6$, хорды и діаметръ имѣютъ уравненіе $3x = \frac{l}{2m}$, $3lx + m(-6x + 9y - 6) = 0$, условіе перпендикулярности $l - 2m = 0$, откуда уравненіе оси $x = \frac{1}{3}$, координаты вершины $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right)$, уравненіе въ простѣйшемъ видѣ $y^2 = x$.

6. Разсмотрѣть уравненія параболъ

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 + 2x - y + 7 = 0$$

$$x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 - x = 0.$$

Отв. Уравненія въ простѣйшемъ видѣ будутъ

$$y^2 = \frac{8\sqrt{13}}{169}x, \quad y^2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}x.$$

7. Изъ начала координатъ провести касательныя ко всѣмъ параболамъ, упомянутымъ въ задачахъ 3, 4, 5, 6.

Отв. Поляры этихъ параболъ относительно начала суть

$$2x - 7y + 2 = 0,\ 2x - y + 2 = 0,\ 2x - 3y + 4 = 0,$$

$$2x - y + 14 = 0,\ x = 0.$$

8. Провести черезъ точку (1, 1) касательныя къ параболѣ

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0.$$

Отв. Поляра точки (1, 1) есть $2x + 7y - 1 = 0$.

9. Провести къ параболѣ $2x^2 - 6xy + \frac{9}{2}y^2 - 7x + y - \frac{1}{2} = 0$ касательныя параллельно прямой $2x - y = 0$.

Отв. $2x - y + \frac{41}{152} = 0$.

Изслѣдованіе уравненія (A) въ случаѣ $AC - B^2 \gtrless 0$.

131. Обращаемся теперь къ изученію вида и главнѣйшихъ свойствъ линій второго порядка второго рода, т. е., когда уравненіе (A) разложеніемъ на сумму квадратовъ можетъ быть приведено къ виду

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0, \qquad (C)$$

гдѣ

$$\alpha = Ax + By + D,\ \beta = Ly + M,\ P = LN - M^2,$$

а

$$L = AC - B^2,\ M = AE - BD,\ N = AF - D^2.$$

132. Остановимся сначала на случаѣ

$$L = AC - B^2 > 0,$$

тогда уравненіе можетъ быть приведено къ виду

$$\beta^2_1 + \beta^2 + P = 0,$$

гдѣ

$$\beta_1 = \alpha\sqrt{L}.$$

Этотъ случай разбивается, въ свою очередь, на три частныхъ.

a) Если $P > 0$, то уравненіе

$$\beta^2_1 + \beta^2 + P = 0$$

не можетъ быть удовлетворено никакими вещественными значеніями координатъ x и y, ибо первая часть уравненія $\beta^2_1 + \beta^2 + P$ не можетъ быть сдѣлана меньше P и, слѣдовательно, никакимъ образомъ не можетъ равняться нулю. Итакъ, въ случаѣ $P > 0$ заданное уравненіе не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста.

b) Случай $P = 0$ даетъ одну точку, лежащую на пересѣченіи двухъ прямыхъ $\beta_1 = 0$ и $\beta = 0$, ибо уравненіе $\beta^2_1 + \beta^2 = 0$ не можетъ иначе удовлетворяться, какъ если обѣ линейныя функціи β и β_1 заразъ обращаются въ нуль.

c) Обращаемся къ третьему наиболѣе интересному случаю $P < 0$. Въ этомъ случаѣ получается особая кривая линія, называемая *эллипсомъ*, къ изученію вида и свойствъ которой мы теперь и переходимъ

Примѣры.

a) $$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 2 = 0.$$

Послѣ разложенія на сумму квадратовъ получимъ

$$2(x + y + 1)^2 + (2y + 1)^2 + 1 = 0.$$

Уравненіе не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста.

b) $$x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0.$$

Послѣ разложенія на сумму квадратовъ получимъ $(x - 1)^2 + y^2 = 0$.

Уравненіе опредѣляетъ точку ($x = 1, y = 0$).

c) $$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y = 0.$$

Послѣ разложенія на сумму квадратовъ получимъ

$$2(x + y + 1)^2 + (2y + 1)^2 - 1 = 0.$$

Эллипсъ.

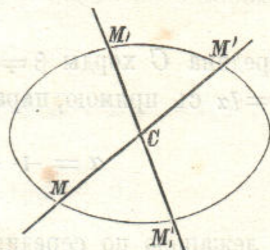
133. Итакъ, мы будемъ заниматься случаемъ, когда $L > 0$ и $P < 0$. Въ этомъ случаѣ можно будетъ положить $L = +\lambda^2$, а $P = -p^2$, такъ что уравненіе эллипса приметъ видъ

$$\lambda^2 \alpha^2 + \beta^2 = p^2 \qquad (C')$$

Центръ.

134. Разсмотримъ точку, лежащую на пересѣченіи двухъ прямыхъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Эта точка называется *центромъ* эллипса и имѣетъ то свойство, что точки кривой линіи относительно этого центра попарно симметричны. Другими словами, какъ бы мы ни провели черезъ этотъ центръ C хорду $\overline{MM'}$ (см. черт. 48), эта хорда MM' дѣлится центромъ пополамъ. То-же самое будетъ справедливо относительно всякой другой хорды $\overline{M_1M'_1}$, т. е. $\overline{M_1C} = \overline{M'_1C}$. Для того чтобы доказать предложенное свойство центра, проведемъ черезъ него нѣкоторую хорду. Уравненіе хорды, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, можетъ быть написано такъ:

$$\beta = l\alpha, \qquad (*)$$



Черт. 48.

гдѣ l — нѣкоторое произвольно заданное число. Мѣняя l, будемъ получать различныя хорды, проходящія черезъ центръ C. Координаты точки пересѣченія хорды (*) съ эллипсомъ (C') получатся черезъ рѣшеніе, относительно x и y, системы уравненій

$$\beta = l\alpha, \; \lambda^2\alpha^2 + \beta^2 = p^2.$$

Преобразуя послѣднюю систему, получимъ

$$\beta = l\alpha,\ \lambda^2\alpha^2 + l^2\alpha^2 = p^2,$$

или еще такъ

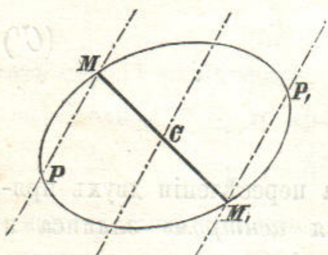
$$\beta = l\alpha,\ (\lambda^2 + l^2)\,\alpha^2 = p^2,$$

или, наконецъ,

$$\beta = l\alpha,\ \alpha = \pm \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}}.$$

Послѣдняя система разбивается на двѣ системы, изъ которыхъ первая

$$\beta = l\alpha,\ \alpha = + \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}}$$



Черт. 49.

опредѣляетъ одинъ конецъ хорды M, какъ пересѣченіе хорды $\beta = l\alpha$ съ прямою

$$\alpha = + \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}}$$ (см. черт. 49).

Другая система

$$\beta = l\alpha,\ \alpha = - \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}}$$

опредѣляетъ другой конецъ хорды M', какъ пересѣченіе прямой $\beta = l\alpha$ съ прямою

$$\alpha = - \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}}.$$

Средина C хорды $\beta = l\alpha$ будетъ опредѣляться пересѣченіемъ хорды $\beta = l\alpha$ съ прямою, параллельною двумъ слѣдующимъ

$$\alpha = + \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}},\ \alpha = - \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}} \qquad (**)$$

и лежащею по серединѣ между ними. Эта прямая, лежащая по серединѣ между прямыми (**) MP и M_1P_1, имѣетъ, очевидно, уравненіе $\alpha = 0$, а потому средина хорды MM' лежитъ во первыхъ, на самой хордѣ $\beta = l\alpha$, да еще, кромѣ того, на прямой $\alpha = 0$ и, слѣдовательно, эта середина хорды опредѣляется системою

$$\beta = l\alpha,\ \alpha = 0,$$

или, что одно и то-же, системою

$$\beta = 0,\ \alpha = 0.$$

Другими словами, центръ

$$(\beta = 0,\ \alpha = 0)$$

дѣлитъ пополамъ всякую хорду $\beta = l\alpha$, проведенную черезъ него.

135. Посмотримъ, во что обратится заданное уравненіе эллипса (A), если взята новая система координатъ, причемъ направленіе осей не мѣняется, начало же координатъ переносится въ центръ эллипса. Назовемъ координаты центра черезъ a и b. Эти координаты должны удовлетворять двумъ уравненіямъ

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,$$

т. е. должно быть

$$Aa + Bb + D = 0,\ Lb + M = 0,$$

откуда

$$b = -\frac{M}{L},\ a = \frac{BM - DL}{AL}$$

Формулы преобразованія будутъ

$$x = a + x',\quad y = b + y'.$$

Эти выраженія старыхъ координатъ черезъ новыя подставимъ въ уравненіе (C)

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0.$$

Посмотримъ, во что обратятся функціи α и β послѣ подстановки

$$x = a + x',\ y = b + y',$$

$$\alpha = A(a + x') + B(b + y') + D = Aa + Bb + D + Ax' + By',$$

отсюда видимъ, что

$$\alpha = Ax' + By',\ \text{ибо}\ Aa + Bb + D = 0.$$

Подобнымъ же образомъ

$$\beta = Ly + M = L(b + y') + M = Lb + M + Ly' = Ly',$$

отсюда уравненіе (C) принимаетъ видъ

$$L(Ax' + By')^2 + L^2y'^2 + P = 0 \qquad (C')$$

Для насъ гораздо важнѣе указать, во что обратится не первая часть уравненія (C) послѣ подстановки, а первая часть заданнаго уравненія (A). Для этой цѣли мы замѣчаемъ, что первая часть уравненія (C) отличается отъ таковой уравненія (A) только множителемъ AL, ибо во время разложенія первой части на сумму квадратовъ мы для удобства умножили обѣ части уравненія сначала на A, а потомъ на L, поэтому, когда мы желаемъ отъ разсмотрѣнія уравненія (C) перейти къ уравненію (A), необходимо раздѣлить уравненіе на AL. Раздѣляя уравненіе (C') на AL, получимъ то уравненіе, въ которое обратится заданное уравненіе эллипса отъ перенесенія начала координатъ въ центръ. Это искомое уравненіе будетъ

$$\frac{(Ax'+By')^2}{A}+\frac{Ly'^2}{A}+\frac{P}{A.L}=0,$$

$$\frac{A^2x'^2+2ABx'y'+B^2y'^2}{A}+\frac{(AC-B^2)y'^2}{A}+\frac{P}{AL}=0,$$

откуда окончательно

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+\frac{P}{AL}=0 \qquad (A')$$

Итакъ, мы видимъ, что отъ перенесенія новаго начала координатъ въ центръ эллипса три коэффиціента A, B, C при членахъ второго измѣренія не мѣняются, коэффиціенты D и E пропадаютъ, а новый постоянный членъ, вмѣсто стараго F, обращается въ $\frac{P}{AL}$.

136. На основаніи параграфа 92 мы замѣчаемъ, что число $\frac{P}{AL}$ есть не что иное, какъ результатъ подстановки координатъ центра въ первую часть уравненія.

Примѣръ.

$$3x^2-4xy+2y^2-x-1=0;$$

$A=3$; умножаемъ уравненіе на 3:

$$(3x)^2-2(3x)\left\{2y+\frac{1}{2}\right\}+6y^2-3=0;$$

выдѣляя первый квадратъ, получимъ

$$\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)^2+2y^2-2y-\frac{13}{4}=0.$$

$L=2$; умножаемъ уравненіе на 2, получимъ

$$2\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)^2+(2y-1)^2-\frac{15}{2}=0,$$

отсюда видимъ, что

$$P=-\frac{15}{2}.$$

Центръ опредѣлится двумя уравненіями

$$3x-2y-\frac{1}{2}=0,\quad 2y-1=0;$$

откуда видимъ, что координаты центра будутъ

$$x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{2}.$$

Перенося начало координатъ въ центръ, получимъ уравненіе

$$3x'^2-4x'y'+2y'^2-\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{3.2}=0,$$

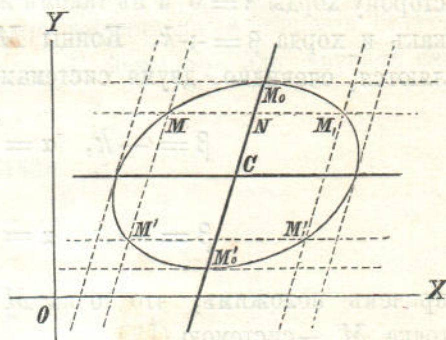
или

$$3x'^2-4x'y'+2y'^2-\frac{5}{4}=0.$$

Діаметры эллипса.

137. Разсмотримъ сначала хорды, параллельныя направленію $\beta=0$. Общее уравненіе этихъ хордъ есть $\beta=k$. Всѣ хорды $\beta=k$ параллельны оси OX, ибо $\beta=Ly+M$; такъ что уравненіе $\beta=k$ обращается въ слѣдующее

$$y=\frac{k-M}{L}.$$



Черт. 50.

Точки M и M_1 (см. черт. 50), въ которыхъ хорда $\beta=k$ пересѣкаетъ заданный эллипсъ, получатся изъ системы уравненій

$$\{\beta=k,\ \lambda^2\alpha^2+\beta^2=p^2\}.$$

Эта система равносильна слѣдующей $\beta=k,\ \alpha^2=\dfrac{p^2-k^2}{\lambda^2}$

и распадается на двѣ слѣдующихъ

$$\text{(I)}\ \beta=k,\ \alpha=+\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda},\ \text{(II)}\ \beta=k,\ \alpha=-\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda}$$

изъ которыхъ первая (I) опредѣляетъ конецъ хорды M, а вторая (II) другой конецъ M_1. Точки пересѣченія M и M_1 существуютъ только тогда, когда $k^2 < p^2$, другими словами, когда абсолютная величина $k < p$.

Давая коэффиціенту k значенія $+p$ и $-p$, получимъ двѣ прямыя

$$\beta=+p \text{ и } \quad =-p,$$

между которыми заключается эллипсъ.

Средина N хордъ $\overline{MM}_1$ можетъ быть опредѣлена изъ пересѣченія хорды $\overline{MM'}$, имѣющей уравненіе $\beta=k$, съ прямою $\alpha=0$, лежащей по срединѣ между двумя прямыми

$$\alpha=+\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda},\ \alpha=-\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda},$$

опредѣляющими точки M и M_1. Итакъ, мы видимъ, что средина любой хорды $\beta=k$, параллельной хордѣ $\beta=0$, лежитъ на прямой $\alpha=0$, которая называется *діаметромъ* эллипса.

138. Разсмотримъ теперь хорду $\beta=-k$, лежащую по другую сторону хорды $\beta=0$ и въ такомъ же разстояніи отъ послѣдней хорды, какъ и хорда $\beta=+k$. Концы M' и M'_1 хорды $\beta=-k$ опредѣляются, очевидно, двумя системами

$$\beta=-k,\ \ \alpha=+\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda}, \qquad \text{(III)}$$

$$\beta=-k,\ \ \alpha=-\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda}, \qquad \text{(IV)}$$

причемъ положимъ, что точка M' опредѣляется системою (III), а точка M'_1—системою (IV).

Сравненіе послѣднихъ двухъ системъ (III) и (IV) съ системою (I) и (II) показываетъ, что точки M и M' лежатъ на прямой

$$\alpha=+\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda},$$

и точки M_1 и M'_1 —на прямой

$$\alpha = -\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda}.$$

Итакъ, если теперь мы разсмотримъ хорду

$$\alpha = +\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda},$$

имѣющую концами точки M и M', то мы замѣтимъ, что концы эти опредѣляются пересѣченіемъ съ указанной хордой двухъ прямыхъ

$$\beta = +k, \ \beta = -k,$$

отсюда уже легко замѣтить, что середина N_1 указанной хорды $\overline{MM'}$ лежитъ на прямой $\beta = 0$.

Прямая $\beta = 0$ есть діаметръ, дѣлящій хорды, параллельныя прямой $\alpha = 0$, пополамъ.

Для того чтобы прямая $\alpha = l$, параллельная прямой $\alpha = 0$, пересѣкала эллипсъ, необходимо, чтобы система уравненій

$$\alpha = l, \ \lambda^2\alpha^2 + \beta^2 = p^2$$

допускала вещественныя рѣшенія относительно α и β. Преобразовывая систему, получимъ

$$\alpha = l, \ \beta^2 = p^2 - \lambda^2 l^2, \ \text{или} \ \alpha = l, \ \beta = \pm\sqrt{p^2-\lambda^2 l^2}.$$

Послѣдняя система показываетъ, что вещественныя рѣшенія будутъ, когда λl будетъ, по численной величинѣ, меньше p, или, другими словами, когда численная величина $l < \frac{p}{\lambda}$.

Разсматривая предѣльный случай

$$l = \pm\frac{p}{\lambda},$$

получимъ систему

$$\alpha = \pm\frac{p}{\lambda}, \ \beta = 0,$$

опредѣляющую двѣ крайнія точки діаметра $\beta = 0$. Если въ этихъ точкахъ проведемъ прямыя

$$\alpha = +\frac{p}{\lambda}, \ \alpha = -\frac{p}{\lambda},$$

параллельныя діаметру $\alpha = 0$, то эти прямыя будутъ касаться къ эллипсу въ концахъ діаметра $\beta = 0$ и весь эллипсъ будетъ заключаться между ними. Сопоставляя полученное теперь со сказаннымъ раньше, получимъ, что эллипсъ есть конечныхъ размѣровъ сомкнутая кривая, заключающаяся въ параллелограммѣ образуемомъ четырьмя прямыми:

$$\beta = +p, \quad \beta = -p,$$

$$\alpha = +\frac{p}{\lambda}, \quad \alpha = -\frac{p}{\lambda},$$

изъ которыхъ двѣ первыя параллельны оси x-овъ.

139. Итакъ, изъ всего приведеннаго относительно двухъ діаметровъ эллипса $\alpha = 0$, $\beta = 0$ мы можемъ сказать, что діаметръ $\alpha = 0$ дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, параллельныя другому діаметру $\beta = 0$, и, наоборотъ, діаметръ $\beta = 0$ дѣлитъ всѣ хорды, параллельныя діаметру $\alpha = 0$. Два діаметра, обладающіе указаннымъ свойствомъ, называются *сопряженными* діаметрами эллипса. Кромѣ того мы видимъ, что оба діаметра $\alpha = 0$, $\beta = 0$ проходятъ черезъ центръ, ибо центръ есть точка пересѣченія этихъ двухъ діаметровъ.

140. Покажемъ же теперь, что вообще параллельныя хорды любого направленія дѣлятся пополамъ нѣкоторою прямою, проходящею черезъ центръ и называемою діаметромъ. Возьмемъ хорды нѣкотораго направленія

$$l\alpha + m\beta + n = 0.$$

Если, задавъ коэффиціентамъ l и m нѣкоторыя значенія, будемъ мѣнять коэффиціентъ n, то будемъ получать рядъ параллельныхъ хордъ. Выбирая нѣкоторое значеніе n, получимъ нѣкоторую хорду $\overline{MM'}$ изъ числа этихъ параллельныхъ хордъ. Координаты концовъ хорды $\overline{MM'}$ опредѣлятся черезъ рѣшеніе относительно x и y системы уравненій

$$\left.\begin{array}{l} l\alpha + m\beta + n = 0 \\ \lambda^2\alpha^2 + \beta^2 = p \end{array}\right\}.$$

Эта система можетъ быть преобразована слѣдующимъ образомъ: первое уравненіе оставимъ безъ перемѣны, изъ второго же исключимъ функцію β при помощи уравненія перваго:

$$\left.\begin{array}{l} l\alpha + m\beta + n = 0 \\ \lambda^2\alpha^2 + \left(\dfrac{l}{m}\alpha + \dfrac{n}{m}\right)^2 = p^2 \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Второе уравненіе изъ числа послѣднихъ можно преобразовать такъ:

$$\alpha^2\left(\lambda^2+\frac{l^2}{m^2}\right)+2\;\frac{ln}{m^2}\,\alpha+\frac{n^2}{m^2}=p^2,$$

умножая на m^2, получимъ

$$\alpha^2\,(m^2\lambda^2+l^2)+2ln\alpha=p^2m^2-n^2.$$

Черезъ рѣшеніе послѣдняго уравненія относительно α получимъ

$$\alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}\pm R_n,\quad \text{гдѣ}\quad R_n=\frac{m\sqrt{(p^2m^2-n^2)\lambda^2+p^2l^2}}{m^2\lambda^2+l^2},$$

причемъ R_n есть нѣкоторая функція отъ n.

Итакъ, мы видимъ, что предложенная система (*) распадается на двѣ слѣдующихъ:

$$l\alpha+m\beta+n=0,\quad \alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}+R_n \qquad \text{(I)}$$

$$l\alpha+m\beta+n=0,\quad \alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}-R_n; \qquad \text{(II)}$$

изъ которыхъ первая (I) опредѣляетъ одинъ конецъ хорды M, какъ пересѣченіе этой хорды

$$l\alpha+m\beta+n=0$$

съ прямою

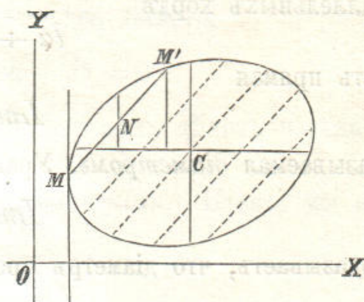
$$\alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}+R_n,$$

а система (II)—другой конецъ хорды M', какъ пересѣченіе хорды

$$l\alpha+m\beta+n=0$$

съ прямою

$$\alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}-R_n \text{(см. чер. 51).}$$



Черт. 51.

Средина N хорды $\overline{MM'}$ можетъ быть опредѣлена, какъ пересѣченіе прямой

$$l\alpha+m\beta+n=0$$

съ прямою

$$\alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}.$$

141. Опредѣлимъ теперь геометрическое мѣсто срединъ хордъ, параллельныхъ хордѣ $\overline{MM'}$. Для этой цѣли придется исключить n изъ двухъ уравненій:

$$l\alpha + m\beta + n = 0 \text{ и } \alpha = -\frac{ln}{m^2\lambda^2 + l^2}.$$

Изъ перваго уравненія получимъ

$$n = -l\alpha - m\beta$$

и подставимъ это выраженіе коэффиціента n во второе уравненіе, тогда получимъ

$$\alpha = -\frac{l(-l\alpha - m\beta)}{m^2\lambda^2 + l^2},$$

откуда

$$(m^2\lambda^2 + l^2)\alpha = l^2\alpha + lm\beta,$$

или окончательно

$$m\lambda^2\alpha = l\beta.$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ

$$Lm\alpha - l\beta = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что геометрическое мѣсто срединъ хордъ, параллельныхъ хордѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

есть прямая

$$Lm\alpha - l\beta = 0,$$

называемая *діаметромъ*. Уравненіе

$$Lm\alpha - l\beta = 0$$

показываетъ, что діаметръ проходитъ черезъ центръ.

Сопряженные діаметры.

142. Разсмотримъ хорды, параллельныя нѣкоторому направленію

$$l\alpha + m\beta + n = 0. \qquad (1)$$

Эти хорды дѣлятся пополамъ діаметромъ

$$Lm\alpha - l\beta = ,0$$

(*)

Разсмотримъ теперь хорды

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1 = 0, \qquad (2)$$

параллельныя діаметру (*), гдѣ можно принять

$$l_1 = Lm, \quad m_1 = -l.$$

Уравненіе діаметра, дѣлящаго хорды (2) пополамъ будетъ

$$Lm_1\alpha - l_1\beta = 0. \qquad (**)$$

Подставляя сюда вмѣсто m_1 и l_1, ихъ выраженія черезъ l и m, получимъ

$$L(-l)\alpha - (Lm)\beta = 0$$

$$-L(l\alpha + m\beta) = 0,$$

откуда видимъ, что уравненіе діаметра, дѣлящаго хорды (2) пополамъ, будетъ окончательно

$$l\alpha + m\beta = 0. \qquad (***)$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что діаметръ (***) параллеленъ первоначальнымъ хордамъ

$$l\alpha + m\beta + n = 0.$$

Изъ всего сказаннаго мы заключаемъ, что два діаметра

$$l\alpha + m\beta = 0 \text{ и } Lm\alpha - l\beta = 0$$

обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что каждый изъ нихъ дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому.

Такіе два діаметра называются *сопряженными*. Итакъ, мы видимъ, что для каждаго діаметра

$$l\alpha + m\beta = 0$$

существуетъ ему сопряженный:

$$Lm\alpha - l\beta = 0.$$

Оси эллипса.

143. Во всякомъ эллипсѣ существуютъ два взаимно перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметра, называемые *осями* эллипса.

Для нахожденія осей необходимо выразить условіе перпендику-

лярности двухъ сопряженныхъ діаметровъ

$$\left.\begin{aligned} l\alpha + m\beta = 0 \\ Lm\alpha - l\beta = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Раскрывая функціи α и β, получимъ

$$\left.\begin{aligned} l(Ax + By + D) + m(Ly + M) = 0 \\ Lm(Ax + By + D) - l(Ly + M) = 0 \end{aligned}\right\},$$

или еще такъ

$$\left.\begin{aligned} lAx + (lB + mL)y + lD + mM = 0 \\ LmAx + (LmB - lL)y + LmD - lM = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Условіе перпендикулярности напишется въ такомъ видѣ

$$(lA)(LmA) + (lB + mL)(LmB - lL) = 0,$$

откуда

$$lm\{A^2 + B^2 - L\} + m^2 LB - Bl^2 = 0.$$

Обозначая

$$\frac{l}{m} = u,$$

получимъ слѣдующее квадратное уравненіе для опредѣленія u, соотвѣтствующаго направленію оси

$$u^2 + u\,\frac{L - A^2 - B^2}{B} - L = 0. \qquad (*)$$

144. Это уравненіе даетъ два корня $u = u_0$, $u = u_1$ и, слѣдовательно, эллипсъ имѣетъ двѣ взаимно-перпендикулярныя оси

$$\left.\begin{aligned} u_0\alpha + \beta = 0 \\ L\alpha - u_0\beta = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (**)$$

Другой корень не даетъ новыхъ осей, ибо уравненіе (*) показываетъ, что $u_0 u_1 = -L$, такъ что уравненія

$$u_1\alpha + \beta = 0$$
$$L\alpha - u_1\beta = 0,$$

послѣ замѣны u_1 на $-\frac{L}{u_0}$, обращаются въ уравненія (**).

145. Уравненіе (*) не даетъ опредѣленнаго значенія для u, когда

дробь

$$\frac{L - A^2 - B^2}{B}$$

будетъ имѣть видъ $\frac{0}{0}$, т. е. когда будетъ

$$\left.\begin{array}{c} B = 0 \\ L - A^2 - B^2 = 0 \end{array}\right\},$$

другими словами, когда

$$B = 0,\ L = A^2,\ \text{или}\ B = 0,\ AC - B^2 = A^2,$$

$$\text{или}\ B = 0,\ A = C.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (A) опредѣляетъ нѣкоторый кругъ, ибо оно имѣетъ видъ

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

и по раздѣленіи на A, можетъ быть приведено къ слѣдующему виду

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2}{A^2} - \frac{F}{A}.$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ кругъ, имѣющій центръ въ точкѣ

$$\left(-\frac{D}{A},\ -\frac{E}{A}\right)$$

и радіусъ

$$\sqrt{\frac{D^2 + E^2}{A^2} - \frac{F}{A}}.$$

Итакъ, мы видимъ, что кругъ есть частный случай эллипса и имѣетъ безчисленное множество взаимно-перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметровъ.

Примѣръ.

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 - x - 1 = 0.$$

Послѣ разложенія на сумму квадратовъ будетъ

$$2\left(3x - 2y - \frac{1}{2}\right)^2 + (2y - 1)^2 - \frac{15}{2} = 0.$$

Возьмемъ уравненія двухъ сопряженныхъ діаметровъ:

$$\left.\begin{aligned} l\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)+m(2y-1)=0 \\ 2m\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)-l(2y-1)=0 \end{aligned}\right\} \text{(ибо } L=2)$$

Эта система можетъ быть написана такъ:

$$3lx+2(m-l)y-\frac{1}{2}l-m=0$$

$$6mx-2(2m+l)y-m+l=0.$$

Условіе перпендикулярности будетъ:

$$(3l).(6m)+2(m-l).2(-2m-l)=0,$$

или

$$4l^2+22lm-8m^2=0.$$

Раздѣляя на $4m^2$, получимъ:

$$\left(\frac{l}{m}\right)^2+\frac{11}{2}\cdot\frac{l}{m}-2=0,$$

откуда, полагая $u=\frac{l}{m}$, получимъ

$$u_0=\frac{-11+3\sqrt{17}}{4}$$

$$u_1=\frac{-11-3\sqrt{17}}{4}$$

Уравненія двухъ осей эллипса будутъ

$$(3\sqrt{17}-11)\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)+4(2y-1)=0$$

$$(-3\sqrt{17}-11)\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)+4(2y-1)=0.$$

Уравненіе эллипса, отнесенное къ осямъ.

146. Если мы возьмемъ за новое начало координатъ центръ эллипса и расположимъ новую ось x-овъ по одной изъ осей эллипса, новую же ось y-овъ по другой оси, тогда мы замѣтимъ, что для каждаго значенія новой абсциссы OP будутъ соотвѣтствовать двѣ ординаты PM и PM', равныя по численной величинѣ, но съ обратными знаками; точно также каждой ординатѣ OQ будутъ соотвѣтствовать

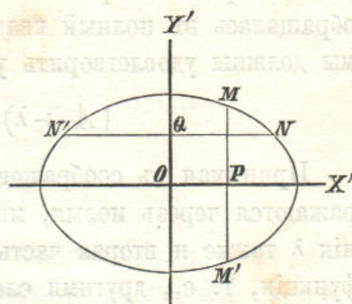
двѣ абсциссы QN и QN', равныя по численной величинѣ и съ обратными знаками (см. черт. 52).

Отсюда мы заключаемъ, что преобразованное къ новымъ осямъ уравненіе не должно заключать членовъ съ первыми степенями x и y, а также члена съ произведеніемъ координатъ xy, другими словами уравненіе должно имѣть видъ

$$A_1 x_1^2 + C_1 y_1^2 + F_1 = 0$$

147. Мы видѣли уже, что перенесеніе начала координатъ въ центръ уничтожаетъ члены съ первыми степенями координатъ, такъ что уравненіе эллипса (A) обращается въ слѣдующее

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + \frac{P}{LA} = 0$$



Черт. 52.

148. Теперь остается повернуть оси координатъ вокругъ начала на такой уголъ, чтобы эти оси совпали съ осями эллипса. Послѣ этого новаго преобразованія координатъ коэффиціентъ при произведеніи координатъ долженъ пропасть. Наоборотъ, мы можемъ поставить себѣ вопросъ, на какой уголъ надо повернуть оси координатъ, чтобы пропалъ изъ уравненія членъ съ произведеніемъ координатъ.

Пусть оси координатъ повернуты на нѣкоторый уголъ, такъ что выраженіе

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2$$

преобразовывается въ подобное-же, но только, очевидно, съ другими коэффиціентами

$$A_1 x_1^2 + 2B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1^2,$$

такъ что

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = A_1 x_1^2 + 2B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1^2 \quad (*)$$

Кромѣ того мы знаемъ, что разстояніе отъ точки до начала координатъ выражается одинаково, какъ въ старыхъ, такъ и въ новыхъ координатахъ

$$x'^2 + y'^2 = x_1^2 + y_1^2 \quad (**)$$

Умножаемъ теперь уравненіе (**) на нѣкоторый пока произволь-

ный множитель λ и сложимъ съ уравненіемъ (*), тогда мы получимъ

$$(A+\lambda)\,x'^2+2Bx'y'+(C+\lambda)\,y'^2=$$
$$=(A_1+\lambda)\,x_1^{\,2}+2B_1x_1y_1+(C_1+\lambda)\,y_1^{\,2} \qquad (***)$$

Подберемъ теперь λ такъ, чтобы первая часть уравненія (***) обращалась въ полный квадратъ линейной функціи. Для этой цѣли мы должны удовлетворить уравненію

$$(A+\lambda)\,(C+\lambda)-B^2=0. \qquad (1)$$

Принимая въ соображеніе, что старыя координаты линейно выражаются черезъ новыя, мы заключаемъ, что для выбраннаго значенія λ также и вторая часть дѣлается полнымъ квадратомъ линейной функціи, т. е., другими словами, удовлетворяется уравненіе

$$(A_1+\lambda)\,(C_1+\lambda)-B_1^{\,2}=0 \qquad (2)$$

Уравненія (1) и (2), которыя еще можно написать такъ

$$\left.\begin{aligned}\lambda^2+(A+C)\,\lambda+AC-B^2=0\\ \lambda^2+(A_1+C_1)\lambda+A_1C_1-B_1^{\,2}=0\end{aligned}\right\},$$

должны удовлетворяться при однихъ и тѣхъ-же значеніяхъ λ, слѣдовательно, должны существовать равенства

$$A+C=A_1+C_1$$
$$AC-B^2=A_1C_1-B_1^{\,2}.$$

Итакъ, мы видимъ, что формулы $A+C$ и $AC-B^2$ не мѣняютъ своей величины при преобразованіи координатъ и называются поэтому *инваріантами* преобразованія координатъ.

149. При помощи инваріантовъ легко опредѣлить коэффиціенты въ уравненіи эллипса—отнесенномъ къ осямъ. Это уравненіе будетъ имѣть видъ

$$A_1x^2+C_1y^2+\frac{P}{AL}=0,$$

гдѣ коэффиціенты A_1 и C_1 опредѣляются изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}A_1+C_1=A+C\\ A_1C_1=AC-B^2\end{aligned}\right\}.$$

Второе изъ уравненій этихъ есть не что иное какъ уравненіе $A_1 C_1 - B_1{}^2 = AC - B^2$, въ которомъ принято во вниманіе, что $B_1 = 0$. Итакъ, мы видимъ, что коэффиціенты A_1 и C_1 опредѣляются какъ корни квадратнаго уравненія

$$\xi^2 - (A + C)\,\xi + AC - B^2 = 0.$$

Корни этого уравненія суть

$$\xi = \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\frac{(A+C)^2}{4} - AC + B^2} =$$

$$= \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\frac{(A+C)^2}{4} - L}.$$

Легко замѣтить, что корни одного и того-же знака, ибо $L > 0$, такъ что $\sqrt{\frac{(A+C)^2}{4} - L}$ по абсолютной величинѣ меньше абсолютной величины $\frac{A+C}{2}$. Кромѣ того, эти оба корня вещественны, ибо

$$\sqrt{\frac{(A+C)^2}{4} - AC + B^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2},$$

причемъ подкоренная величина, состоящая изъ двухъ квадратовъ, положительна.

150. Обозначимъ корни черезъ ξ_0 и ξ_1. Тогда вмѣсто одного коэффиціента, напр. A_1 придется взять одинъ изъ корней, а вмѣсто другого—другой.

Можно сдѣлать два выбора: или $A_1 = \xi_0$, $C_1 = \xi_1$, или же $A_1 = \xi_1$, $C_1 = \xi_0$; первый выборъ будетъ соотвѣтствовать принятію за ось x-овъ одной изъ осей симметріи эллипса, а другой выборъ принятію другой оси.

151. Итакъ, послѣ преобразованія уравненія эллипса къ осямъ, уравненіе это принимаетъ видъ

$$A_1 x^2 + C_1 y^2 + \frac{P}{AL} = 0.$$

Переносимъ членъ $\frac{P}{AL}$ во вторую часть уравненія и дѣлимъ обѣ

части на $\dfrac{-P}{AL}$, тогда получимъ уравненіе

$$\frac{x^2}{\dfrac{-P}{A_1\,AL}}+\frac{y^2}{\dfrac{-P}{AC_1L}}=1.$$

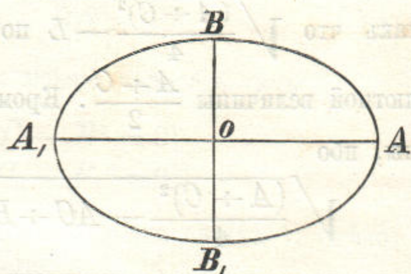
Принимая во вниманіе, что $P<0$, мы можемъ обозначить $\dfrac{-P}{A_1\,AL}=a^2$, $\dfrac{-P}{AC_1L}=b^2$,

откуда получимъ

$$a=\sqrt{\frac{-P}{A_1\,AL}},\ b=\sqrt{\frac{-P}{AC_1\,L}}\,. \qquad (*)$$

Уравненіе эллипса принимаетъ окончательно слѣдующій простой видъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Черт. 53.

Полагая въ послѣднемъ уравненіи $y=0$, получимъ $x^2=a^2$, $x=\pm a$, откуда замѣчаемъ, что a есть длина полуоси $\overline{OA}$ (см. черт. 53); точно также замѣчаемъ, полагая $x=0$, что $y=\pm b$ и что b есть не что иное какъ другая полуось $\overline{OB}$. Обыкновенно корни квадратнаго уравненія выбираютъ такъ, чтобы полуось a была больше полуоси b, другими словами, принимаютъ за новую ось x-овъ большую полуось эллипса. Для этой цѣли, какъ показываютъ выраженія (*), нужно взять за A_1 меньшій, а за C_1 большій по абсолютной величинѣ изъ корней ξ_0, ξ_1.

Примѣръ. Возьмемъ уравненіе

$$3x'^2-4x'\,y'+2y'^2-\frac{5}{4}=0,$$

отнесенное уже къ центру.

Остается взять оси эллипса за новыя координатныя оси.

$$A+C=3+2=5,\ AC-B^2=2.3-2^2=2,$$

откуда

$$A_1+C_1=5$$
$$A_1\,C_1=2$$

Уравненіе для опредѣленія A_1 и C_1 будетъ

$$\xi^2 - 5\xi + 2 = 0,$$

его корни

$$\xi_0 = \frac{5+\sqrt{17}}{2},\ \xi_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}.$$

Если возьмемъ за ось x-овъ большую полуось эллипса, тогда получимъ уравненіе:

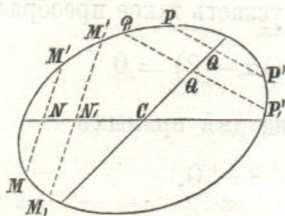
$$\frac{5-\sqrt{17}}{2}x^2 + \frac{5+\sqrt{17}}{2}y^2 = \frac{5}{4},$$

отсюда

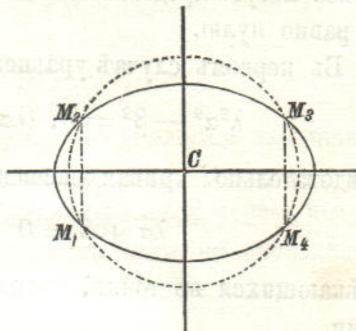
$$a^2 = \frac{5}{2(5-\sqrt{17})},\ b^2 = \frac{5}{2(5+\sqrt{17})}.$$

152. На основаніи изложеннаго легко указать, какъ по заданному очертанію эллипса построить центръ и его оси.

Проводимъ въ эллипсѣ произвольную хорду $\overline{MM'}$ и дѣлимъ ее въ точкѣ N пополамъ; проводимъ другую хорду (см. черт. 54) $\overline{M_1M_1'}$, параллельную хордѣ $\overline{MM'}$, дѣлимъ новую хорду точкою N_1 пополамъ. Проводимъ черезъ точки N и N_1 прямую, которая, очевидно,



Черт. 54.



Черт. 55.

будетъ однимъ изъ діаметровъ эллипса. Беремъ новую пару взаимно параллельныхъ хордъ $\overline{PP'}$ и $\overline{P_1P_1'}$, дѣлимъ эти хорды точками Q и Q_1 пополамъ; черезъ двѣ точки Q и Q_1 проводимъ прямую, которая будетъ новымъ діаметромъ эллипса.

Оба указанные діаметра пересѣкутся между собою въ искомомъ центрѣ C.

Когда центръ C найденъ, оси построятся слѣдующимъ образомъ.

Изъ центра эллипса, какъ центра, радіусомъ большимъ меньшей полуоси и меньшимъ большой описываемъ кругъ, который пересѣ-

четъ эллипсъ въ четырехъ точкахъ M_1, M_2, M_3, M_4 (см. черт. 55). Соединяя попарно точки M_1 и M_2, M_3 и M_4, получимъ двѣ хорды $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_3M_4}$ параллельныя между собою, параллельно которымъ проходитъ черезъ центръ одна изъ осей эллипса, другая-же ось будетъ перпендикулярна къ двумъ указаннымъ хордамъ.

Изслѣдованіе уравненія (А) въ случаѣ, когда $AC - B^2 < 0$.

153. Разсмотримъ тотъ случай въ изслѣдованіи кривыхъ второго порядка, когда, по разложеніи общаго уравненія на сумму квадратовъ, мы приведемъ его къ виду

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (C),$$

причемъ

$$L = AC - B^2 < 0.$$

Положивъ $L = -\lambda^2$, приведемъ уравненіе (C) къ виду

$$\lambda^2\alpha^2 - \beta^2 = P.$$

Здѣсь могутъ представиться два случая: a) когда $P = 0$ и b) когда P не равно нулю.

a) Въ первомъ случаѣ уравненіе допускаетъ такое преобразованіе:

$$\lambda^2\alpha^2 - \beta^2 = 0,\ (\lambda\alpha + \beta)(\lambda\alpha - \beta) = 0$$

и, слѣдовательно, кривая распадается на двѣ прямыхъ

$$\lambda\alpha + \beta = 0 \text{ и } \lambda\alpha - \beta = 0,$$

пересѣкающихся въ точкѣ, координаты которой опредѣляются уравненіями

$$\alpha = 0 \text{ и } \beta = 0$$

b) Въ случаѣ-же P не $= 0$, уравненіе опредѣляетъ особую кривую, называемую *гиперболой*.

Примѣры.

a) $$2x^2 + 4xy - 2y^2 + 4x + 1 = 0.$$

Разлагаемъ на сумму квадратовъ:

$$2(x + y + 1)^2 - (2y + 1)^2 = 0,$$

отсюда

$$\sqrt{2}(x + y + 1) + (2y + 1) = 0$$
$$\sqrt{2}(x + y + 1) - (2y + 1) = 0$$

Это уравненія двухъ прямыхъ; координаты точки ихъ пересѣченія опредѣлятся изъ уравненій

$$x+y+1=0 \text{ и } 2y+1=0,$$

откуда

$$x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}.$$

b) $x^2+2xy-y^2+2x=0,\quad 2(x+y+1)^2-(2y+1)^2-1=0$... Это гипербола.

Гипербола.

154. Общее уравненіе (A) кривыхъ второго порядка опредѣляетъ гиперболу въ томъ случаѣ, когда оно можетъ быть приведено къ виду

$$\lambda^2\alpha^2-\beta^2=P.$$

Здѣсь можно различать два случая: когда $P>0$ и когда $P<0$. Разсмотримъ сначала первый случай. Положивъ тогда $P=+p^2$, получимъ уравненіе гиперболы въ такомъ видѣ

$$\lambda^2\alpha^2-\beta^2=p^2.$$

Центръ.

155. Точка C, координаты которой опредѣляются изъ уравненій $\alpha=0$ и $\beta=0$, будетъ центромъ гиперболы, т. е. такою точкою, въ которой будутъ дѣлиться пополамъ всѣ проходящія через нее хорды гиперболы, по какому бы направленію мы ихъ не проводили. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе всякой хорды, проходящей черезъ C, будетъ

$$\beta=l\alpha\ \ldots\ldots\ldots\ (*).$$

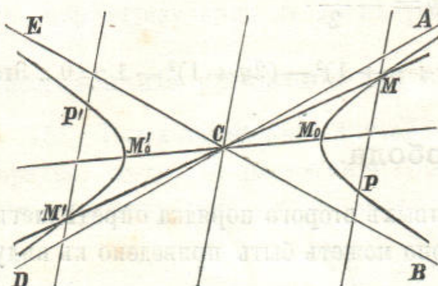
Найдемъ координаты концовъ этой хорды. Для этого нужно рѣшить уравненіе этой хорды совмѣстно съ уравненіемъ гиперболы

$$\beta=l\alpha,\ \lambda^2\alpha^2-\beta^2=p^2.$$

Эта система равносильна системѣ двухъ слѣдующихъ

$$(1)\ldots\begin{cases}\beta=l\alpha\\ \alpha=+\dfrac{p}{\sqrt{\lambda^2-l^2}}\end{cases}\qquad(2)\ldots\begin{cases}\beta=l\alpha\\ \alpha=-\dfrac{p}{\sqrt{\lambda^2-l^2}}.\end{cases}$$

Первая изъ этихъ системъ даетъ координаты одного конца M, а другая—другого M' хорды (см. черт. 56). Не рѣшая этихъ уравненій, замѣтимъ, что обѣ точки M и M' лежатъ на прямой $\beta = l\alpha$, при пересѣченіи ея съ параллельными прямыми MP и $M'P'$, имѣющими уравненія



Черт. 56.

$$\alpha = +\frac{p}{\sqrt{\lambda^2 - l^2}} \text{ и}$$

$$\alpha = -\frac{p}{\sqrt{\lambda^2 - l^2}},$$

слѣдовательно, если пересѣчемъ хорду $\beta = l\alpha$ третьею прямою $\alpha = 0$, параллельною первымъ двумъ и проходящею по срединѣ между ними, то получимъ координаты средины хорды MM'. Но точка опредѣляемая уравненіями $\alpha = 0$ и $\beta = l\alpha$ или $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ и есть точка C.

Слѣдовательно, точка C служитъ срединою всѣхъ хордъ гиперболы, проходящихъ черезъ нее

Ассимптоты.

156. Системы уравненія (1) и (2) показываютъ, что прямая $\beta = l\alpha$, проходящая черезъ C, пересѣкаетъ гиперболу только тогда, когда $l < \lambda$, ибо при $l > \lambda$, выраженіе $\sqrt{\lambda^2 - l^2}$ обращается въ мнимое, что въ геометрическомъ анализѣ говоритъ о невозможности вопроса. Иными словами, если черезъ центръ проведемъ двѣ прямыя CA и CB, уравненія которыхъ $\beta = \lambda\alpha$ и $\beta = -\lambda\alpha$, то всѣ точки гиперболы будутъ расположены внутри двухъ вертикальныхъ угловъ ACB и DCE, образуемыхъ этими прямыми. Въ самомъ дѣлѣ, будемъ пересѣкать гиперболу прямыми, проходящими черезъ центръ. Уравненіе $\beta = l\alpha$ при перемѣнномъ l опредѣляетъ всѣ такія прямыя. При $l = 0$, сѣкущая обратится въ прямую $\beta = 0$ и системы (1) и (2), которыя теперь обратятся въ

$$(1_0)\ldots\begin{cases}\beta = 0\\ \alpha = +\dfrac{p}{\lambda}\end{cases} \quad \text{и } (2_0)\ldots\begin{cases}\beta = 0\\ \alpha = -\dfrac{p}{\lambda},\end{cases}$$

опредѣлять двѣ точки пересѣченія съ гиперболой M_0 и M_0' (см. черт. 56). Съ увеличеніемъ l, сѣкущая будетъ вращаться около C, приближаясь къ CA и, пока $l < \lambda$, системы (1) и (2) всегда будутъ опредѣлять двѣ дѣйствительныя точки пересѣченія сѣкущей съ гиперболой. Точки эти все будутъ удаляться отъ C и при $l = \lambda$, когда сѣкущая сольется съ прямою CA, которой уравненіе $\beta = \lambda\alpha$, обѣ точки пересѣченія удалятся въ безконечность, ибо при $l = \lambda$ системы (1) и (2) обратятся въ

$$(1)\quad \beta = \lambda\alpha \text{ и } \alpha = +\frac{p}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}} = \frac{p}{0} = \infty$$

$$(2)\quad \beta = \lambda\alpha \text{ и } \alpha = -\frac{p}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}} = -\frac{p}{0} = -\infty$$

При дальнѣйшемъ увеличеніи l, т. е. когда сѣкущая выйдетъ изъ угла ACB, обѣ точки пересѣченія сдѣлаются мнимыми, т. е. несуществующими.

Тоже самое замѣтимъ, если будемъ уменьшать l отъ 0 до $-\lambda$: при $l = -\lambda$ обѣ точки пересѣченія удалятся въ ∞, и дальше сдѣлаются мнимыми.

Прямыя CA и CB называются ассимптотами гиперболы, уравненія ихъ суть

$$\beta = \lambda\alpha \text{ и } \beta = -\lambda\alpha.$$

Эти два уравненія можно соединить въ одно

$$(\beta - \lambda\alpha)(\beta + \lambda\alpha) = 0$$

и это будетъ уравненіе совокупности обѣихъ ассимптотъ. Его можно представить въ видѣ

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = 0,$$

или

$$-\lambda^2\alpha^2 + \beta^2 = 0,$$

или, наконецъ,

$$L\alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Итакъ, слѣдовательно, уравненіе совокупности ассимптотъ получится, если въ уравненіи гиперболы отбросимъ членъ P.

157. Здѣсь кстати разсмотримъ тотъ случай гиперболы, когда $P < 0$.

Полагая тогда $P = -p^2$, получимъ уравненіе гиперболы въ такомъ видѣ

$$\lambda^2\alpha^2 - \beta^2 = -p^2,$$

или

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = p^2.$$

Эта гипербола имѣетъ тѣ-же ассимптоты

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 - 0,$$

или

$$\lambda^2\alpha^2 - \beta^2 = 0,$$

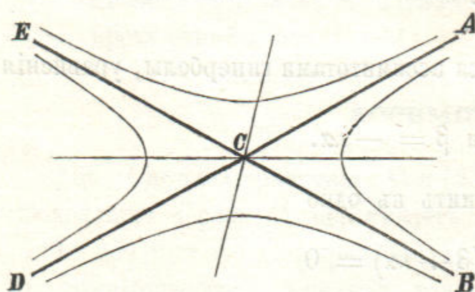
или, наконецъ,

$$\beta = \lambda\alpha \text{ и } \beta = -\lambda\alpha.$$

Будемъ пересѣкать ее прямыми, проходящими черезъ центръ; ихъ уравненіе $\beta = l\alpha$. Рѣшая это уравненіе совмѣстно съ уравненіемъ гиперболы, получимъ для опредѣленія точекъ пересѣченія съ гиперболой слѣдующія двѣ системы

$$(1) \begin{cases} \beta = l\alpha \\ \alpha = +\dfrac{p}{\sqrt{l^2 - \lambda^2}} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \beta = l\alpha \\ \alpha = -\dfrac{p}{\sqrt{l^2 - \lambda^2}}. \end{cases}$$



Черт. 57.

Эти системы даютъ дѣйствительныя рѣшенія уже только при $l > \lambda$, слѣдовательно, всѣ точки новой гиперболы лежатъ въ другой парѣ вертикальныхъ угловъ, образуемыхъ ассимптотами AD и BE, именно, въ углахъ ACE и BCD (см. черт. 57).

Двѣ гиперболы

$$L\alpha^2 + \beta^2 = +P \text{ и } L\alpha^2 + \beta^2 = -P,$$

имѣющія общія ассимптоты, но расположенныя въ разныхъ углахъ называются *сопряженными*.

Примѣръ. $x^2 - 3xy + 2y^2 - 7x + 2 = 0.$

Разлагая на сумму квадратовъ:

$$\left(x - \frac{3}{2}y - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y + \frac{21}{2}\right)^2 + 100 = 0.$$

Уравненіе ассимптотъ: $\left(x - \frac{3}{2}y - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y + \frac{21}{2}\right)^2 = 0$,

$$x - y + 7 = 0$$

или

$$x - 2y - 14 = 0.$$

Координаты центра, какъ точки пересѣченія ассимптотъ, найдемъ, рѣшая эти уравненія: $x = -28$, $y = -21$.

Сопряженные діаметры.

158. Всѣ тѣ разсужденія, которыя мы приводили касательно діаметровъ эллипса, отъ слова до слова прилагаются и къ изслѣдованію уравненія гиперболы, такъ какъ послѣднее отличается отъ уравненія эллипса только тѣмъ, что въ немъ множитель L отрицателенъ; тогда какъ у эллипса онъ положителенъ. Въ гиперболѣ всѣ діаметры проходятъ черезъ центръ и существуетъ безчисленное множество паръ сопряженныхъ діаметровъ: для каждаго діаметра $l\alpha + m\beta = 0$ всегда существуетъ сопряженный ему діаметръ, уравненіе котораго есть $L\alpha m - l\beta = 0$.

Уравненія сопряженныхъ діаметровъ можно написать въ такомъ видѣ $\beta = u\alpha$, $\beta = \frac{-L}{u}\alpha$, или $\beta = u\alpha$ и $\beta = v\alpha$, гдѣ $v = -\frac{L}{u}$, такъ что $uv = -L = \lambda^2$. Слѣдовательно, если $u > \lambda$, то $v < \lambda$ и наоборотъ. А потому, на основаніи вышесказаннаго относительно ассимптотъ, имѣемъ основаніе утверждать, что одинъ изъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ пересѣкаетъ гиперболу, а другой—не пересѣкаетъ. Это составляетъ уже отличительную особенность гиперболы.

Оси гиперболы.

159. Подобно какъ въ эллипсѣ, оси симметріи гиперболы найдемъ, какъ пару взаимно перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметровъ. Возьмемъ уравненія двухъ сопряженныхъ діаметровъ

$$l\alpha + m\beta = 0$$

$$Lm\alpha - l\beta = 0.$$

Условіе взаимной перпендикулярности будетъ, какъ и для эллипса,

$$lm(A^2+B^2-L)+m^2LB-Bl^2=0.$$

Обозначая отношеніе $\frac{l}{m}=u$, для опредѣленія послѣдняго получимъ квадратное уравненіе

$$u^2+u\,\frac{L-A^2-B^2}{B}-L=0\quad . \; . \; . \; . \; (*).$$

Два корня этого уравненія u_0 и u_1 даютъ возможность написать уравненія осей гиперболы: $u_0\alpha+\beta=0$ и $u_1\alpha+\beta=0$.

160. Уравненіе совокупности обѣихъ осей будетъ

$$(u_0\alpha+\beta)(u_1\alpha+\beta)=0,\ \text{или}\ u_0u_1\alpha^2+(u_0+u_1)\alpha\beta+\beta^2=0,$$

такъ какъ u_0 и u_1 суть корни квадратнаго уравненія (*), то

$$u_0+u_1=\frac{A^2+B^2-L}{B},\ u_0u_1=-L,$$

отсюда уравненіе совокупности осей представится въ такомъ видѣ

$$-L\alpha^2+\frac{A^2+B^2-L}{B}\,.\,\alpha\beta+\beta^2=0\quad . \; . \; . \; (**).$$

161. *Теорема*. Оси симметріи гиперболы дѣлятъ углы между ассимптотами пополамъ.

Для доказательства этой теоремы, мы найдемъ уравненіе совокупности обоихъ биссектровъ угловъ между ассимптотами и полученное уравненіе сравнимъ съ уравненіемъ осей (**). Будемъ опредѣлять биссектры угла, какъ геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ сторонъ угла, которыя въ нашемъ случаѣ будутъ не что иное, какъ ассимптоты, которыхъ уравненія: $\beta-\lambda\alpha=0$ и $\beta+\lambda\alpha=0$.

Уравненія биссектровъ угловъ между ассимптотами будутъ

$$\frac{\beta-\lambda\alpha}{\Delta_1}=+\frac{\beta+\lambda\alpha}{\Delta_2}\ldots(1),\quad \frac{\beta-\lambda\alpha}{\Delta_1}=-\frac{\beta+\lambda\alpha}{\Delta_2}\ldots(2),$$

причемъ

$$\Delta_1=\sqrt{\lambda^2A^2+(\lambda B-L)^2}\ \text{и}\ \Delta_2=\sqrt{\lambda^2A^2+(\lambda B+L)^2}.$$

Уравненія (1) и (2) могутъ быть переписаны такъ

$$\beta(\Delta_2-\Delta_1)-\lambda(\Delta_1+\Delta_2)\alpha=0,\ \beta(\Delta_2+\Delta_1)-\lambda(\Delta_2-\Delta_1)\alpha=0.$$

Перемножая послѣднія два уравненія, получимъ уравненіе совокупности обоихъ биссектровъ угла между ассимптомами.

$$\beta^2(\Delta_2{}^2 - \Delta_1{}^2) - 2\lambda\alpha\beta(\Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2) + \lambda^2\alpha^2(\Delta_2{}^2 - \Delta_1{}^2) = 0 \quad . \; . \; (3)$$

$$\Delta_2{}^2 - \Delta_1{}^2 = [\lambda^2 A^2 + (\lambda B + L)^2] - [\lambda^2 A^2 + (\lambda B - L)^2] = 4\lambda BL$$

$$\Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2 = [\lambda^2 A^2 + (\lambda B - L)^2] + [\lambda^2 A^2 + (\lambda B + L)^2] = 2\lambda^2[A^2 + B^2 - L],$$

откуда уравненіе (3) приметъ такой видъ

$$4\lambda BL \,.\, \beta^2 - 2\lambda\alpha\beta \,.\, 2\lambda^2(A^2 + B^2 - L) + \lambda^2\alpha^2 \,.\, 4\lambda BL = 0,$$

или по раздѣленіи на $4\lambda BL$

$$\beta^2 + \frac{A^2 + B^2 - L}{B}\alpha\beta - L\alpha^2 = 0$$

(слѣдуетъ помнить при этомъ преобразованіи, что $\lambda^2 = -L$).

Сравнивая полученное уравненіе биссектровъ угловъ между ассимптотами съ уравненіемъ осей (**), замѣчаемъ полное тождество, что и говоритъ о справедливости предложенной теоремы.

Уравненіе гиперболы, отнесенное къ осямъ.

162. Уравненіе гиперболы, отнесенное къ центру, будетъ, очевидно,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \frac{P}{AL} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Теперь остается выбрать за оси координатъ оси симметріи гиперболы; для этой цѣли воспользуемся инваріантами преобразованія координатъ.

Подобно тому, какъ было для эллипса, мы замѣчаемъ, что уравненіе гиперболы послѣ преобразованія должно имѣть видъ

$$A_1x^2 + C_1y^2 + \frac{P}{AL} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

гдѣ коэффиціенты A_1 и C_1 опредѣляются изъ условій: $A_1 + C_1 = A + C$ $A_1C_1 = L = AC - B^2$. Такъ какъ для гиперболы L есть число отрицательное, то корни уравненія

$$\xi^2 - (A + C)\,.\,\xi + AC - B^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

будутъ разныхъ знаковъ.

Оси гиперболы суть нечто иное, какъ пара сопряженныхъ діаметровъ, поэтому мы замѣчаемъ, что одна изъ осей пересѣкаетъ гиперболу, а другая не пересѣкаетъ.

Обыкновенно за коэффиціентъ A_1 въ уравненіи гиперболы

$$A_1x^2 + C_1y^2 + \frac{P}{AL} = 0$$

выбираютъ тотъ изъ корней, при которомъ новая ось x-овъ пересѣкаетъ кривую. Для указанной цѣли выбираютъ за A_1 тотъ корень квадратнаго уравненія (3), который по знаку совпадаетъ со знакомъ $-\frac{P}{AL}$, ибо тогда при $y=0$ уравненіе (2) даетъ для x слѣдующее выраженіе

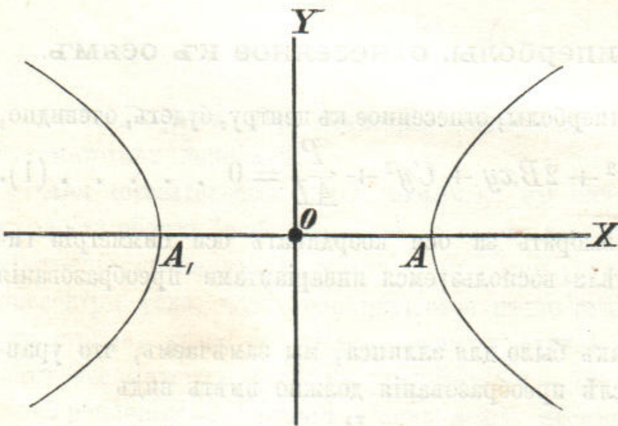
$$x = \pm\sqrt{\frac{-P}{A_1AL}} = \pm a,$$

гдѣ a—нѣкоторое вещественное число.

Введемъ другое обозначеніе:

$$b^2 = \frac{P}{C_1AL},$$

гдѣ b будетъ непремѣнно вещественнымъ числомъ.



Черт. 58.

Уравненіе гиперболы (2) можетъ быть преобразовано слѣдующимъ образомъ

$$\frac{x^2}{\frac{-P}{A_1AL}} - \frac{y^2}{\frac{P}{C_1AL}} = 1,$$

откуда окончательно $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (*)$$

Полагая въ послѣднемъ уравненіи $y=0$, получимъ

$$x^2 = a^2, \quad x = \pm a,$$

откуда замѣчаемъ, что a есть длина полуоси $\overline{OA}$ (см. чер. 58).

163. Ось $\overline{AA_1}$ называется *поперечною* или *дѣйствительною* осью гиперболы, а ось y-овъ, не пересѣкающая гиперболы, называется *мнимою* осью.

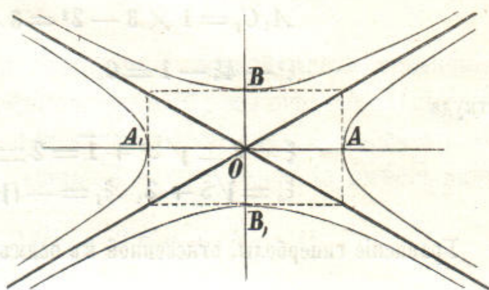
Число b называется мнимою полуосью гиперболы и можетъ получить геометрическое толкованіе при помощи построенія гиперболы, сопряженной съ данной.

164. Мы получимъ уравненіе ассимптотъ гиперболы, если во второй части уравненія (*) вмѣсто единицы поставимъ нуль:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0,$$



Черт. 59.

или окончательно получимъ два уравненія ассимптотъ въ такомъ видѣ:

$$y = +\frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x.$$

Итакъ, мы видимъ, что ассимптоты суть діагонали прямоугольника, построеннаго на осяхъ a и b (см. черт. 59).

Разсмотримъ теперь гиперболу, сопряженную съ данною (*), уравненіе которой будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (**).$$

Сопряженная гипербола (**) имѣетъ тѣ же ассимптоты, что и прежняя (*), но вѣтви ея лежатъ въ тѣхъ двухъ изъ вертикальныхъ угловъ, въ которыхъ проходитъ мнимая ось гиперболы (*) и, слѣдовательно, эта ось для гиперболы (**) будетъ дѣйствительною, такъ что b можно опредѣлить какъ дѣйствительную полуось $\overline{OB}$ гиперболы сопряженной. Дѣйствительная ось гиперболы (*) есть въ то же время мнимая ось для гиперболы сопряженной.

Примѣръ. $\quad x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x - 1 = 0$

$$x^2 - 2x(2y + 1) + 3y^2 - 1 = 0$$
$$-(x - 2y - 1)^2 + y^2 + 4y + 2 = 0$$
$$-(x - 2y - 1)^2 + (y + 2)^2 - 2 = 0.$$

Уравненіе, отнесенное къ центру, будетъ

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + \frac{-2}{-1} = 0,$$

или

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 2 = 0.$$

Для полученія осей, полагаемъ

$$A_1 + C_1 = 1 + 3 = 4$$

$$A_1 C_1 = 1 \times 3 - 2^2 = 3 - 4 = -1$$

$$\xi^2 - 4\xi - 1 = 0,$$

откуда

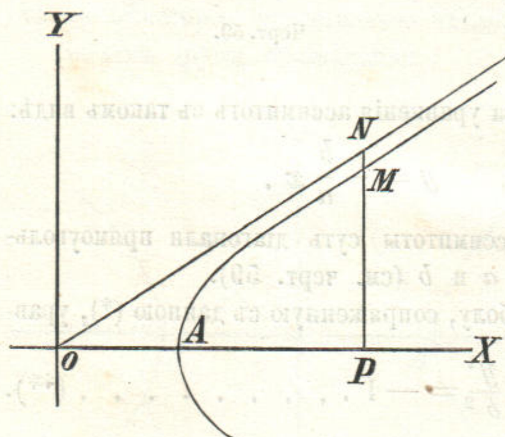
$$\xi = 2 \pm \sqrt{2^2 + 1} = 2 \pm \sqrt{5};$$

$$\xi_0 = \sqrt{5} + 2, \quad \xi_1 = -(\sqrt{5} - 2).$$

Уравненіе гиперболы, отнесенной къ осямъ, будетъ

$$-(\sqrt{5}-2)x^2 + (\sqrt{5}+2)y^2 + 2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{\frac{2}{\sqrt{5}-2}} - \frac{y^2}{\frac{2}{\sqrt{5}+2}} = 1.$$



Черт. 60.

165. Покажемъ теперь, что разность MN (см. черт. 60) ординаты NP ассимптоты, соотвѣтствующей абсциссѣ OP, и ординаты MP гиперболы, соотвѣтствующей той-же абсциссѣ, имѣетъ предѣломъ нуль при увеличеніи OP. Въ самомъ дѣлѣ, разность эта выражается такъ:

$$OP = x, \quad PM = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ (по уравненію гиперболы)},$$

$$PN = \frac{b}{a}x \text{ (по уравненію ассимптоты)},$$

слѣдовательно,

$$NM = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$=\frac{b}{a}\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})\,(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2-(x^2-a^2)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Послѣдняя дробь, дѣйствительно, имѣетъ предѣломъ O при увеличеніи x.

166. Указывая пріемъ при разложеніи первой части уравненія (A) на сумму квадратовъ линейныхъ функцій, мы ограничились случаемъ, когда коэффиціентъ A при x^2 не равенъ нулю. Разсмотримъ теперь случай обратный, т. е. когда $A=0$. Уравненіе имѣетъ видъ

$$2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Этотъ случай ничего исключительнаго не представляетъ и даетъ, какъ мы увидимъ, гиперболу. Въ самомъ дѣлѣ, располагая по степенямъ y-ка и умножая для удобства уравненіе на C, получимъ

$$(Cy)^2+2Cy\,(Bx+E)+2CDx+FC=0$$

$$[Cy+(Bx+E)]^2-B^2x^2-2BEx-E^2+2CDx+FC=0,$$

откуда

$$(Cy+Bx+E)^2-B^2x^2-2\,(BE-CD)\,x+FC-E^2=0,$$

умноживъ на -1, получимъ

$$-(Cy+Bx+E)^2+(Bx)^2+2Bx\frac{BE-CD}{B}-FC+E^2=0,$$

откуда окончательно

$$-(Cy+Bx+E)^2+\left(Bx+\frac{BE-CD}{B}\right)^2-FC+$$

$$+E^2-\frac{(BE-CD)}{B^2}=0.$$

167. Остается разсмотрѣть случай, когда оба коэффиціента A и C равны нулю.

Въ этомъ случаѣ

$$2Bxy+2Dx+2Ey+F=0,$$

или, раздѣляя на 2, получимъ уравненіе

$$f(x,y) = Bxy + Dx + Ey + F_1 = 0, \text{ гдѣ } F_1 = \frac{F}{2}.$$

Въ этомъ случаѣ удобно поступать слѣдующимъ образомъ.

Обозначимъ черезъ α коэффиціентъ $By + D$ при x-сѣ, въ уравненіи $f(x, y) = o$, точно также черезъ β коэффиціентъ $Bx + E$ при y-кѣ, мы получимъ

$$By + D = \alpha,\ Bx + E = \beta,$$

умножая, получимъ

$$\alpha\beta = (By + D)(Bx + E) = B(Bxy + Dx + Ey) + DE.$$

На основаніи-же заданнаго уравненія

$$Bxy + Dx + Ey = -F_1,$$

откуда окончательно

$$\alpha\beta = DE - BF_1 = K.$$

На основаніи-же тождества

$$\alpha\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$$

получимъ окончательно уравненіе, разложенное на сумму квадратовъ линейныхъ функцій:

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = K.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что, въ случаѣ $A=0$ и $C=0$, уравненіе (A) опредѣляетъ гиперболу.

Примѣръ.

$$3xy + 4x - y + 1 = 0 \qquad (*)$$

$\alpha = 3y + 4$, $\beta = 3x - 1$, $\alpha\beta = (3y + 4)(3x - 1) = 3\ (3xy + 4x - y) - 4$,

но

$$3xy + 4x - y = -1 \text{ (на основаніи уравненія (*))},$$

слѣдовательно,

$$\alpha\beta = -3 \,.\, 1 - 4 = -7,$$

откуда окончательно

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = -7,$$

или

$$\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}\right)^2=-7.$$

Уравненіе

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=K$$

даетъ для ассимптотъ слѣдующее уравненіе

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta=0,$$

откуда уравненія ассимптотъ будутъ слѣдующія:

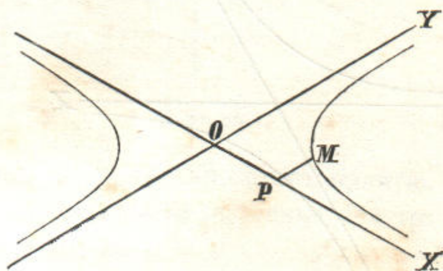
$$\alpha=0,\ \beta=0.$$

Уравненіе гиперболы, отнесенное къ ассимтотамъ.

168. Возьмемъ за оси координатъ ассимптоты гиперболы. Мы замѣчаемъ, что уравненіе не должно содержать членовъ съ первыми степенями x-са и y-ка, ибо начало находится въ центрѣ; это уравненіе имѣетъ видъ:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=H.$$

Прямыя параллельныя оси OY пересѣкаютъ кривую въ одной только точкѣ (см. черт. 61), такъ что каждому значенію x-са будетъ соотвѣтствовать только одно значеніе для y-ка, для чего необходимо долженъ равняться нулю коэффиціентъ C; подобнымъ-же образомъ мы покажемъ, что долженъ равняться нулю также и коэффиціентъ A, откуда получимъ уравненіе гиперболы, отнесенное къ ассимптотамъ, въ слѣдующемъ видѣ:



Черт. 61.

$$2Bxy=H,$$

или

$$xy=\frac{H}{2B}=\pm k^2.$$

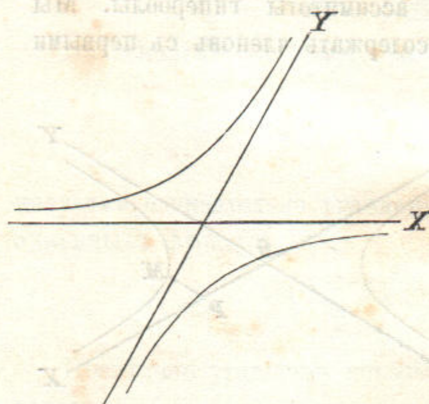
169. Если мы выберемъ положительными тѣ направленія ассимптотъ, между которыми заключается одна изъ вѣтвей кривой, то постоянная $\frac{H}{2B}$ должна быть положительная, ибо положительному x-су долженъ соотвѣтствовать положительный y и, наоборотъ, отрицательному x-су долженъ соотвѣтствовать отрицательный y. Если же мы выберемъ иное направленіе осей (см. черт. 62), тогда знакъ члена $\frac{H}{2B}$ долженъ быть отрицательный.

170. Итакъ, пусть выбраны тѣ направленія ассимптотъ, при которыхъ уравненіе гиперболы имѣетъ видъ

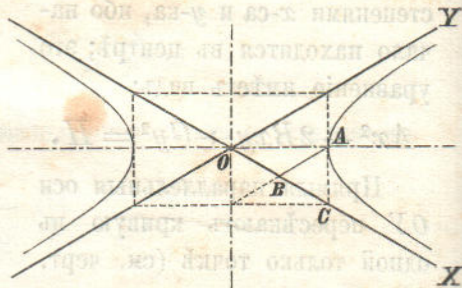
$$xy = k^2.$$

Покажемъ, какъ опредѣлить постоянное число k^2 по осямъ гиперболы.

Если мы возьмемъ вершину гиперболы A, то ея координаты



Черт. 62.



Черт. 63.

должны, очевидно, удовлетворять уравненію кривой: $xy = k^2$.

Такъ какъ кривая симметрична относительно оси OA, то

$$x = OB = y = BA = \frac{OC}{2} = \frac{\sqrt{OA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

(см. черт. 63),

отсюда мы замѣчаемъ, что

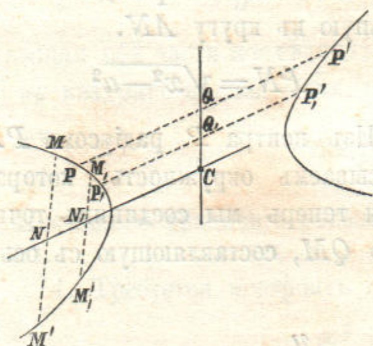
$$k^2 = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

или, наконецъ,

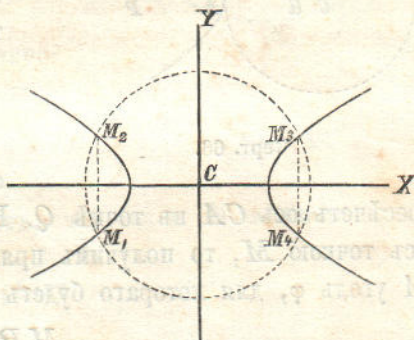
$$k=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

171. Покажемъ теперь, какъ по указанному очертанію гиперболы указать центръ, оси и ассимптоты. Проводимъ произвольную хорду MM' и дѣлимъ ее въ точкѣ N пополамъ; проводимъ другую хорду (см. черт. 64) M_1M_1', параллельно хордѣ MM', дѣлимъ новую хорду пополамъ въ точкѣ N_1.

Проводимъ черезъ точки N и N' прямую, которая, очевидно, будетъ однимъ изъ діаметровъ гиперболы. Беремъ новую пару взаимно параллельныхъ хордъ PP' и $P_1P'_1$, дѣлимъ эти хорды точками



Черт. 64.



Черт. 65.

Q и Q_1 пополамъ; черезъ двѣ точки Q и Q_1 проводимъ прямую, которая будетъ новымъ діаметромъ гиперболы. Оба указанные діаметра пересѣкутся въ искомомъ центрѣ C гиперболы.

Когда центръ C найденъ, оси гиперболы построятся слѣдующимъ образомъ.

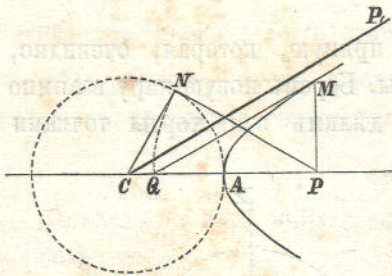
Изъ центра гиперболы C какъ центра радіусомъ большимъ дѣйствительной полуоси гиперболы описываемъ кругъ, который пересѣчетъ гиперболу въ четырехъ точкахъ M_1, M_2, M_3 и M_4 (см. черт. 65). Соединяя попарно точки M_1 и M_2, M_3 и M_4, получимъ двѣ хорды M_1M_2 и M_3M_4, параллельныя между собою, параллельно которымъ проходитъ одна изъ осей гиперболы; другая же ось будетъ перпендикулярна къ двумъ указаннымъ хордамъ.

172. Для построенія ассимптотъ поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Построеніе осей даетъ намъ вершины гиперболы и, слѣдовательно,

длину CA (см. черт. 66) дѣйствительный полуоси a, такъ что $CA = a$. Изъ центра C радіусомъ a описываемъ окружность круга AN. Беремъ произвольную точку M на гиперболѣ, координаты которой

$$x = CP \text{ и } y = PM$$

легко построить, разъ намъ оси извѣстны.



Черт. 66.

Уравненіе гиперболы показываетъ, что

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a}.$$

Длину $\sqrt{x^2 - a^2}$ мы получимъ, если изъ точки P проведемъ касательную къ кругу AN.

$$PN = \sqrt{x^2 - a^2}$$

Изъ центра P радіусомъ PN описываемъ окружность, которая пересѣчетъ ось CA въ точкѣ Q. Если теперь мы соединимъ точку Q съ точкою M, то получимъ прямую QM, составляющую съ осью CA уголъ φ, для котораго будетъ

$$tang\,\varphi = \frac{MP}{QP} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Наконецъ, если мы проведемъ черезъ центръ C прямую, параллельную прямой QM, то получимъ искомую ассимптоту.

Построеніе эллипса и гиперболы по точкамъ.

173. Требуется построить эллипсъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Изъ начала координатъ, какъ центра, радіусами равными большей и малой полуоси проводимъ два круга AA_1 и BB_1, (см. черт. 67). Проводимъ черезъ начало координатъ O произвольную прямую OP, которая пересѣкаетъ оба круга BB' и AA' въ двухъ точкахъ Q и P. Черезъ точку P проведемъ прямую параллельно оси OY, а черезъ

точку Q прямую параллельно оси OX, тогда мы получимъ въ пересѣченіи этихъ двухъ прямыхъ точку M, лежащую на эллипсѣ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ уголъ QOT черезъ φ и пусть будутъ кромѣ того координаты точки M обозначены черезъ x и y, такъ что $x = + OS$, $y = + MS$, тогда $OS = OP \, Cos \, \varphi$, $MS = QT = OQ \, sin \, \varphi$, другими словами,

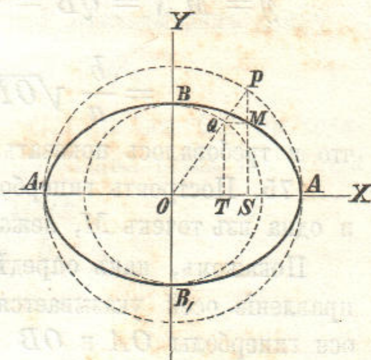
$$OS = x = a \cos \varphi, \; MS = y = b \sin \varphi,$$

откуда

$$\frac{x}{a} = \cos \varphi, \; \frac{y}{b} = \sin \varphi;$$

возвышая обѣ части послѣднихъ уравненій въ квадратъ и складывая, получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$



Черт. 67.

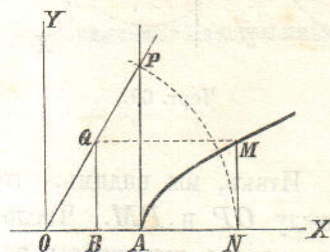
Послѣднее уравненіе показываетъ, что точка M лежитъ на эллипсѣ.

174. Требуется построить гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для построенія точки M, соотвѣтствующей нѣкоторой абсциссѣ ON, поступаемъ такъ.

Длина a задана; откладываемъ ее по оси x (см. черт. 68), получимъ точку A. Въ точкѣ A возставляемъ перпендикуляръ къ оси X. Радіусомъ $= ON$, т. е. абсциссѣ искомой точки M, проводимъ окружность круга, которая пересѣчетъ прямую AP въ точкѣ P. Соединяемъ точку P съ началомъ координатъ и на полученной такимъ образомъ прямой указываемъ точку Q такъ, чтобы было:



Черт. 68.

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{b}{a} = \frac{OB}{OA}.$$

Тогда, если мы проведемъ черезъ точку Q прямую параллельную оси x-овъ, то эта прямая пересѣчетъ перпендикуляръ къ оси X

проведенный черезъ точку N въ искомой точкѣ M, лежащей на гиперболѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая $MN = y$, $ON = x$, получимъ

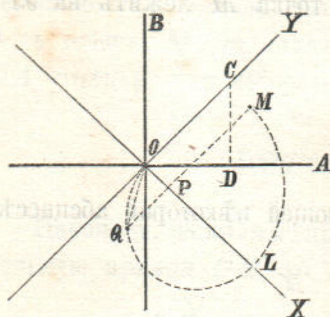
$$y = MN = QB = \frac{b}{a}\ PA = \frac{b}{a}\sqrt{PO^2 - OA^2} =$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{ON^2 - a^2} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

что и требовалось показать.

175. Построить гиперболу по точкамъ, когда заданы ассимптоты и одна изъ точекъ M, лежащихъ на гиперболѣ.

Покажемъ, какъ опредѣлять величину и направленіе осей. Направленіе осей указывается непосредственно, ибо мы показали, что оси гиперболы OA и OB дѣлятъ пополамъ углы между ассимптотами (см. черт. 69). Остается опредѣлить длину полуосей a и b гиперболы. Для этой цѣли поступаемъ такъ: возьмемъ за оси координатъ ассимптоты OX и OY; уравненіе гиперболы отнесенной къ ассимптотамъ будетъ



Черт. 69.

$$xy = k^2.$$

Если мы черезъ заданную на гиперболѣ точку M проведемъ прямую MP, параллельно одной изъ ассимптотъ, то для точки M координаты будутъ

$$x = OP,\ y = PM,$$

отсюда

$$\overline{OP} \cdot \overline{PM} = k^2.$$

Итакъ, мы видимъ, что число k есть средняя пропорціональная между OP и PM. Число k можно построить такъ: изъ центра P описываемъ окружность радіусовъ PM; эта окружность пересѣчетъ ассимптоту OX въ точкѣ L; на OL, какъ на діаметрѣ, строимъ кругъ OQL и на окружности этого круга указываемъ точку Q, какъ конецъ перпендикуляра, возстановленнаго къ діаметру OL въ точкѣ P.

Длина перпендикуляра PQ будетъ равна числу k, ибо

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{PL}.$$

Принимая съ другой стороны во вниманіе, что

$$2k = \sqrt{a^2 + b^2},$$

мы замѣчаемъ, что $2k$ есть гипотенуза треугольника, катеты котораго суть полуоси a и b. Поэтому для построенія полуосей a и b поступаемъ такъ: по направленію ассимптоты OY откладываемъ длину

$$OC = 2PQ = 2k = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Изъ точки C проводимъ перпендикуляръ CD на ось OA проходящую въ томъ углу между ассимптотами, гдѣ задана точка M. Тогда въ прямоугольномъ треугольникѣ OCD будетъ

$$OD = a, \quad DC = b.$$

Затѣмъ строимъ гиперболу по точкамъ.

Задачи.

1. Какія геометрическія мѣста опредѣляютъ уравненія

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$$

$$9x^2 - 12xy + 5y^2 + 42x - 28y + 50 = 0$$

$$3x^2 - xy + y^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2xy - 2x + 2y - 3 = 0$$

$$x^2 - 2y^2 - 3x - 7y + 1 = 0$$

Отв. Точка, ничего, эллипсъ, двѣ пересѣкающіяся прямыя, гипербола.

2. Изслѣдовать кривую $x^2 - 2xy + 3y^2 - x - 1 = 0$.

Отв. Эллипсъ; координаты центра суть $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, сопряженные діаметры имѣютъ

уравненія $$l\left(x - y - \frac{1}{2}\right) + m\left(2y - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$2m\left(x - y - \frac{1}{2}\right) - l\left(2y - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Уравненія осей суть $$\sqrt{2}\left(x - y - \frac{1}{2}\right) + 2y - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\sqrt{2}\left(x - y - \frac{1}{2}\right) - 2y + \frac{1}{2} = 0.$$

Длины полуосей суть $a = \frac{11}{8(2 - \sqrt{2})}$, $b = \frac{11}{8(2 + \sqrt{2})}$.

3. Изслѣдовать кривую $x^2 - 2xy - 3y^2 + 7x - 1 = 0$.

Отв. Гипербола; центръ $\left(-\frac{21}{8}, \frac{7}{8}\right)$; ассимптоты $x + y + \frac{7}{4} = 0$, $x - 3y + \frac{21}{4} = 0$; начало координатъ лежитъ на діаметрѣ, пересѣкающемъ гиперболу; дѣйствительная полуось гиперболы равна $\frac{163}{16(1+\sqrt{5})}$.

4. Написать общее уравненіе разносторонней гиперболы и найти длину ея дѣйствительной оси.

Отв. $A(x + y)(x - y) + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$,

$a = \pm \frac{P}{A(A^2 + B^2)^{3/2}}$, гдѣ $P = LN - M^2$, а $L = -A^2 - B^2$,

$$M = AE - BD,\ \ N = AF - D^2.$$

5. Изслѣдовать гиперболу $xy - 3x + y - 1 = 0$.

Отв. Ассимптоты $x + 1 = 0$, $y - 3 = 0$; длина полуоси 2; гипербола равносторонняя.

Касательныя и свойства сопряженныхъ діаметровъ эллипса и гиперболы.

176. При изученіи свойствъ діаметровъ мы пересѣкали эллипсъ или гиперболу

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0$$

хордами

$$l\alpha + m\beta + n = 0,$$

причемъ мы видѣли, что каждая изъ этихъ хордъ имѣетъ двѣ точки пересѣченія съ кривою, опредѣляемыя уравненіями

$$\alpha = \frac{ln}{Lm^2 + l^2} \pm \sqrt{R_n}.$$

Если $R_n > 0$, то существуютъ двѣ различныя точки пересѣченія; при $R_n = 0$ сѣкущая обращается въ касательную.

177. **Задача**. Чрезъ точку (x_0, y_0), лежащую на линіи

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0 \tag{1}$$

провести къ линіи касательную.

Координаты заданной точки x_0 и y_0, будучи подставлены въ функціи α и β, обращаютъ ихъ въ числа α_0 и β_0, причемъ эти числа удо-

влетворяютъ уравненію

$$L\alpha_0^2 + \beta_0^2 + P = 0; \tag{2}$$

Уравненіе хорды, проходящей черезъ точку α_0, β_0, можно написать такъ

$$l(\alpha - \alpha_0) + m(\beta - \beta_0) = 0, \tag{*}$$

измѣняя величины l и m, или, лучше сказать, ихъ отношеніе, будемъ получать различныя хорды, проходящія черезъ указанную точку.

Чтобы хорда проходила черезъ центръ эллипса, надо въ уравненіе (*) подставить $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и изъ полученнаго уравненія

$$l\alpha_0 + m\beta_0 = 0 \tag{**}$$

опредѣлить отношеніе этихъ коэффиціентовъ. Подберемъ теперь l и m такъ, чтобы другая точка пересѣченія хорды сливалась съ точкою α_0, β_0, тогда хорда будетъ касательною. Координаты другой точки опредѣлятся изъ двухъ уравненій (*) и (1). Вычитая изъ уравненія (1) уравненіе (2) получимъ

$$L(\alpha - \alpha_0)(\alpha + \alpha_0) + (\beta - \beta_0)(\beta + \beta_0) = 0. \tag{3}$$

Но, на основаніи уравненія (*), которое можно представить въ видѣ пропорціи

$$\frac{\alpha - \alpha_0}{m} = \frac{\beta - \beta_0}{-l},$$

уравненіе (3) обращается въ слѣдующее

$$Lm(\alpha + \alpha_0) - l(\beta + \beta_0) = 0. \tag{4}$$

Касательной будетъ, очевидно, соотвѣтствовать такое отношеніе коэффиціентовъ l и m, которое получится изъ уравненія

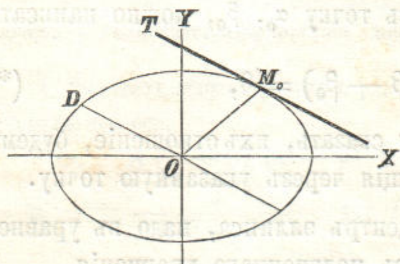
$$2Lm\alpha_0 - 2l\beta_0 = 0,$$

полученнаго изъ уравненія (4) замѣною α, β на α_0, β_0. Послѣднее уравненіе, переписанное въ такомъ видѣ

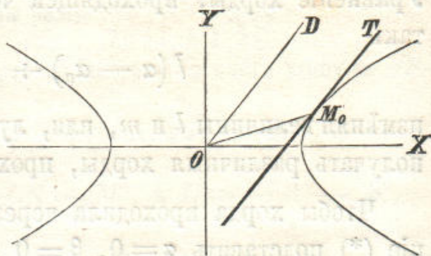
$$Lm\alpha_0 - l\beta_0 = 0, \tag{5}$$

показываетъ, что касательная въ точкѣ (α_0, β_0) параллельна діаметру

сопряженному съ діаметромъ, проходящимъ черезъ эту точку, что очевидно изъ геометрическихъ соображеній (см. черт. 70 и 71). Окон-



Черт. 70.



Черт. 71.

чательное уравненіе касательной получимъ, исключая отношеніе коэффиціентовъ $\frac{l}{m}$ изъ двухъ уравненій (5) и (*)

$$L\alpha_0(\alpha-\alpha_0)+\beta_0(\beta-\beta_0)=0$$

$$L\alpha_0\alpha+\beta\beta_0-L\alpha_0^2-\beta_0^2=0.$$

Но, на основаніи уравненія (2), имѣемъ

$$-L\alpha_0^2-\beta_0^2=P,$$

слѣдовательно, окончательное уравненіе искомой касательной есть

$$L\alpha_0\alpha+\beta\beta_0+P=0.$$

178. **Задача**. Черезъ точку x_1, y_1, лежащую внѣ линіи

$$L\alpha^2+\beta^2+P=0, \tag{1}$$

провести касательную къ линіи.

Если назовемъ черезъ α_0, β_0 значеніе функцій α и β для точки касанія, то уравненіе касательной, какъ это мы видѣли, будетъ имѣть видъ

$$L\alpha\alpha_0+\beta\beta_0+P=0, \tag{*}$$

причемъ числа α_0 и β_0 должны удовлетворять уравненію

$$L\alpha_0^2+\beta_0^2+P=0. \tag{2}$$

Для того чтобы искомая касательная проходила черезъ заданную точку x_1, y_1, необходимо, чтобы координаты этой точки удовлетворяли

уравненію (*), откуда, называя черезъ α_1, β_1 результатъ подстановки чиселъ x_1, y_1 въ функціи α, β, получимъ условіе

$$L\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1 + P = 0. \tag{3}$$

Изъ условія (3) и уравненія (2) получимъ искомыя координаты точки касанія. Касательныхъ будетъ двѣ.

Итакъ, мы видимъ, что точки касанія искомыхъ касательныхъ получатся, какъ точки, въ которыхъ пересѣкаетъ кривую (1) нѣкоторая прямая

$$L\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + P = 0.$$

Послѣдняя прямая дѣйствительна для всякаго положенія точки x_1, y_1 и называется *полярою* этой точки; точка же, по отношенію къ своей полярѣ, называется *полюсомъ* (см. § 125).

Если выраженіе

$$L\alpha_1^2 + \beta_1^2 + P$$

имѣетъ знакъ противоположный знаку произведенія PL, то поляра пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ и, слѣдовательно, черезъ α_1, β_1 проходятъ двѣ касательныя; если

$$L\alpha_1^2 + \beta_1^2 + P = 0,$$

то точка лежитъ на кривой и только одна касательная проходитъ черезъ эту точку; наконецъ, когда знакъ

$$L\alpha_1^2 + \beta_1^2 + P$$

тотъ же, что у произведенія PL, то поляра не пересѣкаетъ кривую, точка α_1, β_1 лежитъ со стороны вогнутости кривой и черезъ эту точку нельзя провести ни одной касательной къ кривой.

179. **Задача**. Провести касательную къ кривой

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0 \tag{1}$$

параллельно прямой

$$A_0x + B_0y + C_0 = 0. \tag{2}$$

Пишемъ уравненіе (2) въ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0,$$

и опредѣляемъ n подъ тѣмъ условіемъ, чтобы $R_n = 0$; получимъ двѣ

касательныя

$$l\alpha + m\beta \pm \sqrt{-P\left(m^2 + \frac{l^2}{L}\right)} = 0.$$

Если $L > 0$, $P < 0$, то задача всегда возможна; если же $L < 0$, то все зависитъ отъ знака P.

При $P > 0$ надо брать $m < \frac{l}{\sqrt{-L}}$, а при $P < 0$ надо брать $m > \frac{l}{\sqrt{-L}}$.

180. Возьмемъ теперь уравненіе эллипса и гиперболы въ простѣйшемъ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравненія поляры точки x_1, y_1 будетъ

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Если точка x_1, y_1 лежитъ на заданной кривой, тогда уравненіе поляры обращается въ уравненіе касательной.

181. *Подкасательною* въ точкѣ M нѣкоторой кривой линіи называется разстояніе между основаніемъ ординаты точки M на оси x-овъ и точкою, въ которой пересѣкаетъ эту ось касательная, проведенная къ кривой черезъ точку M.

Разсмотримъ подкасательную эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть уравненіе заданное опредѣляетъ эллипсъ AMS (см. черт. 72).

Уравненіе касательной MT къ эллипсу, въ точкѣ $M(x_1, y_1)$, будетъ, какъ мы видѣли,

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Подкасательная

$$PT = OT - OP = OT - x_1,$$

но OT есть абсцисса той точки, въ которой касательная пересѣкаетъ ось x-овъ. Полагая въ уравненіи этой касательной $y = O$, а $x = OT$,

получимъ

$$\frac{x_1 OT}{a^2} = 1,$$

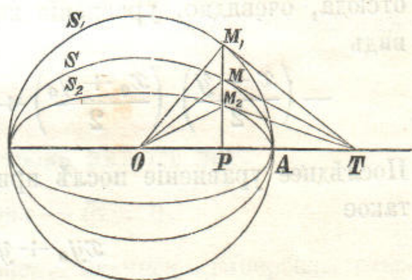
откуда

$$OT = \frac{a^2}{x_1}.$$

Подкасательная

$$PT = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}.$$

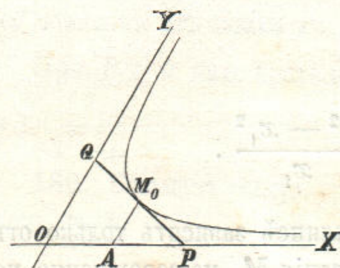
Мы видимъ, что подкасательная въ эллипсѣ зависитъ только отъ большой оси a и отъ абсциссы x точки касанія M, но совершенно не зависитъ отъ малой оси, поэтому, для точекъ, имѣющихъ одну и ту же абсциссу на разныхъ эллипсахъ, построенныхъ на большой оси, касательная пересѣкаетъ большую ось въ одной и той же точкѣ T (см. черт. 72). Отсюда выводимъ слѣдующее правило построенія касательной. Изъ центра эллипса радіусомъ равнымъ большой оси эллипса AMS чертимъ кругъ AM_1S_1. Этотъ кругъ можно разсматривать какъ частный случай эллипса съ большою осью $= a$, малая ось котораго b увеличилась и сдѣлалась равною a. Если намъ надо провести касательную къ эллипсу S въ нѣкоторой его точкѣ M, абсцисса которой есть OT, то мы можемъ поступить такъ: продолжаемъ ординату до пересѣченія съ кругомъ M_1S_1; получаемъ на кругѣ точку M_1, строимъ въ этой точкѣ M_1 касательную M_1T къ кругу; эта касательная пересѣкаетъ большую ось эллипса (ось x-овъ) въ нѣкоторой точкѣ T. На основаніи доказаннаго, мы замѣчаемъ, что если соединимъ точку M эллипса MS съ точкою T, то получимъ искомую касательную MT къ эллипсу въ точкѣ M.



Черт. 72.

182. Въ заключеніе разсмотримъ гиперболу, отнесенную къ ассимптотамъ. Уравненіе гиперболы будетъ $xy = k^2$ (1) (см. § 170). Возьмемъ на этой гиперболѣ точку M_0 (см. черт. 73), координаты ко-

торой $x_0 = OA$, $y_0 = AM_0$, причемъ эти координаты удовлетворяютъ очевидно уравненію $x_0 y_0 = k^2$. Требуется провести касательную въ точкѣ M_0 къ гиперболѣ. Уравненіе (1) можно написать въ такомъ видѣ



Черт. 73.

$$-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + k^2 = 0,$$

это уравненіе имѣетъ видъ

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0,$$

гдѣ

$$L = -1,\ \alpha = \frac{x+y}{2},\ \beta = \frac{x-y}{2},\ P = k^2,$$

отсюда, очевидно, уравненіе касательной въ точкѣ M_0 будетъ имѣть видъ

$$-\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x_0-y_0}{2}\right) = -k^2.$$

Послѣднее уравненіе послѣ приличныхъ сокращеній обращается въ такое

$$xy_0 + yx_0 = 2k^2. \tag{2}$$

Найдемъ точку P, въ которой касательная пересѣкаетъ ось x-овъ; для этой цѣли положимъ въ уравненіи (2) $y = 0$, тогда абсцисса x точки P будетъ

$$x = \frac{2k^2}{y_0} = \frac{2x_0 y_0}{y_0} = 2x_0,$$

что даетъ простой способъ построенія касательной

$$OP = 2x_0 = 2OA.$$

183. Уравненіе гиперболы съ ассимптотами $\alpha = 0$, $\beta = 0$ имѣетъ видъ $\alpha\beta = k^2$. На основаніи разсужденій, тождественныхъ съ приведенными въ предыдущемъ параграфѣ, мы замѣтимъ, что уравненіе поляры точки α_0, β_0 будетъ имѣть видъ

$$\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0 = 2k^2$$

Задачи.

1. Провести касательную изъ начала координатъ къ кривымъ

$$x^2 - 2xy + y - 1 = 0,\ 3x^2 - 12xy + 13y^2 + 6x - 10y + 3 = 0.$$

Отв. Поляры начала суть $y - 2 = 0$, $3x - 5y + 3 = 0$.

2. Черезъ точку (1, 1) провести касательную къ кривой

$$x^2 + xy + 2y^2 + 3x + y + 1 = 0.$$

Отв. Касательныя имѣютъ уравненія $x - y = 0$, $y = 1$.

3. Провести касательныя изъ начала координатъ къ кривымъ

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 7 = 0,\ x^2 - xy + 6 = 0.$$

Отв. Мнимыя касательныя; $x.(x - y) = 0$, т. е. ассимптоты, касающіяся кривой въ безконечно далекой точкѣ.

4. Провести къ кривой $x^2 + 2xy + 5y^2 - 2x - 6y = 0$ касательную параллельно прямой $x + 3y - 2 = 0$.

Отв. $x + 3y = 0$, $x + 3y - 4 = 0$.

184. Мы видѣли уже, что для эллипса или гиперболы, опредѣляемыхъ уравненіемъ

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0,$$

уравненія пары сопряженныхъ діаметровъ имѣютъ видъ

$$l\alpha + m\beta = 0 \quad Lm\alpha - l\beta = 0.$$

Будемъ разсматривать теперь уравненіе эллипса и гиперболы отнесенное къ осямъ

$$\pm \frac{b^2}{a^2}\ x^2 + y^2 \mp b^2 = 0,$$

гдѣ знакъ $+$ соотвѣтствуетъ случаю эллипса, а знакъ $-$ случаю гиперболы.

Въ данномъ случаѣ

$$L = \pm \frac{b^2}{a^2},\ \alpha = x,\ \beta = y,\ P = \mp b^2.$$

Примѣняя къ этому случаю общую теорію, мы получимъ уравненія двухъ сопряженныхъ діаметровъ въ такомъ видѣ

(1) $$lx + my = 0,\quad \pm \frac{b^2}{a^2}\ mx - ly = 0;$$ (2)

обозначая углы, составляемые съ осью x-овъ діаметрами (1) и (2),

черезъ φ и ψ, получимъ

$$tg\,\varphi = -\frac{l}{m},\ tg\,\psi = \pm\frac{b^2}{a^2}\,\frac{m}{l}.$$

Перемножая, получимъ

$$tg\,\varphi.\ tg\,\psi = \mp\frac{b^2}{a^2}.$$

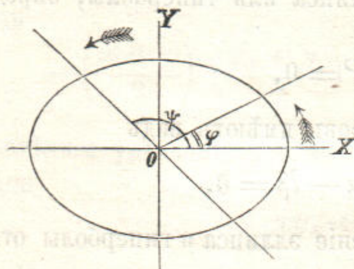
Верхнiй знакъ соотвѣтствуетъ эллипсу, а нижнiй гиперболѣ.

185. Разсмотримъ сначала случай эллипса (см. черт. 74). Уравненiе

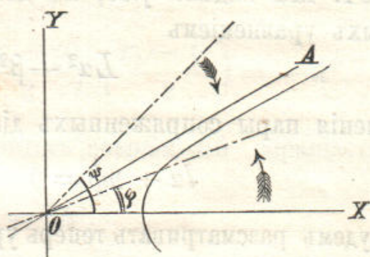
$$tang\,\varphi\ tang\,\psi = -\frac{b^2}{a^2}$$

показываетъ, что $tang\,\varphi$ и $tang\,\psi$ разныхъ знаковъ.

Отсюда мы заключаемъ, что, если уголъ φ меньше 90°, то уголъ $\psi > 90^\circ$, такъ что сопряженные дiаметры лежатъ въ разныхъ углахъ



Черт. 74.



Черт. 75.

между осями. Когда уголъ $\varphi = 0$, тогда одинъ изъ сопряженныхъ дiаметровъ совпадаетъ съ осью x-овъ, а другой образуетъ съ этой осью такой уголъ ψ, что

$$tang\,\psi = -\frac{b^2}{tg\ 0.\ a^2} = \infty,$$

откуда $\psi = 90^\circ$, что очевидно.

Если мы будемъ поворачивать дiаметръ, совпадающiй съ осью x-овъ въ сторону положительныхъ угловъ, тогда дiаметръ съ нимъ сопряженный будетъ поворачиваться въ ту-же сторону, начиная съ положенiя совпадающаго съ осью y-овъ. Когда, послѣ оборота на 90°, первый изъ дiаметровъ совпадетъ съ осью y-овъ, тогда второй дiаметръ, повернувшись на 90°, совпадетъ съ осью x-овъ.

186. Совсѣмъ другое происходитъ при гиперболѣ (см. черт. 75).

Уравненіе

$$tang\,\varphi .\ tang\,\psi = + \frac{b^2}{a^2}$$

показываетъ, что $tang\,\varphi$ и $tang\,\psi$ одинаковыхъ знаковъ. Оба угла φ и ψ меньше или больше $90°$, что показываетъ, что оба сопряженныхъ діаметра лежатъ въ одной парѣ вертикальныхъ угловъ, составляемыхъ осями гиперболы.

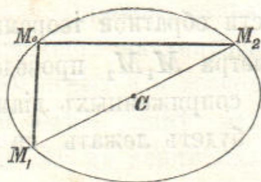
Въ томъ случаѣ, когда одинъ діаметръ совпадаетъ съ одною осью, другой непремѣнно будетъ совпадать съ другою осью гиперболы. Будемъ теперь поворачивать одинъ діаметръ въ сторону положительныхъ угловъ, начиная съ положенія, совпадающаго съ осью x-овъ, тогда другой діаметръ, сопряженный съ первымъ, будетъ поворачиваться въ обратномъ направленіи. Оба сопряженные діаметра будутъ сближаться, пока не совпадутъ съ одною изъ ассимптотъ. Въ самомъ дѣлѣ, если $\varphi = \psi$, то

$$tang^2\,\varphi = + \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{а, слѣдовательно,} \quad tang\,\varphi = \pm \frac{b}{a},$$

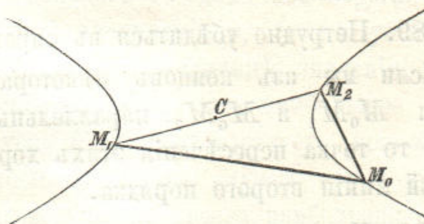
что показываетъ справедливость сказаннаго.

Въ эллипсѣ уголъ между сопряженными діаметрами не можетъ быть менѣе нѣкотораго предѣльнаго угла. Чтобы это показать, введемъ въ разсмотрѣніе дополнительныя хорды.

187. *Дополнительными хордами* называются хорды, идущія отъ нѣкоторой точки на кривой къ концамъ одного и того же діаметра.



Черт. 76.



Черт. 77.

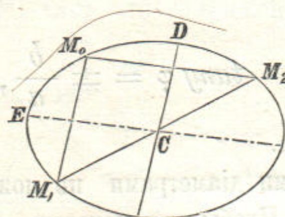
Возьмемъ какую нибудь произвольную точку M_0 на кривой второго порядка и произвольный діаметръ M_1M_2; тогда, если мы соединимъ точку M_0 съ концами этого діаметра, то получимъ двѣ дополнительныя хорды M_0M_1 и M_0M_2 (см. черт. 76 и 77).

188. Относительно дополнительныхъ хордъ можно высказать слѣдующую теорему.

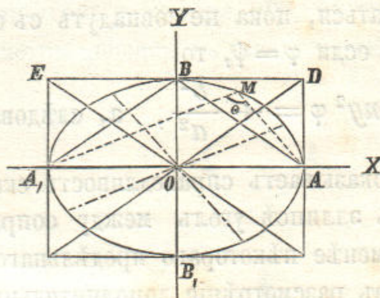
Теорема. Дополнительныя хорды параллельны двумъ сопряженнымъ діаметрамъ.

Въ кругѣ дополнительныя хорды взаимно перпендикулярны и приведенная теорема есть не что иное, какъ обобщеніе этого свойства круга на линіи второго порядка.

Пусть заданы дополнительныя хорды M_0M_1 и M_0M_2. Проведемъ діаметръ CE, дѣлящій хорду M_0M_1 пополамъ (см. черт. 78); этотъ діаметръ параллеленъ хордѣ M_0M_2, ибо дѣлитъ пополамъ двѣ стороны M_0M_1 и M_0M_2 треугольника $M_0M_1M_2$ и, слѣдовательно, онъ параллеленъ третьей сторонѣ этого треугольника. То же самое мы скажемъ о діаметрѣ CD дѣлящемъ хорду M_0M_2 пополамъ, а именно, что этотъ діаметръ параллеленъ хордѣ M_0M_1. Изъ сказаннаго мы за-



Черт. 78.



Черт. 79.

ключаемъ, что оба діаметра CE и CD сопряженные, что и требовалось доказать.

189. Нетрудно убѣдиться въ справедливости обратной теоремы.

Если мы изъ концовъ нѣкотораго діаметра M_1M_2 проведемъ хорды M_0M_1 и M_0M_2, параллельныя парѣ сопряженныхъ діаметровъ, то точка пересѣченія этихъ хордъ M_0 будетъ лежать на заданной линіи второго порядка.

190. Приложимъ дополнительныя хорды къ разсмотрѣнію угла между двумя сопряженными діаметрами эллипса.

Вмѣсто угла между сопряженными діаметрами мы имѣемъ право разсматривать равный ему уголъ между двумя хордами MA и MA', проведенными черезъ концы большой оси AA', параллельно двумъ сопряженнымъ діаметрамъ (см. черт. 79). Разные углы θ между сопряженными діаметрами мы будемъ получать, мѣняя положеніе

точки M на контурѣ эллипса

$$\theta = \angle AMA' = \angle MAX - \angle MA'X,$$

откуда

$$tang\,\theta = \frac{tang\angle MAX - tang\angle MA'X}{1 + tang\angle MAX . tg\angle MA'X} =$$

$$= \frac{\dfrac{y}{x-a} - \dfrac{y}{x+a}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2 - a^2}},$$

ибо

$$tang\angle MAX = \frac{y}{x-a};\quad tang\angle MA'X = \frac{y}{x+a},$$

отсюда

$$tang\,\theta = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2};$$

исключая изъ послѣдней формулы x на основаніи уравненія эллипса, получимъ окончательно

$$tang\,\theta = -\frac{2ab^2}{(a^2 - b^2)\,y}.$$

Если точка M будетъ описывать верхнюю половину AMA' эллипса, то уголъ θ будетъ тупой, ибо его тангенсъ отрицательный. При $y = 0$, т. е. когда точка M совпадетъ съ одной изъ вершинъ A, уголъ θ—прямой, затѣмъ, по мѣрѣ увеличенія y, $tang\,\theta$ убываетъ и достигаетъ наименьшаго по абсолютной величинѣ значенія, при наибольшемъ изъ возможныхъ значеній y-ка. Это наибольшее значеніе y-ка $=$ длинѣ малой полуоси b и соотвѣтствуетъ положенію точки M въ концѣ малой полуоси. Въ этомъ случаѣ тупой уголъ между дополнительными хордами достигаетъ своего наибольшаго значенія ABA'. Итакъ, мы видимъ, что тупой уголъ между двумя сопряженными діаметрами достигаетъ своего maximum'а и, слѣдовательно, острый уголъ между тѣми же діаметрами своего minimum'а для двухъ діаметровъ $\overline{OD}$ и $\overline{OE}$, параллельныхъ хордамъ, проведеннымъ черезъ концы малой оси къ концамъ большой. Получаемые этимъ путемъ діаметры по длинѣ равны между собой, что слѣдуетъ изъ полной симметричности ихъ положенія относительно осей. Равные

сопряженные діаметры суть діагонали прямоугольника, построеннаго на осяхъ.

191. Приведенныя выше общія уравненія пары сопряженныхъ діаметровъ могутъ быть приведены къ такому виду

$$\beta = -\frac{l}{m}\alpha,\ \beta = \frac{Lm}{l}\alpha,$$

откуда, обозначая $-\frac{l}{m} = \lambda$, $\frac{Lm}{l} = \mu$, получимъ уравненія сопряженныхъ діаметровъ въ видѣ

$$\beta - \lambda\alpha = 0,\ \beta - \mu\alpha = 0, \tag{*}$$

причемъ

$$\lambda\mu = -\frac{l}{m}\cdot\frac{Lm}{l} = -L. \tag{**}$$

Послѣднее условіе (**) между параметрами пучковъ (*) показываетъ, что двѣ системы сопряженныхъ діаметровъ составляютъ инволюцію (см. § 78).

Если $L > 0$, то инволюція будетъ безъ двойныхъ элементовъ или, какъ иногда говорятъ, эллиптическая, какъ соотвѣтствующая діаметрамъ эллипса; если же $L < 0$, то инволюція будетъ гиперболическая, соотвѣтствующая діаметрамъ гиперболы, причемъ двойными элементами будутъ ассимптоты.

192. Ассимптоты гиперболы представляютъ своею совокупностью нѣкоторую кривую второго порядка, имѣющую ту же систему сопряженныхъ діаметровъ, что и любая гипербола, имѣющая ихъ своими ассимптотами. Это слѣдуетъ аналитически изъ того, что уравненія сопряженныхъ діаметровъ не зависятъ отъ коэффиціента P уравненія

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0,$$

и, слѣдовательно, тѣ же сопряженные діаметры будутъ при P не $= 0$, что и въ случаѣ $P = 0$, дающемъ ассимптоты.

193. Какъ слѣдствіе изъ разсужденій § 192 мы получимъ весьма важное правило для построенія сколько угодно точекъ одной и той же гиперболы, если задана одна точка и ассимптоты.

Проводимъ черезъ заданную точку сѣкущую. На этой сѣкущей ассимптоты образуютъ двѣ точки. Обѣ точки сѣченія сѣкущей съ гиперболой должны лежать на равныхъ разстояніяхъ отъ соотвѣтственныхъ точекъ сѣченія съ ассимптотами. Это слѣдуетъ изъ того, что средины отрѣзковъ, образующихся на сѣкущей гиперболою и ассимптотами, совпадаютъ, ибо лежатъ на діаметрѣ, сопряженномъ съ діаметромъ параллельнымъ разсматриваемой сѣкущей, а этотъ діаметръ одинъ и тотъ же для гиперболы, что и для ассимптотъ.

194. Какъ частный случай эллиптической инволюціи мы замѣтимъ такъ называемую круговую инволюцію, представляющую систему сопряженныхъ діаметровъ

круга. Отличительное свойство этой инволюціи состоитъ въ томъ, что каждая пара сопряженныхъ діаметровъ представляетъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя.

195. Всякую инволюцію двухъ пучковъ $\beta-\lambda\alpha=0$, $\beta-\mu\alpha=0$(1) можно разсматривать, какъ систему сопряженныхъ діаметровъ нѣкоторой линіи 2-го порядка.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, инволюція (1) опредѣляется уравненіемъ

(2) $$\mathfrak{A}\lambda\mu+\mathfrak{B}(\lambda+\mu)+\mathfrak{C}=0.$$

Найдемъ соотвѣтствующее коническое сѣченіе. Перемѣною начальныхъ элементовъ $\alpha=0$, $\beta=0$ заставимъ пропасть въ уравненіи (2) коэффиціентъ $\mathfrak{B}$. Положимъ

$$\lambda=\lambda_0+\lambda',\ \mu=\mu_0+\mu',$$

тогда получимъ

$$\mathfrak{A}\lambda'\mu'+\lambda'(\mathfrak{B}+\mu_0\mathfrak{A})+\mu'(\mathfrak{B}+\lambda_0\mathfrak{A})+\mathfrak{C}+\mathfrak{B}(\lambda_0+\mu_0)+\mathfrak{A}\lambda_0\mu_0=0,$$

отсюда, полагая

$$\lambda_0=\mu_0=-\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}},$$

получимъ

$$\lambda'\mu'=-\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}^2}=-L.$$

Итакъ, мы видимъ, что уравненія

$$\beta+\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\alpha-\lambda'\alpha=0,\ \beta+\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\alpha-\mu'\alpha=0,$$

при $\lambda'\mu'=-L$, опредѣляютъ сопряженные діаметра линіи втораго порядка

$$L\alpha^2+\left(\beta+\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\alpha\right)^2+P=0$$

(см. § 191), или окончательно

$$\mathfrak{A}\beta^2+2\mathfrak{B}\alpha\beta+\mathfrak{C}\alpha^2+P_1=0,$$

гдѣ

$$P_1=\mathfrak{A}^2P.$$

196. На основаніи соображеній § 146, мы замѣчаемъ, что, если возьмемъ за оси координатъ пару сопряженныхъ діаметровъ, то уравненіе эллипса можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{x^2}{a_1{}^2}+\frac{y^2}{b_1{}^2}=1,$$

гдѣ a_1 и b_1 суть не что иное, какъ длины полудіаметровъ, принятыхъ за оси.

Подобнымъ образомъ уравненіе гиперболы приведется къ виду

$$\frac{x^2}{a_1^{\,2}} - \frac{y^2}{b_1^{\,2}} = 1,$$

гдѣ a_1 и b_1 также полудіаметры, причемъ a_1 есть разстояніе отъ центра до конца діаметра, пересѣкающаго, а b_1—разстояніе отъ центра до точки, гдѣ другой діаметръ пересѣкаютъ гиперболу сопряженную.

197. Покажемъ замѣчательную зависимость между числами a_1, b_1, съ одной стороны, и полуосями a, b съ другой.

Представивъ уравненія эллипса и гиперболы въ видѣ

$$\pm\left[\frac{x}{a}\right]^2 + \left[\frac{y}{b}\right]^2 \mp 1 = 0,$$

гдѣ $$L = \pm 1, \quad \alpha = \frac{x}{a}, \ \beta = \frac{y}{b}, \quad P = \mp 1,$$

получимъ уравненія сопряженныхъ діаметровъ въ видѣ

$$l\,\frac{x}{a} + m\,\frac{y}{b} = 0, \ \pm m\,\frac{x}{a} - l\,\frac{y}{b} = 0,$$

или, полагая $\frac{l}{m} = \lambda$, получимъ такія уравненія

$$\lambda\,\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \pm\frac{x}{a} - \lambda\,\frac{y}{b} = 0.$$

Остановимся сначала на случаѣ эллипса

$$\lambda\,\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{x}{a} - \lambda\,\frac{y}{b} = 0. \tag{2}$$

Разстояніе до центра точки x_1, y_1, въ которой діаметръ (1) пересѣкаетъ эллипсъ, есть a_1

$$a_1^{\,2} = x_1^{\,2} + y_1^2 = x_1^{\,2} + \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x_1^{\,2}) = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}\,x_1^{\,2}.$$

Остается найти x_1. Изъ уравненія (1) получимъ

$$\frac{y_1}{b} = -\lambda\,\frac{x_1}{a}.$$

Подставляя въ уравненіе эллипса, получимъ

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 = 1,\ x_1{}^2 = \frac{a^2}{1+\lambda^2}.$$

Получаемъ

$$a_1{}^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{1+\lambda^2} = \frac{a^2+\lambda^2 b^2}{1+\lambda^2}. \tag{3}$$

Подобнымъ образомъ, называя черезъ b_1 разстояніе отъ центра до точки (x_2, y_2), въ которой пересѣкаетъ эллипсъ другой діаметръ (2), получимъ

$$b_1{}^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}\ x_2{}^2.$$

Но, на основаніи уравненія (2),

$$\frac{y_2}{b} = \frac{1}{\lambda}\ \frac{x_2}{a};$$

отсюда

$$\frac{x_2{}^2}{a^2} + \frac{1}{\lambda^2}\ \frac{x_2{}^2}{a^2} = 1$$

и, наконецъ,

$$x_2{}^2 = \frac{\lambda^2 a^2}{1+\lambda^2}.$$

Окончательно получаемъ

$$b_1{}^2 = b^2 + \frac{(a^2 - b^2)\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{\lambda^2 a^2 + b^2}{1+\lambda^2}. \tag{4}$$

Складывая равенства (3) и (4), получаемъ

$$a_1{}^2 + b_1{}^2 = \frac{a^2 + \lambda^2 b^2 + a^2\lambda^2 + b^2}{1+\lambda^2} = a^2 + b^2.$$

Послѣднее равенство выражаетъ теорему.

Теорема. Сумма квадратовъ двухъ сопряженныхъ полудіаметровъ эллипса есть величина постоянная, равная суммѣ квадратовъ полуосей.

198. Найдемъ уголъ между двумя сопряженными діаметрами. Обозначимъ черезъ φ и ψ углы, составленные діаметрами (1) и (2)

съ осью x-овъ, тогда будемъ имѣть

$$tg\varphi = -\lambda \frac{b}{a},\ tg\psi = +\frac{1}{\lambda}\frac{b}{a}$$

$$tg(\psi - \varphi) = \frac{\frac{1}{\lambda}\frac{b}{a} + \frac{\lambda b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{ab(1+\lambda^2)}{\lambda(a^2 - b^2)}$$

$$sin(\psi - \varphi) = \frac{ab(1+\lambda^2)}{\sqrt{(a^2+\lambda^2 b^2)(a^2\lambda^2 + b^2)}}\ .$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что

$$a_1 b_1 sin(\psi - \varphi) = \sqrt{\frac{a^2+\lambda^2 b^2}{1+\lambda^2}}\sqrt{\frac{a^2\lambda^2+b^2}{1+\lambda^2}}\frac{ab(1+\lambda^2)}{\sqrt{(a^2+\lambda^2 b^2)(a^2\lambda^2+b^2)}} = ab.$$

Послѣднее равенство выражаетъ теорему.

Теорема. Площадь параллелограма, составленнаго полудіаметрами a_1, b_1, въ эллипсѣ, есть величина постоянная, равная площади прямоугольника, составленнаго полуосями.

Теоремы послѣднихъ двухъ параграфовъ принадлежатъ знаменитому александрійскому геометру Аполлонію.

Аналогичныя теоремы имѣютъ мѣсто и для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$(1)\quad \lambda\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0. \qquad (2)\quad \frac{x}{a} + \lambda\frac{y}{b} = 0.$$

$$x_1^2 = \frac{a^2}{1-\lambda^2},\quad a_1^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}x_1^2 - b^2 = \frac{a^2+\lambda^2 b^2}{1-\lambda^2}\ .$$

Для сопряженной гиперболы получимъ

$$x_2^2 = \frac{a^2\lambda^2}{1-\lambda^2},\quad b_1^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}\lambda^2 + b^2 = \frac{a^2\lambda^2+b^2}{1-\lambda^2}\ .$$

Вычитая, получимъ

$$a_1^2 - b_1^2 = \frac{a^2 + \lambda^2 b^2 - a^2\lambda^2 - b^2}{1-\lambda^2} = a^2 - b^2,$$

что даетъ теорему.

Теорема. Разность квадратовъ полудіаметровъ есть для гиперболы величина постоянная, равная разности квадратовъ полуосей.

Подобнымъ образомъ найдемъ уголъ между двумя сопряженными діаметрами

$$tg(\psi - \varphi) = \frac{ab(1-\lambda^2)}{\lambda(a^2+b^2)},$$

откуда

$$a_1 b_1 \sin(\psi - \varphi) = ab.$$

Теорема. Параллелограмъ, построенный на полудіаметрахъ равенъ по площади прямоугольнику построенному на полуосяхъ.

199. Уголъ между двумя сопряженными діаметрами мѣняется для эллипса въ зависимости отъ измѣненія $\frac{1+\lambda^2}{\lambda}$, а для гиперболы въ зависимости отъ $\frac{1-\lambda^2}{\lambda}$. Для всѣхъ положительныхъ значеній λ выраженіе

$$\frac{1+\lambda^2}{\lambda} > 2, \text{ ибо } \frac{1+\lambda^2}{\lambda} - 2 = \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} > 0$$

и, слѣдовательно, имѣетъ наименьшее значеніе равное 2 при $\lambda = 1$. И такъ, мы видимъ, что въ эллипсѣ два діаметра

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

составляютъ наименьшій острый уголъ, что мы уже видѣли.

Для гиперболы выраженіе $\frac{1-\lambda^2}{\lambda}$ для положительныхъ λ не имѣетъ minimum'а и можетъ мѣняться отъ $+\infty$ до $-\infty$. Оно обращается въ 0 при $\lambda = +1$ $\lambda = -1$, что даетъ ассимптоты.

200. Въ эллипсѣ при $\lambda = 1$ получаются равные сопряженные діаметры, ибо тогда

$$a_1{}^2 = \frac{a^2+b^2}{2}, \; b_1{}^2 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

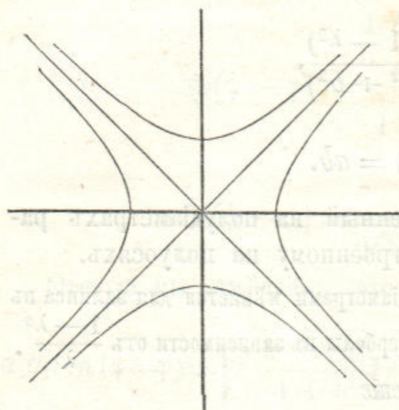
Въ гиперболѣ равныхъ сопряженныхъ діаметровъ или совсѣмъ нѣтъ, или же всѣ сопряженные діаметры равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, равенство

$$a_1{}^2 - b_1{}^2 = a^2 - b^2$$

показываетъ что a_1 можетъ равняться b_1 лишь въ томъ случаѣ, если $a = b$.

Если послѣднее условіе имѣетъ мѣсто, то гипербола называется

равностороннею и всѣ ея сопряженные діаметры равны между собою, что слѣдуетъ изъ приведеннаго равенства.



Черт. 80.

Уравненіе равносторонней гиперболы будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

или

$$x^2 - y^2 = a^2 .$$

Равносторонняя гипербола занимаетъ такое же мѣсто по отношенію къ разносторонней, какое кругъ занимаетъ по отношенію къ эллипсу.

Равносторонняя гипербола имѣетъ взаимно - перпендикулярныя ассимптоты и поворотомъ на $90°$ вокругъ центра можетъ быть совмѣщена съ гиперболою съ ней сопряженною (см. черт. 80)

$$y^2 - x^2 = a^2$$

Фокусы и директрисы.

201. Для каждой кривой второго порядка всегда существуетъ на плоскости нѣкоторая точка, обладающая тѣмъ свойствомъ, что разстояніе отъ нея каждой точки кривой выражается цѣлою раціональною функціею координатъ послѣдней. Такая точка называется фокусомъ кривой.

202. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ намъ дана кривая самымъ общимъ уравненіемъ (A)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \ . \ . \ . (A)$$

Если назовемъ неизвѣстныя координаты фокуса F черезъ α и β и возьмемъ на кривой какую либо точку M (x, y), то разстояніе MF должно выражаться въ видѣ линейной функціи отъ координатъ x и y точки M, т. е. въ видѣ: $lx + my + n$, гдѣ l, m и n суть нѣкоторыя числа. Съ другой стороны, мы знаемъ, что разстояніе MF,

какъ разстояніе между двумя точками, выражается такъ:

$$+\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2},$$

слѣдовательно,

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=lx+my+n,$$

или

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(lx+my+n)^2,$$

или, наконецъ,

$$x^2(1-l^2)-2lmxy+y^2(1-m^2)-2x(\alpha+ln)-$$
$$-2y(\beta+mn)+(\alpha^2+\beta^2-n^2)=0.$$

Такъ какъ въ этомъ уравненіи x и y суть координаты произвольной точки кривой, заданной уравненіемъ (A), то оно должно удовлетворяться одновременно съ уравненіемъ (A), т. е. оно должно быть равносильно съ уравненіемъ (A), а потому ихъ коэффиценты должны быть препорціональны

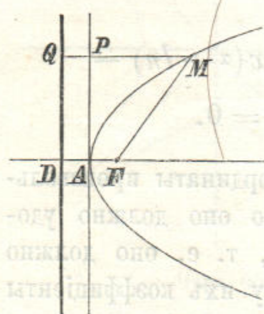
$$\frac{A}{1-l^2}=\frac{B}{-lm}=\frac{C}{1-m^2}=\frac{D}{-(\alpha+ln)}=\frac{E}{-(\beta+mn)}=\frac{F}{\alpha^2+\beta^2-n^2}.$$

Послѣднее равенство шести дробей даетъ, вообще говоря, пять различныхъ уравненій, изъ которыхъ возможно всегда опредѣлить величины α, β, l, m и n по коэффиціентамъ уравненія (A), и тогда разстояніе каждой точки кривой отъ фокуса будетъ равно $lx+my+n$, гдѣ l, m и n будутъ уже величины вполнѣ извѣстныя. Если это выраженіе разстоянія отъ фокуса приравняемъ нулю, то, очевидно, получимъ уравненіе нѣкоторой прямой $lx+my+n=0$, которая называется *директрисой*.

203. Показавъ существованіе фокуса и возможность его отысканія въ общемъ случаѣ кривой второго порядка, для болѣе подробнаго изученія свойствъ фокусовъ и директрисъ обратимся къ упрощеннымъ уравненіямъ различныхъ видовъ кривыхъ второго порядка.

204. Предварительно сдѣлаемъ одно замѣчаніе, которое въ значительной мѣрѣ упрощаетъ нахожденіе фокуса. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе кривыхъ 2 го порядка въ простѣйшемъ видѣ не содержитъ коэффиціента при произведеніи координатъ, другими словами $B=0$. Отсюда замѣчаемъ, что должно быть $lm=0$, откуда или $l=0$, или

$m = 0$. Если мы будемъ за ось x-овъ выбирать одну изъ осей симметріи, какъ мы это дѣлали при разсмотрѣніи эллипса, гиперболы и параболы, то придется ограничиться случаемъ $m = 0$, ибо случай $l = 0$ не даетъ вещественныхъ рѣшеній. Другими словами, можно будетъ фокусъ опредѣлить какъ точку, разстояніе которой отъ точки на кривой опредѣляется линейно черезъ абсциссу x послѣдней точки.



Черт. 81.

205. Начнемъ съ параболы (см. черт. 81). Мы уже видѣли, что уравненіе параболы, отнесенной къ оси симметріи и касательной въ вершинѣ приводится къ такому простому виду: $y^2 = 2px$.

Если назовемъ координаты искомаго фокуса черезъ α и β, то разстояніе до фокуса всякой точки M, взятой на параболѣ, выразится такъ

$$R = +\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2},$$

слѣдовательно,

$$R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2.$$

Такъ какъ для всякой точки параболы $y = \pm\sqrt{2px}$, то

$$R^2 = (x-\alpha)^2 + [\pm\sqrt{2px} - \beta]^2 = x^2 + 2(p-\alpha)x + \alpha^2 \mp$$
$$\mp 2\beta\sqrt{2px} + \beta^2.$$

Такъ какъ разстояніе до фокуса должно выражаться раціонально черезъ координату x, то подавно квадратъ этого разстоянія долженъ быть раціоналенъ, а это возможно лишь при условіи $\beta = 0$. Тогда $R^2 = x^2 + 2(p-\alpha)x + \alpha^2$. Чтобы R было функціей раціональной, необходимо, чтобы $x^2 + 2(p-\alpha)x + \alpha^2$ было полнымъ квадратомъ; необходимое условіе этого состоитъ въ томъ, чтобы $(p-\alpha)^2 = \alpha^2$ или $p - \alpha = \alpha$, $\alpha = \frac{p}{2}$. Итакъ, мы нашли координаты фокуса параболы $\alpha = \frac{p}{2}$ и $\beta = 0$, слѣдовательно, фокусъ лежитъ на оси симметріи параболы отъ вершины ея въ разстояніи равномъ полупараметру $\frac{p}{2}$. Вставивъ найденныя координаты фокуса въ выраженіе R, найдемъ выраженіе для разстоянія любой точки параболы отъ фокуса въ та-

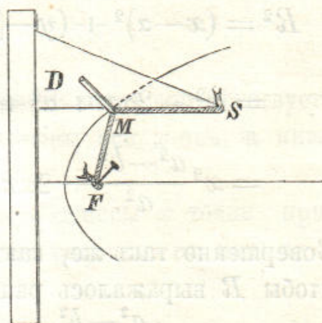
комъ видѣ

$$R = +\sqrt{x^2 + 2\left(p - \frac{p}{2}\right)x + \frac{p^2}{4}} = x + \frac{p}{2}.$$

206. Если приравняемъ полученное выраженіе нулю, то получимъ уравненіе директрисы $x + \frac{p}{2} = 0$, или $x = -\frac{p}{2}$. Изъ этого уравненія видно, что директриса есть прямая, параллельная оси y-овъ и отстоящая отъ нея на разстояніи $\frac{p}{2}$, но только въ другую сторону отъ фокуса, такъ что вершина дѣлитъ разстояніе фокуса отъ директрисы пополамъ. На чертежѣ 81 директриса означена буквами DQ. Изъ уравненія директрисы мы видимъ, что разстояніе любой точки параболы отъ нея будетъ равно $x + \frac{p}{2}$. Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ разстоянія точки до фокуса, приходимъ къ такой теоремѣ:

Теорема. Парабола есть геометрическое мѣсто точекъ, разстояніе которыхъ до фокуса равно разстоянію до директрисы. На нашемъ чертежѣ $MF = MQ$.

207. Высказанная теорема даетъ возможность чертить параболу непрерывнымъ движеніемъ. Если требуется начертить параболу по фокусу F и директрисѣ D (см. черт. 82), то поступаютъ такимъ образомъ: прикладываютъ линейку къ директрисѣ, къ ней прикладываютъ однимъ катетомъ треугольникъ такъ, чтобы другой катетъ шелъ параллельно оси параболы; затѣмъ укрѣпляютъ нить въ фокусѣ F и, пропустивъ ее около острія карандаша, поставленнаго въ точкѣ M, принадлежащей параболѣ, другой конецъ укрѣпляютъ на треугольникѣ въ точкѣ S; если теперь, удерживая карандашъ постоянно около треугольника и натягивая имъ нить, будемъ передвигать треугольникъ по линейкѣ, то остріе карандаша будетъ вычерчивать параболу. Въ самомъ дѣлѣ, при началѣ карандашъ устанавливается такъ, что $MF = MD$, слѣдовательно $MS + MF = MS + MD = DS$,

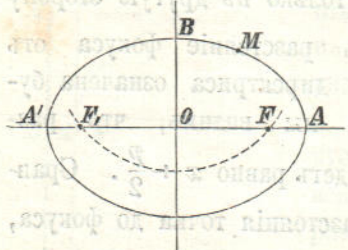


Черт. 82.

т. е. длина нити равна длинѣ катета. При всякомъ новомъ положеніи карандаша M, длина нити $MS =$ части длины катета MS, или $MF = MD$, т. е. точка M всегда остается въ равномъ разстояніи отъ фокуса и директрисы и, слѣдовательно, всегда остается на параболѣ.

208. Перейдемъ теперь къ отысканію положенія и свойствъ фокуса для эллипса (см. черт. 83). Уравненіе эллипса будемъ разсматривать въ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (*),$$



Черт. 83.

къ которому оно приводится, какъ мы уже знаемъ, если за оси координатъ принять оси эллипса. Если искомыя координаты фокуса назовемъ черезъ α и β, то разстояніе каждой точки $M(x, y)$ на эллипсѣ отъ фокуса выразится такъ: $R = \pm\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$, или $R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$. Изъ уравненія (*) найдемъ для каждой точки эллипса $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, слѣдовательно,

$$R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (x-\alpha)^2 + \left(\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} - \beta\right)^2 =$$

$$= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \mp 2\beta\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} + \beta^2 =$$

$$= x^2\frac{a^2-b^2}{a^2} - 2\alpha x + (\alpha^2 + b^2) \mp 2\beta\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} + \beta^2.$$

Совершенно такъ же, какъ и для параболы, на основаніи требованія, чтобы R выражалось раціонально черезъ абсциссу точки M, найдемъ $\beta = 0$ и $\frac{a^2-b^2}{a^2}(\alpha^2 + b^2) = \alpha^2$, откуда $\alpha = \pm\sqrt{a^2-b^2} = \pm c$. Итакъ, для эллипса существуютъ два фокуса F и F_1, которые оба лежатъ на большой оси симметрично по обѣ стороны отъ центра, на разстояніи $c = \sqrt{a^2-b^2}$.

209. Такъ какъ, очевидно, $\sqrt{a^2-b^2} < a$, то, слѣдовательно, оба фокуса лежатъ внутри очертанія эллипса. Если изъ вершины эллипса B, соотвѣтствующей малой оси, опишемъ окружность радіусомъ равнымъ

большой полуоси, то она пересѣчетъ большую ось въ двухъ точкахъ F и F_1, которыя и суть искомые фокусы; въ самомъ дѣлѣ, изъ прямоугольнаго треугольника BFO, гдѣ гипотенуза $BF = a$ и катетъ $BO = b$, найдемъ

$$OF = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Разстояніе отъ центра до фокуса называется *линейнымъ эксцентриситетомъ* эллипса, но обыкновенно вводится въ разсмотрѣніе, такъ называемый, *астрономическій* эксцентриситетъ e, который представляетъ отношеніе линейнаго эксцентриситета c къ длинѣ большой полуоси a.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

210. Вставивъ найденныя значенія координатъ фокуса $\alpha = \pm c$, $\beta = 0$ въ выраженіе R^2, квадрата разстоянія точки M до фокуса, получимъ его въ такомъ видѣ:

$$R^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + b^2) =$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 \mp 2\sqrt{a^2 - b^2}.x + a^2 = e^2x^2 \mp 2aex + a^2,$$

откуда

$$R = \pm(a \mp ex).$$

Внутри скобокъ послѣдней формулы верхній знакъ соотвѣтствуетъ фокусу F, лежащему съ положительной стороны оси x-овъ, а нижній знакъ другому фокусу F_1.

Такъ какъ $e < 1$, абсолютная величина абсциссы x точки, принадлежащей эллипсу меньше a, то абсолютная величина ex меньше a, а потому въ формулѣ

$$R = \pm(a \mp ex)$$

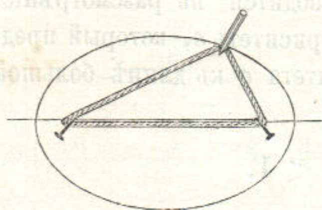
передъ скобками надо взять знакъ $+$, чтобы R выходило положительнымъ, какъ это по существу и должно быть.

Итакъ, мы видимъ, что для каждой точки эллипса разстояніе R до фокуса F будетъ выражаться формулою $a - ex$, а разстояніе R_1 до другого фокуса F_1 формулою $a + ex$. Отсюда очевидно, что,.

$$R + R_1 = 2a.$$

Итакъ, для каждой точки эллипса сумма разстояній до фокусовъ, или сумма, такъ называемыхъ, радіусовъ векторовъ есть величина постоянная, равная $2a$.

211. Это свойство эллипса можетъ быть положено въ основу его опредѣленія, какъ геометрическаго мѣста точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ есть величина постоянная и даетъ возможность чертить эллипсъ непрерывнымъ движеніемъ. Для этого слѣдуетъ взять нить длиною равною требуемой длинѣ большой оси, укрѣпить концы ея въ фокусахъ и, натянувъ остріемъ карандаша нить, передвигать карандашъ такъ, чтобы онъ скользилъ по нити, постоянно ее натягивая: остріе карандаша при этомъ будетъ вычерчивать эллипсъ. Можно поступать еще такъ, какъ показано на чертежѣ 84. Взять нить длиною $2c+2a$; укрѣпить въ фокусахъ двѣ булавки и накинуть на нихъ нить, связанную концами, тогда натянувъ нить остріемъ карандаша можемъ начертить эллипсъ, двигая карандашъ вокругъ фокусовъ.



Черт. 84.

212. Если приравняемъ нулю выраженія радіусовъ векторовъ, то получимъ уравненія директрисъ. Въ эллипсѣ будетъ двѣ директрисы, соотвѣтственно двумъ фокусамъ: фокусу F будетъ соотвѣтствовать директриса $a-ex=0$, или $x=\frac{a}{e}$, а фокусу F_1 будетъ соотвѣтствовать директриса $a+ex=0$ или $x=-\frac{a}{e}$. Изъ этихъ уравненій видно, что директрисы суть прямыя, параллельныя малой оси и, слѣдовательно, перпендикулярныя къ большой. Далѣе, такъ какъ e для эллипса <1, то $\frac{a}{e}>a$, слѣдовательно, директрисы пересѣкаютъ только продолженіе большой оси и находятся внѣ очертанія эллипса. Очевидно, также, что директрисы расположены симметрично по обѣ стороны отъ центра на равныхъ разстояніяхъ. Если даны оси эллипса, то построеніе директрисъ можно сдѣлать такимъ образомъ (см. черт. 85): на большой оси, какъ на діаметрѣ, опишемъ окружность, изъ фокуса F возставимъ перпендикуляръ FP, до пересѣченія съ окружностью и въ точкѣ P проведемъ къ описанному кругу касательную: точка D ея пересѣченія съ большой осью опредѣлитъ положеніе директрисы MN.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ прямоугольнаго треугольника OPD найдемъ:

$$OP^2 = OD.OF,$$

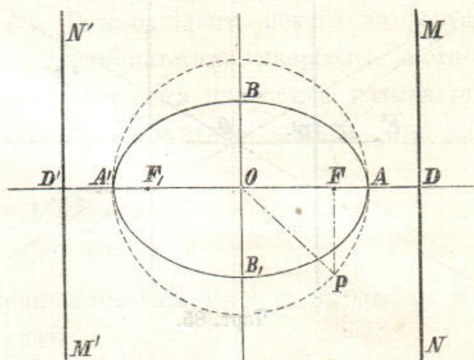
или

$$a^2 = OD\sqrt{a^2 - b^2},$$

откуда

$$OD = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a}{e},$$

что и требовалось доказать. Другая директриса $M'N'$ будетъ лежать по другую сторону центра на разстояніи $OD' = OD$.



Черт. 85.

213. Мы нашли уравненія директрисъ

$$x \mp \frac{a}{e} = 0$$

поэтому для всякой точки, взятой на эллипсѣ, разстояніе до директрисы будетъ

$$d = \pm\left(x \mp \frac{a}{e}\right).$$

Чтобы это разстояніе выражалось положительной величиной, необходимо эту формулу переписать въ такомъ видѣ

$$d = \frac{a \mp ex}{e}.$$

Разстояніе же той же самой точки до соотвѣтственнаго фокуса будетъ:

$$R = a \mp ex,$$

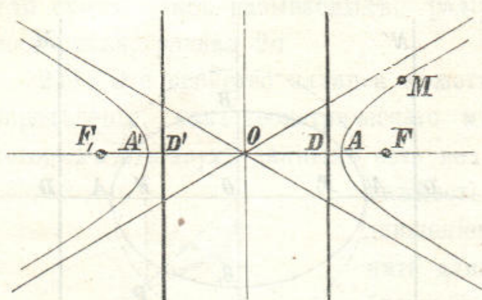
слѣдовательно, для каждой точки эллипса отношеніе

$$\frac{R}{d} = e = const.$$

Отсюда вытекаетъ опредѣленіе эллипса: эллипсъ есть геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе разстояній которыхъ отъ нѣкоторой данной точки F и данной прямой D, есть величина постоянная, меньшая единицы.

214. Намъ остается теперь разсмотрѣть свойства директрисъ и фо-

кусовъ гиперболы (см. черт. 86). Уравненіе гиперболы, отнесенное къ осямъ симметріи, имѣетъ видъ



Черт. 85.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (*)$$

Если назовемъ неизвѣстныя координаты фокуса черезъ α и β, то квадратъ растоянія каждой точки M, взятой на гиперболѣ, до фокуса выразится такъ

$$R^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

или, подставляя на основаніи уравненія (*) вмѣсто y равную ему величину

$$\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

$$R^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 =$$

$$= x^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} - 2\alpha x + (\alpha^2 - b^2) \mp 2\beta \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} + \beta^2.$$

Такъ какъ R должно быть раціональной функціей отъ x, то

$$\beta = 0 \text{ и } x^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} - 2\alpha x + (\alpha^2 - b^2)$$

должно представлять полный квадратъ, т. е.

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} (\alpha^2 - b^2) = \alpha^2,$$

откуда

$$\alpha = \pm \sqrt{a^2 + b^2} = \pm c.$$

Итакъ, фокусовъ у каждой гиперболы два; они лежатъ на ея дѣйствительной оси, симметрично относительно центра: абсцисса одного $= + \sqrt{a^2 + b^2} = c$, а другого $= - \sqrt{a^2 + b^2} = - c$. Такъ какъ, очевидно, $\sqrt{a^2 + b^2}$ по обсолютной величинѣ $> a$, то, слѣдовательно, оба фокуса лежатъ на оси далѣе вершинъ A и A_1 отъ центра, внутри очертанія гиперболы. Полученныя выраженія для координатъ фокусовъ гиперболы можно было бы предвидѣть и не производя приведенныхъ вы-

кладокъ, по сравненію съ эллипсомъ, принявъ во вниманіе, что уравненіе гиперболы отличается отъ уравненія эллипса только тѣмъ, что здѣсь вмѣсто $(+b^2)$ стоитъ $(-b^2)$. Разстояніе отъ центра до фокуса $c = OF$ называется *линейнымъ* эксцентриситетомъ гиперболы, а отношеніе e линейнаго эксцентриситета къ длинѣ полуоси a называется *астрономическимъ* эксцентриситетомъ. Не трудно видѣть, что для гиперболы

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

215. Если подставимъ найденныя значенія α и β въ выраженіе R^2, то представимъ его въ такомъ видѣ

$$R^2 = x^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} \pm 2x\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 = e^2x^2 \pm 2aex + a^2,$$

откуда

$$R = \pm (ex \pm a).$$

Знакъ — въ скобкахъ будетъ соотвѣтствовать разстоянію до фукуса F лежащаго съ положительной стороны оси x-овъ и знакъ + будетъ соотвѣтствовать разстоянію до фокуса F_1. Знакъ же передъ скобками нужно выбирать такъ, чтобы для R получалось значеніе положительное. Замѣтимъ, что для точекъ гиперболы x по абсолютной величинѣ всегда $> a$ и $e > 1$, слѣдовательно, ex, по абсолютной величинѣ, всегда $> a$. Если возьмемъ точку на правой вѣтви гиперболы, для которой x всегда положительно и $> a$, то выраженія $(ex - a)$ и $(ex + a)$ будутъ положительны и потому передъ скобками возьмемъ знакъ +. Если же возьмемъ точку на лѣвой вѣтви гиперболы, для которой $x < 0$, то $(ex - a)$ и $(ex + a)$ будутъ величины отрицательныя и потому передъ скобками надо взять знакъ минусъ.

Итакъ, если назовемъ разстояніе до фокуса F черезъ R и до фокуса F_1 черезъ R_1, то

$$R = \pm (ex - a) \text{ и } R_1 = \pm (ex + a),$$

причемъ + передъ скобками нужно брать для точекъ, лежащихъ на правой вѣтви гиперболы, а — для точекъ, лежащихъ на лѣвой вѣтви ея. Отсюда не трудно видѣть, что для всѣхъ точекъ гиперболы

$$R_1 - R = \pm 2a;$$

для правой вѣтви

$$R_1 - R = +2a,$$

а для лѣвой

$$R_1 - R = -2a,$$

т. е.

$$R - R_1 = 2a.$$

Отсюда вытекаетъ такая теорема: гипербола есть геометрическое мѣсто точекъ, разность разстояній которыхъ отъ фокусовъ F и F_1 равняется постоянной величинѣ, длинѣ дѣйствительной оси гиперболы.

216. Если приравняемъ нулю выраженіе разстоянія точки гиперболы до фокуса, то получимъ уравненіе директрисы. У гиперболы будетъ двѣ директрисы; фокусу F соотвѣтствуетъ директриса D

$$ex - a = 0, \text{ или } x = \frac{a}{e};$$

фокусу F_1—директриса D_1,

$$ex + a = 0, \text{ или } x = -\frac{a}{e}.$$

Изъ этихъ уравненій видно, что директрисы перпендикулярны къ дѣйствительной оси гиперболы и лежатъ по обѣ стороны отъ центра въ разстояніи $\frac{a}{e}$. Такъ какъ $e > 1$, то $\frac{a}{e} < a$, и мы заключаемъ, что директрисы пересѣкаютъ ось внѣ очертанія гиперболы. По извѣстнымъ уже намъ формуламъ, разстояніе каждой точки гиперболы до фокуса F будетъ

$$r = \pm(ex - a),$$

а до директрисы D, соотвѣтствующей фокусу F, будетъ

$$d = \pm\left(\frac{ex - a}{e}\right),$$

слѣдовательно, $\frac{r}{d}$ = постоянной величинѣ $= e > 1$. Слѣдовательно, гиперболу можно еще опредѣлить, какъ геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ нѣкоторой точки, называемой фокусомъ, и отъ нѣкоторой прямой, называемой директрисой находятся между собою въ постоянномъ отношеніи, $e > 1$.

217. **Задача**. По данному очертанію гиперболы, найти ея фокусы и директрисы (черт. 87).

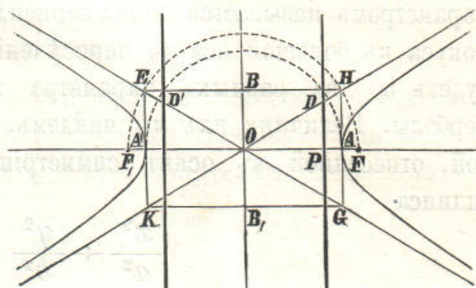
Строимъ на осяхъ AA' и BB' прямоугольникъ $EHGK$, діагонали котораго суть ассимптоты гиперболы KH и EG.

Если изъ центра O радіусомъ равнымъ $OF = OH$ проведемъ окружность, то она пересѣчетъ ось симметріи въ точкахъ F и F_1, которыя и будутъ фокусами, ибо абсциссы ихъ OF и OF_1, равныя между собою, по абсолютной величинѣ равны

$$OH = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Остается найти директрисы. Уравненіе директрисы, соотвѣтствующей фокусу F, будетъ $ex - a = o$ или

$$x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}, \text{ гдѣ } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Черт. 87.

Если изъ центра O радіусомъ OA опишемъ окружность, то она пересѣчетъ ассимптоту OH въ точкѣ D, которая принадлежитъ директрисѣ, ибо абсцисса ея OP, на основаніи подобія треугольниковъ ODP и OAH, удовлетворяетъ слѣдующей пропорціи

$$\frac{OP}{OD} = \frac{OA}{OH} \text{ или } \frac{OP}{a} = \frac{a}{c},$$

откуда

$$OP = \frac{a^2}{c},$$

что и требовалось доказать. Другая-же директриса D' будетъ лежать по другую сторону отъ центра въ равномъ разстояніи.

Уравненія кривыхъ второго порядка, отнесенныя къ вершинѣ и къ оси симметріи и свойства ихъ касательныхъ.

218. Выберемъ за ось x-овъ ось симметріи кривой, а за ось y-овъ касательную въ вершинѣ и притомъ такъ, чтобы кривая расположилась по правую сторону отъ послѣдней. Но предварительно введемъ понятіе о параметрахъ кривыхъ второго порядка, которое даетъ возможность придать преобразованнымъ уравненіямъ болѣе простой и симметричный видъ. Мы уже видѣли, что въ параболѣ пара-

метръ p есть не что иное, какъ длина перпендикуляра, возстановленнаго изъ фокуса до пересѣченія съ кривою, иначе говоря, это есть ордината фокуса.

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ уравненіи параболы $y^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2}$, получимъ $y = \pm p$. По аналогіи и въ эллипсѣ и въ гиперболѣ параметромъ называется длина перпендикуляра, возстановленнаго изъ фокуса къ большой оси до пересѣченія съ кривой. Здѣсь, очевидно, будетъ по два равныхъ параметра какъ у эллипса, такъ и у гиперболы. Величину ихъ мы найдемъ, положивъ въ уравненіи кривой, отнесенной къ осямъ симметріи, $x = \pm c$. Если въ уравненіи эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

положимъ

$$x = \pm\sqrt{a^2 - b^2},$$

то получимъ

$$y = \pm\frac{b^2}{a},$$

такъ что

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Для гиперболы, положивъ въ уравненіи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x = \pm\sqrt{a^2 + b^2},$$

найдемъ

$$y = \pm\frac{b^2}{a},$$

откуда параметръ будетъ равенъ $\frac{b^2}{a}$, Итакъ, мы видимъ, что въ гиперболѣ, а равно и въ эллипсѣ, малая полуось есть средняя пропорціональная между параметромъ и большой полуосью, и параметръ $p = \frac{b^2}{a}$.

219. Приступимъ теперь къ преобразованію уравненія кривыхъ второго порядка къ оси симметріи и касательной въ вершинѣ. Для

параболы мы уже имѣемъ преобразованное такимъ образомъ уравненіе: $y^2 = 2px$. Остается преобразовать уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Такъ какъ здѣсь преобразованіе ограничивается перенесеніемъ начала, безъ измѣненія направленія осей, то формулы преобразованія будутъ: $x = a + x'$ и $y = b + y'$, гдѣ a и b суть координаты новаго начала относительно старой системы.

Преобразуемъ уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

полагая $x = -a + x'$ и $y = y'$, получимъ

$$\frac{(-a + x')^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,\ y'^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x' - \frac{b^2}{a^2}\,x'^2,$$

или, замѣняя $\frac{b^2}{a}$ черезъ p, получимъ $y'^2 = 2px' - \frac{p}{a}\ x'^2$.

Точно также для гиперболы найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x = a + x',\ y = y',\ \frac{(a + x')^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

$$y'^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x' + \frac{b^2}{a^2}\,x'^2,\ y'^2 = 2px' + \frac{p}{a}\,x'^2.$$

Въ случаѣ эллипса мы переносимъ начало координатъ въ вершину, лежащую съ отрицательной стороны оси x-овъ, а при гиперболѣ въ вершину, лежащую съ положительной стороны оси x-овъ.

Сравнивая полученныя уравненія:

$$y^2 = 2px,\ y^2 = 2px + \frac{p}{a}\,x^2 \text{ и } y^2 = 2px - \frac{p}{a}\,x^2,$$

мы замѣчаемъ, что если возьмемъ параболу, эллипсъ и гиперболу съ однимъ и тѣмъ-же параметромъ p, то увидимъ, что, при од-

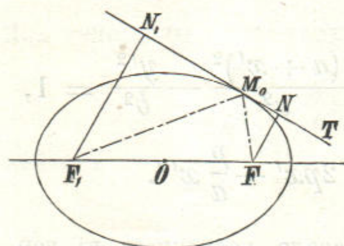
ной и той-же абсциссѣ, ординаты гиперболы будутъ наибольшія, а эллипса—наименьшія, а у параболы онѣ будутъ имѣть среднее значеніе, и, слѣдовательно, эллипсъ всѣми своими точками будетъ лежать внутри параболы, а гипербола— внѣ ея (черт. 88). Далѣе, если, оставляя ту-же величину параметра p_1, будемъ безпредѣльно увеличивать большую ось a, то добавочные члены

$$-\frac{p}{a}x^2 \text{ и } +\frac{p}{a}x^2,$$

которыми уравненія эллипса и гиперболы отличаются отъ уравненія параболы, будутъ безпредѣльно уменьшаться и въ предѣлѣ обратятся въ нуль; тогда уравненія эллипса и гиперболы сдѣлаются тожественными съ уравненіемъ параболы, и самыя кривыя сольются. Слѣдовательно, параболу можно разсматривать какъ предѣльное положеніе, къ которому стремятся эллипсъ и гипербола, если, при постоянномъ параметрѣ p, большая ихъ ось безпредѣльно возрастаетъ.

Черт. 88.

220. Въ эллипсѣ касательная составляетъ одинаковые углы съ радіусами векторами, проведенными изъ фокусовъ къ точкѣ касанія.



Черт. 89.

Возьмемъ на эллипсѣ точку M_0 (x_0, y_0) и проведемъ въ этой точкѣ касательную къ эллипсу (см. черт. 89)

$$\frac{\xi x_0}{a^2}+\frac{\eta y_0}{b^2}-1=0. \quad (1)$$

Опускаемъ на касательную (1) изъ фокусовъ F и F_1 перпендикуляры, тогда получимъ:

$$\sin FM_0N=\frac{FN}{FM_0},\ \sin\ F_1M_0N_1=\frac{F_1N_1}{F_1M_0};$$

на основаніи извѣстнаго уже

$$FM_0=a-ex_0,\ F_1M_0=a+ex_0$$

Остается найти FN и F_1N_1, т. е. разстоянія фокусовъ до касательной.

Разстояніе FN найдемъ, какъ разстояніе точки F ($\xi = +c$, $\eta = 0$) отъ прямой (1); это разстояніе будетъ:

$$FN = \frac{\frac{cx_0}{a^2} - 1}{-\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{1}{a \cdot R} \cdot (a - ex_0),$$

гдѣ

$$R = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}.$$

Подобнымъ-же образомъ разстояніе другого фокуса F_1 до касательной (1) опредѣлится, какъ разстояніе отъ точки F_1 ($\xi = -c$, $\eta = 0$):

$$F_1N_1 = \frac{\frac{-cx_0}{a^2} - 1}{-R} = \frac{1}{aR}\,(a + ex_0)$$

и, наконецъ,

$$sin\, FM_0N = \frac{FN}{FM_0} = \frac{a - ex_0}{aR} \cdot \frac{1}{a - ex_0} = \frac{1}{aR}$$

$$sin\, F_1M_0N_1 = \frac{F_1N_1}{F_1M_0} = \frac{a + ex_0}{aR} \cdot \frac{1}{a + ex_0} = \frac{1}{aR}$$

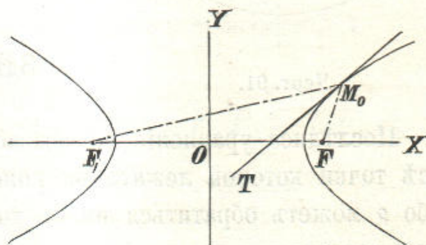
отсюда

$$sin\, FM_0N = sin\, F_1M_0N_1$$

и, наконецъ,

$$\angle\, FM_0N = \angle\, F_1M_0N_1,$$

что и требовалось доказать.



Черт. 90.

Для гиперболы будетъ существовать аналогичное свойство, а именно: касательная M_0T въ точкѣ M_0 гиперболы (см. черт. 90) дѣлитъ пополамъ уголъ FM_0F_1, составляемый радіусами векторами M_0F и F_1M_0, проведенными къ точкѣ касанія изъ фокусовъ.

Доказательство то-же, что и для эллипса. Для параболы фокусъ F_1 лежитъ на безконечности, и прямая M_0F_1 параллельна оси x-овъ.

Уравненіе кривыхъ второго порядка въ полярныхъ координатахъ.

221. Выведенныя уже нами выраженія радіусовъ-векторовъ, т. е. выраженія разстоянія любой точки на кривой отъ фокуса черезъ абсциссу точки даютъ возможность легко написать уравненія кривыхъ второго порядка въ полярныхъ координатахъ, принимая за полюсъ одинъ изъ фокусовъ, а за полярную ось ось симметріи въ направленіи отъ фокуса къ ближайшей вершинѣ. Положительное значеніе угла φ будемъ откладывать въ сторону положительныхъ y-овъ.

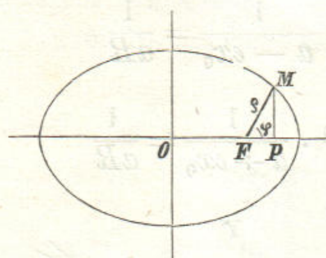
222. Преобразуемъ уравненіе эллипса, принимая за полюсъ тотъ фокусъ F, который имѣетъ положительную абсциссу $+c$ (см. черт. 91).

$$MF = \rho = a - ex,\ x = OP = OF + FP = \sqrt{a^2 - b^2} + \rho \cos\varphi$$

$$\rho = a - e\,(ae + \rho\cos\varphi),\ \rho\,(1 + e\cos\varphi) = a\,(1 - e^2),$$

но, принимая во вниманіе, что

$$a(1-e^2) = a\left[1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right] = \frac{b^2}{a} = p,$$



Черт. 91.

получимъ окончательно полярное уравненіе эллипса въ такомъ видѣ

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Здѣсь e есть эксцентриситетъ эллипса и $e < 1$.

Послѣднее уравненіе показываетъ, что эллипсъ есть кривая линія, всѣ точки которой лежатъ на конечномъ разстояніи отъ фокуса F, ибо ρ можетъ обратиться въ ∞ только для такого значенія угла φ, при которомъ

$$1 + e\cos\varphi = 0,$$

или

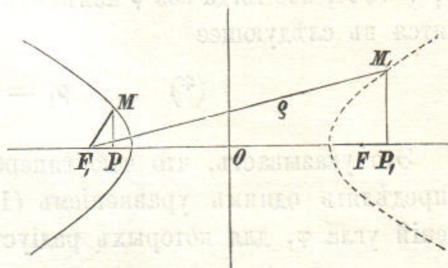
$$\cos\varphi = -\frac{1}{e},$$

но число $\frac{1}{e}$ больше единицы, а потому нѣтъ такого угла φ, при которомъ $\cos\varphi$ болѣе единицы по численной величинѣ.

223. Подобнымъ образомъ возьмемъ у гиперболы за полюсъ фокусъ F_1, имѣющій абсциссу $-c$.

$$\rho = \pm(ex + a),$$

причемъ $+$ будетъ для правой вѣтви и $-$ для лѣвой (см. черт. 92). Разсмотримъ оба случая отдѣльно.



Черт. 92.

Для лѣвой вѣтви

$$\rho = MF_1 = -ex - a,$$

но

$$x = -OP = F_1P - OF_1 = \rho\cos\varphi - \sqrt{a^2+b^2} = \rho\cos\varphi - ae,$$

слѣдовательно,

$$\rho = -e(\rho\cos\varphi - ae) - a,$$

отсюда

$$\rho(1 + e\cos\varphi) = a(e^2 - 1) = a\left[\frac{a^2+b^2}{a^2} - 1\right] = \frac{b^2}{a} = p,$$

откуда получимъ уравненіе для правой вѣтви

$$(1) \qquad \rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

которое имѣетъ видъ тождественной съ уравненіемъ эллипса и отличается отъ послѣдняго только тѣмъ, что для гиперболы $e > 1$.

Для правой вѣтви мы получимъ

$$\rho = M_1F_1 = +(ex + a),\ x = +OP_1 = F_1P_1 - OF_1 = $$
$$= \rho\cos\varphi - \sqrt{a^2+b^2},$$

отсюда

$$\rho = c(\rho\cos\varphi - ae) + a,\ \rho(1 - e\cos\varphi) = a(1 - e^2) = -\frac{b^2}{a} = -p,$$

откуда получимъ уравненіе правой вѣтви

$$(2) \qquad \rho = \frac{-p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Въ уравненіяхъ (1) и (2) мы число ρ, какъ выражающее разстояніе двухъ точекъ, считаемъ положительнымъ.

224. Уравненіе (2) предыдущаго параграфа сдѣлается тождественнымъ съ уравненіемъ (1), если мы измѣнимъ ρ на $-\rho_1$, а φ на $\varphi_1 + 180°$, ибо тогда $\cos\varphi$ измѣнитъ свой знакъ, и уравненіе (2) обратится въ слѣдующее

$$(*) \qquad \rho_1 = \frac{p}{1 + e\cos\varphi_1}.$$

Это указываетъ, что всю гиперболу, то есть обѣ ея вѣтви, можно опредѣлять однимъ уравненіемъ (1), условившись для такихъ значеній угла φ, для которыхъ радіусъ

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

дѣлается отрицательнымъ, его откладывать не въ направленіи, указываемомъ угломъ φ, а въ обратномъ.

225. Замѣчаніе предыдущаго параграфа весьма важно при разсмотрѣніи кривыхъ линій при помощи полярныхъ координатъ. Введеніемъ въ разсмотрѣніе отрицательныхъ радіусовъ-векторовъ съ тѣмъ условіемъ, о которомъ мы уже сказали, постоянно пользуются при изученіи кривыхъ линій для достиженія единства формулъ.

226. Итакъ, мы видимъ, что гипербола опредѣляется тѣмъ же полярнымъ уравненіемъ, что и эллипсъ. Безконечно далекія точки гиперболы мы получимъ, если положимъ

$$1 + e\cos\varphi = 0,\ \cos\varphi = -\frac{1}{e} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

причемъ уголъ φ соотвѣтствуетъ ассимптотамъ.

227. Мы видѣли уже, что параболу можно разсматривать, какъ предѣльное положеніе, къ которому стремится эллипсъ, у котораго параметръ p остается безъ перемѣны, большая же ось безпредѣльно увеличивается. При этомъ увеличеніи большой оси эксцентриситетъ стремится къ единицѣ; въ самомъ дѣлѣ,

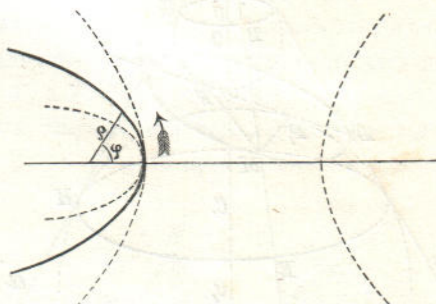
$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{p}{a}},$$

откуда

$$\lim \left\{ e \right\}_{a=\infty} = \lim \left\{ \sqrt{1-\frac{p}{a}} \right\}_{a=\infty} = 1.$$

Отсюда мы заключаемъ, что можемъ полярное уравненіе параболы получить изъ уравненія эллипса замѣною e на единицу:

$$\rho = \frac{p}{1+\cos\varphi}.$$



Черт. 93.

При этомъ не надо забывать, что направленіе полярной оси выбирается отъ фокуса къ вершинѣ параболы (см. черт. 93).

228. Резюмируя сказанное, мы видимъ, что всѣ три кривыя второго порядка имѣютъ общее уравненіе

$$\rho = \frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

чѣмъ съ успѣхомъ пользуются въ астрономіи, почему и величина e получила названіе астрономическаго эксцентриситета. Для параболы $e=1$, для эллипса $e<1$ и для гиперболы $e>1$.

Кривыя второго порядка, разсматриваемыя, какъ сѣченія конуса плоскостью.

229. Всѣ кривыя линіи второго порядка могутъ быть получены пересѣченіемъ поверхности прямого кругового конуса плоскостями, различно наклоненными къ его оси.

230. Если пересѣчь поверхность конуса плоскостью перпендикулярною къ его оси, то въ сѣченіи получится *кругъ*.

231. Если сѣкущая плоскость наклонена къ оси подъ нѣкоторымъ угломъ, большимъ угла, составляемаго образующей конуса съ осью, то въ сѣченіи получится *эллипсъ*. Въ самомъ дѣлѣ, пусть Sa и Sb (черт. 94) суть прямыя пересѣченія конуса съ плоскостью чертежа и Sc пусть его ось. Пересѣчемъ конусъ нѣкоторою плоскостью, перпендикулярною къ плоскости чертежа; эта плоскость дастъ въ сѣченіи съ конусомъ нѣкоторую замкнутую кривую. Линія пересѣченія плос-

кости P съ плоскостью чертежа пусть будетъ AA', при этомъ мы предположимъ, что уголъ между прямыми AA' и Sc больше угла aSc. Впишемъ въ треугольникъ SAA' круги, имѣющіе центры O и O_1 на оси конуса. Это будутъ линіи сѣченія съ плоскостью чертежа двухъ шаровъ, касающихся поверхности конуса по кругамъ GD и EH, имѣющимъ центры въ точкахъ C и C_1 и касающихся плоскости сѣченія въ точкахъ F и F_1. Возьмемъ на кривой сѣченія точку M и проведемъ черезъ нее образующую конуса SM; эта образующая, очевидно, будетъ касательною къ шарамъ O и O_1 въ точкахъ D и E. Соединимъ точку M съ точками F и F_1; прямыя MF и MF_1, очевидно, суть касательныя къ шарамъ O и O_1, и такъ какъ длины касательныхъ, проведенныхъ къ шару изъ нѣкоторой точки, всѣ равны между собою, то $MF = MD$ и $MF_1 = ME$, слѣдовательно, $MF + MF_1 = DE = GH$. Итакъ, полученная нами линія сѣченія обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что для каждой точки ея сумма разстояній отъ двухъ точекъ F и F_1 есть величина постоянная GH, слѣдовательно, это—эллипсъ и AA_1—его большая ось, а точки F и F_1 суть его фокусы.

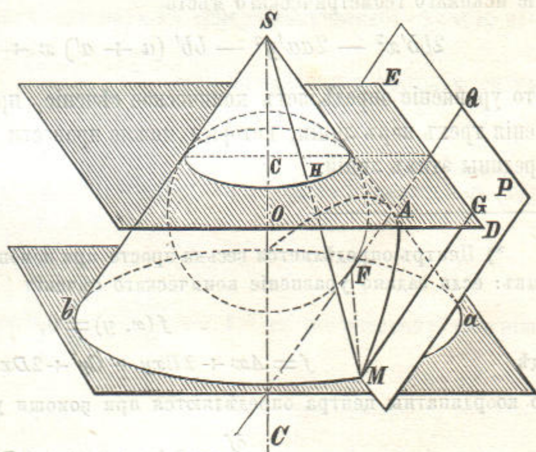
Черт. 94.

Черт. 95.

232. Если сѣкущая плоскость составляетъ съ осью конуса уголъ меньшій угла, составляемаго образующею съ осью, то въ сѣченіи получится гипербола. Въ самомъ дѣлѣ, (черт. 95) пусть Sa и Sb суть линіи пересѣченія прямого конуса съ плоскостью чертежа и cc_1 — его ось. Пересѣчемъ конусъ нѣкоторою плоскостью P, пересѣкающею обѣ полы конуса, въ сѣченіи получимъ кривую, состоящую изъ двухъ отдѣльныхъ вѣтвей. Круги съ центрами O и O_1 суть линіи пересѣченія съ плоскостью чертежа шаровъ, касающихся поверх-

ности конуса по кругамъ GD и HE и сѣкущей плоскости въ точкахъ F и F_1. Возьмемъ на кривой сѣченія точку M и проведемъ черезъ нее образующую конуса ME, она коснется шаровъ O и O_1 въ точкахъ D и E. Соединивъ точку M съ точками F и F_1, получимъ MF касательную къ шару O и MF_1 касательную къ шару O_1, и такъ какъ касательныя, проведенныя къ шару изъ одной точки, равны, то $MF_1 = ME$ и $MF = MD$, а потому $MF_1 - MF = ME - MD = ED = GS + SH =$ постоян. вел. Итакъ, для точекъ полученной кривой сѣченія разность разстояній отъ точекъ F и F_1 равна постоянной величинѣ; слѣдовательно, это гипербола, ея большая ось будетъ AA', а F и F_1 суть ея фокусы.

233. Въ промежуточномъ случаѣ, если сѣкущая плоскость параллельна одной изъ образующихъ, получается парабола. Пусть Sa и Sb прямыя сѣченія поверхности конуса съ плоскостью чертежа (черт. 96) и Sc — ось конуса. Пересѣкаемъ конусъ плоскостью параллельною Sb и перпендикулярною къ плоскости чертежа, линія FQ представляетъ ея сѣченіе съ плоскостью чертежа. Кругъ O представляетъ слѣдъ сѣченія съ плоскостью чертежа шара, касающагося поверхности конуса по кругу C и плоскости P въ точкѣ F. Плоскость сѣченія и плоскость круга C опредѣляютъ своимъ пересѣченіемъ прямую DE, лежащую, очевидно, въ одной плоскости съ кривою сѣченія. Возьмемъ на послѣдней точку M, соединимъ ее съ F и опустимъ $\perp MG$ на прямую ED. Проведя образующую MS и плоскость параллельную C, проходящую черезъ M и пересѣкающую образующія Sa и Sb въ точкахъ a и b, будемъ имѣть: $MF = MH = MG$. Слѣдовательно, полученная кривая сѣченія будетъ парабола: осью ея служитъ линія PQ, фокусомъ — F, вершиною A и директрисою — ED.



Черт. 96.

Задачи на коническія сѣченія.

1. Найти уравненіе коническаго сѣченія, дѣлающаго отрѣзки a, a', b, b' на осяхъ.

Отв. Отрѣзки даются уравненіями

$$x^2 - (a + a')\,x + aa' = 0,$$
$$y^2 - (b + b')\,y + bb' = 0;$$

но эти уравненія должно получить изъ общаго уравненія кривой, полагая $y = 0$, $x = 0$, откуда окончательное уравненіе искомой кривой будетъ

$$bb'x^2 + Bxy + aa'y^2 - bb'(a + a')x - aa'(b + b')y + aa'bb' = 0.$$

2. Найти уравненіе параболы, касающейся осей въ точкахъ $x = a$, $y = b$.

Отв. На основаніи предыдущей задачи получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a}\frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} - 2\frac{y}{b} + 1 = 0.$$

3. Найти геометрическое мѣсто центровъ коническаго сѣченія, проходящаго черезъ четыре точки *).

Отв. Примѣняясь къ обозначеніямъ 1-ой задачи, получимъ слѣдующее уравненіе искомаго геометрическаго мѣста

$$2bb'x^2 - 2aa'y^2 - bb'(a + a')x + aa'(b + b')y = 0.$$

Это уравненіе опредѣляетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки пересѣченія трехъ паръ линій, которыя можно провести черезъ четыре точки и черезъ средины этихъ линій.

---

*) Центръ опредѣляется весьма просто при помощи дифференціальнаго исчисленія такъ: если задано уравненіе коническаго сѣченія

$$f(x, y) = 0,$$

гдѣ

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

то координаты центра опредѣляются при помощи уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + 2By + 2D = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2Bx + 2Cy + 2E = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если уравненіе коническаго сѣченія съ центромъ напишемъ въ видѣ

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0,$$

то координаты центра на основаніи сказаннаго опредѣлятся изъ уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2LA\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2LB\alpha + 2L\beta = 0,$$

но послѣднія уравненія равносильны системѣ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, что, какъ мы видѣли, справедливо. Для параболы получимъ противорѣчіе, которое покажетъ, что центра нѣтъ.

$$\alpha^2 + \beta = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2A\alpha = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2B\alpha + 2M = 0.$$

4. Сумма квадратовъ обратныхъ величинъ двухъ полудіаметровъ, составляющихъ прямой уголъ, есть величина постоянная.

Отв. Пусть длины этихъ полудіаметровъ суть a и b; дѣлая въ уравненіи

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = P$$

послѣдовательно $x = 0$, $y = 0$, получимъ

$$Aa^2 = P, \quad Cb^2 = P;$$

величины же $A + C$ и P не мѣняются отъ поворота системы координатъ на любой уголъ (см. § 148).

5. Показать, подобно тому, какъ мы дѣлали въ § 148 для прямоугольныхъ координатъ, что при преобразованіи одной косоугольной системы съ угломъ ω въ другую съ угломъ Ω, оставляя начало координатъ въ центрѣ коническаго сѣченія, величины $\dfrac{A + C - 2B\cos\omega}{\sin^2\omega}$, $\dfrac{B^2 - AC}{\sin^2\omega}$ суть инваріанты и обращаются въ выраженія, гдѣ вмѣсто ω стоитъ Ω.

6. Найти эксцентриситетъ коническаго сѣченія даннаго общимъ уравненіемъ (A) § 90.

Отв. Обратить вниманіе на § 151.

7. Найти условіе касанія линіи $\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1$, къ коническому сѣченію $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Отв. $\dfrac{a^2}{m^2} \pm \dfrac{b^2}{n^2} = 1$.

8. Найти уравненіе пары касательныхъ черезъ точку α_1, β_1 къ коническому сѣченію $L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0$.

Отв. $(L\alpha^2 + \beta^2 + P)(L\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + P) - (L\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + P)^2 = 0$.

9. Найти уголъ между парою касательныхъ, проведенныхъ черезъ точку x_1, y_1 къ кривой $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Отв. Совокупность двухъ касательныхъ на основаніи задачи 8-ой будетъ

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{y^2} - 1\right)\left(\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right)^2 = 0.$$

Три члена второго измѣренія, уравненные нулю, даютъ двѣ прямыя, проведенныя черезъ начало координатъ параллельно касательнымъ. Называя уголъ между этими

двумя прямыми черезъ φ, получимъ

$$tang\,\varphi = \frac{2ab\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1}}{x_1^2+y_1^2-a^2-b^2}.$$

Уголъ будетъ прямой, если заданная точка лежитъ на кругѣ $x^2+y^2=a^2+b^2$.

10. Если даны двѣ параллельныя касательныя къ коническому сѣченію, то онѣ пересѣкутся третьею касательною такъ, что произведеніе отрѣзковъ, образуемыхъ на касательныхъ будетъ постоянно и равно квадрату полудіаметра, параллельнаго даннымъ касательнымъ.

Отв. Возьмемъ за оси координатъ діаметръ, параллельный касательнымъ и его сопряженный, то уравненіе кривой и третьей касательной будетъ $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$, $\frac{xx_1}{a_1^2}+\frac{yy_1}{b_1^2}=1$; полагая въ уравненіи касательной $x=\pm a_1$, получимъ отрѣзки на постоянныхъ касательныхъ $y=\frac{b_1^2}{y_1}\left(1\mp\frac{x_1}{a_1}\right)$; искомое произведеніе $\frac{b_1^4}{y_1^2}\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}\right)=b_1^2$.

11. Черезъ точки O, O_1 проведены двѣ параллельныя хорды коническаго сѣченія OR и $O_1\rho$, пересѣкающія кривую, первая въ точкахъ R_1, R_2, а вторая въ точкахъ ρ_1, ρ_2. Показать, что отношеніе прямоугольниковъ $\frac{\overline{OR_1}\,.\,\overline{OR_2}}{O'_1\rho_1\,.\,O_1\rho_2}$ постоянно и не зависитъ отъ направленія хордъ.

Отв. Возьмемъ сначала за начало координатъ точку O, тогда уравненіе хорды будетъ θ равно постоянному, вводя полярныя координаты r и θ; для опредѣленія радіусовъ векторовъ точекъ R_1 и R_2 мы получимъ уравненіе

$$\mathfrak{A}r^2+2\mathfrak{B}r+\mathfrak{C}=0,$$

гдѣ $\mathfrak{A}=A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta$, $\mathfrak{B}=D\cos\theta+E\sin\theta$, $\mathfrak{C}=F$; произведеніе корней $OR_1.\,OR_2$ равно $\frac{F}{\mathfrak{A}}$. Если мы, не мѣняя направленія осей, перенесемъ начало координатъ въ точку O_1, то, для опредѣленія радіусовъ векторовъ точекъ ρ_1 и ρ_2 получимъ уравненіе $\mathfrak{A}r^2+2\mathfrak{B}_1r+\mathfrak{C}_1=0$, гдѣ $\mathfrak{A}$ прежнее, а $\mathfrak{C}_1=F_1$ (см. § 92); отсюда легко видѣть справедливость предложеннаго.

12. Прямоугольники изъ отрѣзковъ двухъ пересѣкающихся хордъ относятся какъ квадраты діаметровъ, параллельныхъ этимъ хордамъ.

Отв. Эта задача и двѣ слѣдующія суть слѣдствія задачи 11.

13. Касательныя, проведенныя изъ внѣшней точки, относятся какъ имъ параллельные діаметры.

14. Квадраты полухордъ, соотвѣтствующихъ какому нибудь діаметру, пропорціональны прямоугольникамъ изъ отрѣзковъ, образуемыхъ хордами на діаметрѣ.

15. Въ задачѣ 10 прямоугольникъ изъ отрѣзковъ третьей касательной равенъ квадрату ей параллельнаго полудіаметра.

Отв. Слѣдствіе задачъ 10 и 13.

16. Если какая нибудь касательная пересѣкаетъ два сопряженные діаметры, то прямоугольникъ изъ отрѣзковъ равенъ квадрату параллельнаго ей полудіаметра.

Отв. Взять за оси координатъ діаметръ параллельный касательной и его сопряженный.

17. Даны два произвольныхъ полудіаметра; если изъ оконечностей каждаго проведемъ хорду, соотвѣтствующую другому, то треугольники такъ составленные будутъ равновелики.

Отв. Принять во вниманіе задачу 14.

18. Вмѣсто хордъ въ предыдущей задачѣ взять касательныя и доказать аналогичное свойство.

Отв. Пусть координаты концевъ двухъ полудіаметровъ будутъ (x_0, y_0), (x_1, y_1), тогда удвоенная площадь треугольника, образованнаго двумя полудіаметрами и касательною въ концѣ одного изъ нихъ, будетъ

$$\frac{(x_0 y_1 - y_0 x_1)\, P}{\pm [A x_0 x_1 + B(x_0 y_1 + x_1 y_0) + C y_0 y_1]}$$

гдѣ A, B, C суть коэффиціенты уравненія коническаго сѣченія

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = P.$$

Симметричность выраженія, стоящаго въ скобкахъ указываетъ на справедливость предложеннаго.

19. Произведеніе отрѣзковъ, образуемыхъ осями на нормали отъ точки M, въ которой проведена къ кривой нормаль, равно квадрату полудіаметра, сопряженнаго съ діаметромъ, проходящимъ черезъ M.

Отв. Называя сказанный полудіаметръ черезъ b' получимъ для отрѣзковъ нормали величины $\frac{bb'}{a}$, $\frac{ab'}{b}$.

20. Произведеніе длины нормали *) и перпендикуляра изъ центра на касательную равно квадрату полуоси.

Отв. Разстояніе центра до касательной есть $\frac{ab}{b'}$ (см. зад. 19).

21. Выразить длину нормали черезъ уголъ φ, образуемый ею съ осью x-овъ.

Отв. $\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}}$.

---

*) Подъ длиною нормали обыкновенно разумѣютъ разстояніе отъ точки M кривой, въ которой проведена нормаль до точки N, гдѣ нормаль пересѣкаетъ ось x-овъ.

22. Черезъ данную точку внѣ эллипса или гиперболы провести къ кривой нормаль.

Отв. Пусть X, Y будутъ координаты точки на кривой; уравненіе нормали въ этой точкѣ можно написать такъ $\frac{a^2 x}{X} - \frac{b^2 y}{Y} = c^2$; если нормаль проходитъ черезъ данную точку x_1, y_1, то будетъ $\frac{a^2 x_1}{X} - \frac{b^2 y_1}{Y} = c^2$, откуда точки на кривой, которыхъ нормали проходятъ черезъ (x_1, y_1) даются пересѣченіемъ кривой съ равносторонней гиперболою $c^2 XY = a^2 x_1 Y - b^2 y_1 X$.

23. Провести къ параболѣ нормаль черезъ точку, лежащую внѣ кривой.

24. Прямой уголъ вращается вокругъ вершины M, причемъ эта вершина лежитъ на коническомъ сѣченіи, если мы соединимъ прямою точки, въ которыхъ стороны угла пересѣкаютъ коническое сѣченіе, то эти прямыя проходятъ черезъ постоянную точку нормали къ коническому сѣченію въ точкѣ M.

Отв. Возьмемъ за координатныя оси касательную въ точкѣ M и нормаль, тогда уравненіе кривой будетъ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = 0$; $F = 0$, ибо начало координатъ на кривой; $D = 0$, ибо касательная есть ось x-овъ, уравненіе которой $y = 0$. Уравненіе совокупности двухъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало есть

$$(y - \lambda x)\left(y + \frac{1}{\lambda} x\right) = 0, \text{ или } y^2 + \frac{1-\lambda^2}{\lambda} xy - x^2 = 0.$$

Умножаемъ это уравненіе на A и складываемъ съ уравненіемъ кривой; получимъ

$$\left(B + A\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right) xy + (C + A) y^2 + Ey = 0.$$

Это уравненіе разлагается на два: $y = 0$ и другое

$$\left(B + A\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right) x + (C + A) y + E = 0.$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ искомую хорду, соединяющую оконечности сторонъ прямого угла. Точка, въ которой эта прямая пересѣкаетъ ось y-овъ, опредѣляется, полагая $x = 0$; $y = -\frac{E}{C+A}$. Ордината y не зависитъ отъ перемѣннаго числа λ.

25. Найти координаты точки пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ двухъ точкахъ (x_1, y_1), (x_2, y_2) на кривой $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Отв. $X = \dfrac{x_1 + x_2}{1 + \dfrac{x_1 x_2}{a^2} + \dfrac{y_1 y_2}{b^2}}$, $Y = \dfrac{y_1 + y_2}{1 + \dfrac{x_1 x_2}{a^2} + \dfrac{y_1 y_2}{b^2}}$.

26. Найти координаты точки пересѣченія нормалей въ точкахъ (x_1, y_1), (x_2, y_2) (см. зад. 25).

Отв. $x = \frac{(a^2 - b^2)\, x_1\, x_2\, X}{a^4}$, $y = \frac{(b^2 - a^2)\, y_1\, y_2\, Y}{b^4}$, гдѣ X, Y получены въ задачѣ 25.

27. Если разстояніе какой нибудь точки на кривой отъ данной выражается цѣлою раціональною функціею первой степени ея координатъ, то кривая есть коническое сѣченіе.

28. Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на касательную, есть величина постоянная и равная квадрату малой полуоси b.

Отв. Разстоянія фокусовъ до касательной суть

$$\frac{b}{b'}(a - ex),\ \frac{b}{b'}(a + ex) \text{ (см. зад. 19)}$$

29. Доказать аналитически, что софокусныя коническія сѣченія пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

Отв. Возьмемъ двѣ кривыя $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a_1^{\ 2}} + \frac{y^2}{b_1^{\ 2}} = 1$; координаты x_1, y_1 пересѣченія ихъ удовлетворяютъ разности уравненій

$$\frac{a^2 - a_1^{\ 2}}{a^2\, a_1^{\ 2}}\, x_1^{\ 2} + \frac{b^2 - b_1^{\ 2}}{b^2\, b_1^{\ 2}}\, y_1^{\ 2} = 0.$$

Если коническія сѣченія софокусны, то $a^2 - a_1^{\ 2} = b^2 - b_1^{\ 2}$, откуда

$$\frac{x_1^{\ 2}}{a^2\, a_1^{\ 2}} + \frac{y_1^{\ 2}}{b^2\, b_1^{\ 2}} = 0,$$

что есть ни что иное, какъ условіе перпендикулярности касательныхъ

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1, \quad \frac{xx_1}{a_1^{\ 2}} + \frac{yy_1}{b_1^{\ 2}} = 1.$$

30. Найти длину прямой, проведенной черезъ центръ до пересѣченія съ касательной параллельно фокусному радіусу вектору точки касанія.

Отв. Искомая длина равна полуоси a.

31. Черезъ точку на малой оси эллипса провести къ эллипсу нормаль.

Отв. Провести черезъ заданную точку и два фокуса кругъ, который пересѣчетъ эллипсъ въ искомыхъ точкахъ.

32. Черезъ точку P проведены двѣ касательныя PT и PT_1; соединяя фокусы коническаго сѣченія F и F_1 съ точкою P, получимъ $\angle TPF = \angle T_1PF_1$.

Отв. Слѣдствіе задачи 28.

33. Если черезъ точку P коническаго сѣченія S проведемъ двѣ касательныя къ софокусному сѣченію, то эти касательныя одинаково наклонены къ касательной въ точкѣ P къ кривой S.

Отв. Слѣдствіе задачи 32.

34. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляра изъ фокуса на касательную.

Отв. $\xi^2 + \eta^2 = a^2$, гдѣ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ уравненіе заданнаго коническаго сѣченія. Для параболы $y^2 = 2px$ получимъ прямую $x = 0$.

35. Если вершина прямого угла лежитъ на окружности круга и одна изъ его сторонъ проходитъ черезъ постоянную точку F, то другая сторона касается нѣкотораго коническаго сѣченія.

Отв. Заключеніе обратное задачѣ 34. Если точка F лежитъ внутри круга, то будетъ эллипсъ, если же внѣ, то гипербола.

36. Радіусъ векторъ, проведенный изъ фокуса къ полюсу хорды, дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусами векторами, проведенными изъ того же фокуса къ концамъ хорды.

Отв. Доказательство можно основать на томъ соображеніи, что уголъ между радіусомъ векторомъ, проведеннымъ изъ фокуса въ нѣкоторую точку $P(x, y)$ и радіусомъ векторомъ точки касанія $M(x_1, y_1)$ касательной, проходящей черезъ точку P, не зависитъ отъ координатъ x_1, y_1 точки касанія. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая радіусы векторы и полярные углы точекъ P и M черезъ (ρ, θ), (ρ_1, θ_1), получимъ для эллипса $\rho \cos\theta = x - c$, $\rho \sin\theta = y$; $\rho_1 \cos\theta_1 = x_1 - c$, $\rho_1 \sin\theta_1 = y_1$, откуда $\rho\rho_1 \cos(\theta - \theta_1) = (x - c)(x_1 - c) + yy_1$, но принимая во вниманіе уравненіе касательной $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$, мы получимъ

$$\rho\rho_1 \cos(\theta - \theta_1) = (a - ex)(a - ex_1);$$

но $\rho_1 = a - ex_1$, слѣдовательно, $\cos(\theta - \theta_1) = \frac{a - ex}{\rho}$. Эта величина зависитъ только отъ координатъ x, y точки P, что и требовалось доказать.

37. Прямая, соединяющая фокусъ съ полюсомъ хорды, проходящей черезъ этотъ фокусъ, перпендикулярна къ этой послѣдней.

Отв. Частный случай задачи 36.

38. Черезъ фокусъ F проведенъ перпендикуляръ къ радіусу вектору FM точки касанія M касательной MT; показать, что этотъ перпендикуляръ встрѣчается съ касательною на директрисѣ.

Отв. Слѣдствіе задачи 36. $\theta - \theta_1 = 90°$.

39. Уголъ, стягиваемый въ фокусѣ частью перемѣнной касательной, заключенной между двумя постоянными, есть величина постоянная.

Отв. Разсматриваемый уголъ есть половина угла стягиваемаго хордою прикосновенія *) двухъ касательныхъ.

---

*) Хордою прикосновенія двухъ касательныхъ называется прямая, соединяющая точки касанія этихъ касательныхъ.

40. Изъ точки P внѣ коническаго сѣченія съ центромъ проведены двѣ касательныя PT и PT_1; на хорду соприкосновенія TT_1 опущены перпендикуляры изъ центра C и точки P, причемъ первый перпендикуляръ встрѣчаетъ хорду TT_1 въ точкѣ M, а второй встрѣчаетъ ось коническаго сѣченія (на которой фокусы) въ точкѣ N. Доказать, что $\overline{CM} \, . \, \overline{PN} = b^2$.

Отв. Когда P лежитъ на коническомъ сѣченіи, теорема выражаетъ длину нормали $\frac{bb'}{a} = \overline{PN}$.

41. Если, принимая условія задачи 40, мы проведемъ изъ фокусовъ перпендикуляры FG и F_1G_1 на TT_1 и кромѣ того обозначимъ черезъ N_1 точку пересѣченія хорды TT_1 съ перпендикуляромъ PN, то получимъ $\overline{FG} \, . \, \overline{F_1G_1} = \overline{CM} . \overline{NN_1}$.

Отв. Сравнить задачу 28.

42. Фокусъ образуетъ на всякой хордѣ, черезъ него проходящей, два отрѣзка, среднее гармоническое *) между которыми есть параметръ.

Отв. Взявъ полярное уравненіе коническаго сѣченія, получимъ для двухъ отрѣзковъ выраженія $\frac{p}{1 + e \cos \theta}$, $\frac{p}{1 - e \cos \theta}$.

43. Прямоугольникъ изъ отрѣзковъ фокусной хорды находится въ постоянномъ отношеніи съ самой хордой.

Отв. Длина хорды $\frac{2p}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$ (см. зад. 42).

44. Написать полярное уравненіе, принимая за полюсъ центръ.

Отв. $r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$.

45. Діаметръ параллельный нѣкоторой фокусной хордѣ есть среднее пропорціональное между длиною этой хорды и длиною оси $2a$.

Отв. Сравни задачи 44, 43.

46. Сумма двухъ фокусныхъ хордъ, параллельныхъ сопряженнымъ діаметрамъ постоянна.

Отв. Слѣдствіе задачи 45 и § 196.

47. Сумма обратныхъ величинъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ фокусныхъ хордъ постоянна.

Отв. Слѣдуетъ изъ задачъ 45, 4.

48. Треугольникъ, составляемый касательною гиперболы съ ассимптотами есть величина постоянная.

Отв. Уравненіе гиперболы $xy = k^2$. Площадь треугольника $2k^2 \sin \theta$, гдѣ θ уголъ между ассимптотами.

---

*) Среднимъ гармоническимъ двухъ чиселъ a и b называется число c, удовлетворяющее уравненію $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$.

49. Двѣ постоянныя точки гиперболы соединены съ третьею перемѣнною точкой той же гиперболы двумя прямыми. Эти прямыя образуютъ на одной изъ ассимптотъ постоянный отрѣзокъ.

Отв. $x_1 y_1 = k^2$, $x_2 y_2 = k^2$, пусть будутъ перемѣнныя координаты третьей точки ξ, η; $\xi\eta = k^2$, $\frac{x - \xi}{x_1 - \xi} = \frac{y - \eta}{y_1 - \eta}$, $\frac{x - \xi}{x_2 - \xi} = \frac{y - \eta}{y_2 - \eta}$, полагая $x = 0$, получимъ $y_0 = \eta - \xi \frac{y_1 - \eta}{x_1 - \xi}$, $y_0' = \eta - \xi \frac{y_2 - \eta}{x_2 - \xi}$; остается показать, что $y_0 - y_0'$ не зависитъ отъ ξ и η.

50. Перпендикуляръ изъ фокуса на ассимптоту равенъ мнимой полуоси b гиперболы.

51. Разстояніе фокуса отъ какой нибудь точки гиперболы равно прямой, проведенной черезъ эту точку, параллельно ассимптотѣ до встрѣчи съ директрисою.

Отв. Отсюда выводимъ способъ черченія гиперболы непрерывнымъ движеніемъ подобно указанному въ § 207 для параболы и отличающійся тѣмъ, что треугольникъ, скользящій по линейкѣ дѣлаемъ не прямоугольнымъ, а косоугольнымъ.

52. Если a и b будутъ длины взаимно перпендикулярныхъ касательныхъ параболы $y^2 = 2px$, а $m = \frac{p}{2}$, то доказать, что $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}$.

Отв. Принимая за оси координатъ перпендикулярныя касательныя, получимъ уравненіе параболы (см. зад. 2) $p = \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$ (см. § 115).

53. Отрѣзокъ, отсѣкаемый на оси параболы полярами точекъ M_1 и M_2 равенъ отрѣзку, отсѣкаемому на той же оси перпендикулярами къ оси изъ этихъ точекъ.

54. Точка пересѣченія касательной къ параболѣ съ осью и точка касанія лежатъ въ равномъ разстояніи отъ фокуса.

Отв. Оба разстоянія равны $x + \frac{p}{2}$ (см. § 205).

55. Касательная дѣлитъ пополамъ уголъ между діаметромъ и фокуснымъ радіусомъ векторомъ, проведеннымъ черезъ точку касанія.

Отв. Слѣдствіе задачи 54 (см. § 220).

56. Найти длину перпендикуляра изъ фокуса на касательную.

Отв. $\frac{1}{2} \sqrt{p(2x + p)}$. Эта длина равна половинѣ нормали.

57. Выразить перпендикуляръ изъ фокуса въ функціи угла имъ составляемаго съ осью (см. зад. 56).

Отв. $\frac{p}{2 \cos \alpha}$, гдѣ α есть разсматриваемый уголъ, слѣдовательно, уравненіе ка-

сательной къ параболѣ можетъ быть написано такъ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + \frac{p}{2 \cos \alpha} = 0.$$

Вывести отсюда рѣшеніе задачи 34.

58. Уголъ между касательными параболы равенъ половинѣ угла между радіусами векторами, проведенными изъ фокуса въ точки касанія.

Отв. Слѣдствіе задачи 54. Уголъ, составляемый касательною съ осью, есть половина угла, составляемаго радіусомъ векторомъ съ тою же осью.

59. Линія, соединяющая фокусъ параболы съ пересѣченіемъ двухъ касательныхъ, дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусами векторами точекъ касанія.

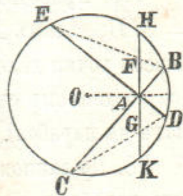
Отв. Эта задача совпадаетъ съ задачею 36.

60. Проведена хорда, пересѣкающая параболу въ двухъ точкахъ P и P_1, а директрису въ точкѣ D; соединяя три точки P, P_1, D прямыми съ фокусомъ F, получимъ, что прямая FD будетъ внѣшнимъ биссекторомъ угла, образуемаго другими двумя FP и FP_1.

61. Кругъ описанный около треугольника, составленнаго тремя касательными параболы, пройдетъ черезъ фокусъ.

Отв. Смотри задачи 60 и 39. Фокусъ и три точки сѣченія трехъ касательныхъ образуютъ четыреугольникъ, который можно вписать въ кругъ, ибо сумма угловъ при фокусѣ и противоположнаго равна двумъ прямымъ.

62. Черезъ средину A произвольной хорды круга HK проведены двѣ произвольныя хорды BC и DE (см. черт. 97); концы хордъ соединены двумя прямыми EB и CD; эти прямыя пересѣкаютъ хорду HK въ двухъ точкахъ F и G. Требуется доказать что $HF = GK$.



Черт. 97.

Отв. Возьмемъ за оси координатъ прямыя OA и OH; пусть уравненіе круга будетъ $S = o$; уравненіе совокупности двухъ хордъ BC и ED будетъ $(y - \lambda x)(y - \mu x) = o$. Уравненіе пары прямыхъ EB и CD будетъ имѣть видъ $S - k(y - \lambda x)(y - \mu x) = o$, гдѣ k получается, приравнивая нулю дискриминантъ (см. § 88). Рѣшеніе задачи не требуетъ нахожденія числа k.

63. Доказать, что если изъ точки M внѣ параболы проведены къ ней касательныя и діаметръ то этотъ діаметръ будетъ дѣлить пополамъ хорду соприкосновенія.

64. Поляра любой точки M относительно гиперболы параллельна хордѣ, соединяющей точки сѣченія гиперболы двумя прямыми, проведенными черезъ точку M параллельно ассимптотамъ и доказать, что сказанная хорда лежитъ въ одинаковомъ разстояніи отъ точки M и ея поляры.

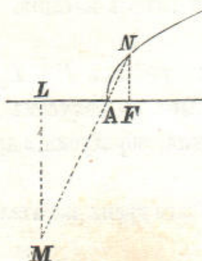
Отв. Возьмемъ точку M за начало координатъ. Поляра точки M будетъ

$Dx + Ey + F = o$; направленіе ассимптотъ опредѣляется уравненіемъ $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = o$. Точки пересѣченія гиперболы съ прямыми проведенными изъ начала параллельно ассимптотамъ будутъ лежать на прямой $2Dx + 2Ey + F = o$ (уравн. гиперболы (A) § 90).

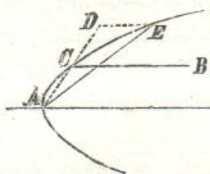
65. По данному очертанію параболы найти ось, вершину и фокусъ.

Отв. Для построенія фокуса откладываемъ (см. черт. 98) на оси произвольно LA, далѣе $LM \perp LA$ и $LM = 2LA$, проводимъ MA до N и изъ N опускаемъ перпендикуляръ NF на ось. Точка F будетъ фокусомъ.

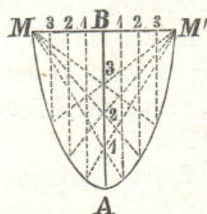
66. По данному діаметру параболы найти хорды, которыя онъ дѣлитъ пополамъ.



Черт. 98.



Черт. 99.



Черт. 100.

Отв. Черезъ вершину A проводимъ (см. черт. 99) прямую AC, откладываемъ $CD = AC$; проводимъ $DE \parallel CB$; AE будетъ искомая хорда.

67. По даннымъ оси AB, вершинѣ A, и точкѣ M очертить параболу.

Отв. Проводимъ MM' (см. черт. 100) перпендикулярно AB; беремъ $M'B = MB$; дѣлимъ MB на n равныхъ частей и BA на столько-же равныхъ частей. Черезъ точки дѣленія MB проводимъ прямыя, параллельныя оси, а точки дѣленія оси соединяемъ съ точкою M'. Точки пересѣченія соотвѣтственныхъ прямыхъ лежатъ на параболѣ.

68. По данному діаметру AB, концу его A и сопряженной хордѣ CD очертить параболу.

Отв. 1-й способъ. На діаметрѣ параболы (см. черт. 101) AB откладываемъ въ обѣ стороны произвольныя части $AK = AL$. Дѣлаемъ построеніе, указанное на чертежѣ; точки N и M лежатъ на параболѣ.

2-й способъ. На діаметрѣ AB (см. черт. 102) и полухордѣ BC строимъ параллелограммъ, дѣлимъ стороны CE и CB на n равныхъ частей. Точки дѣленія CE соединяемъ съ точкою A, а черезъ точки дѣленія CO проводимъ прямыя параллельныя діаметру. Точки пересѣченія соотвѣтственныхъ прямыхъ лежатъ на параболѣ.

69. Начертить параболу, касательную въ точкахъ A и B къ двумъ прямымъ CA и CB взаимно перпендикулярнымъ.

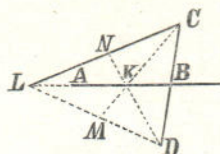
Отв. Построеніе параболы по касательной можно сдѣлать на основаніи сказан-

наго въ § 129, но можно найти непосредственно фокусъ и директрису на основанiи слѣдующаго соображенія. Соединяемъ (см. черт. 103) точки касанія A и B, беремъ средину K отрѣзка AB. Директрисса CD есть перпендикуляръ въ точкѣ C къ прямой CK; $EB \perp DC$; $FB = EB$; F есть фокусъ.

70. Черезъ точку M на параболѣ провести касательную.

Отв. 1-й способъ. Проводимъ діаметръ точки M, находимъ направленіе ему соотвѣтствующихъ хордъ. Касательная будетъ параллельна этимъ хордамъ.

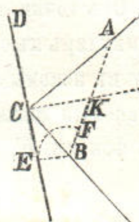
2-й способъ. Радіусомъ FM изъ фокуса F засѣкаемъ на оси параболы за вершину точку T; MT будетъ касательная.



Черт. 101.



Черт. 102.



Черт. 103.

3-й способъ. Проводимъ діаметръ точки M до встрѣчи съ директриссою въ точкѣ C. Касательная будетъ перпендикулярна къ прямой CF.

4-й способъ. Можно строить касательную на основанiи соображенiй §§ 128, 129.

71. Черезъ точку внѣ параболы провести касательную.

Отв. 1-й способъ. Изъ точки M радіусомъ MF проводимъ окружность, засѣкающую директрису въ точкахъ C и C_1; перпендикуляры CN и C_1N_1 къ директрисѣ пересѣкаютъ параболу въ точкахъ касанія N и N_1.

2-й способъ. Черезъ точку M проводимъ діаметръ пересѣкающій параболу въ точкѣ A отъ точки A въ другую сторону откладываемъ отрѣзокъ $AB = AM$ (см. § 129).

3-й способъ. Черезъ точку A опускаемъ перпендикуляръ AP на ось, откладываемъ отъ вершины параболы O отрѣзокъ $OP_1 = OP$, P_1A касается параболы въ точкѣ A и слѣдовательно хорда прикосновенія IV IV_1 параллельна P_1A и проходитъ черезъ B.

72. Провести касательную къ параболѣ параллельно данной прямой.

Отв. 1-й способъ. Проводимъ произвольную хорду параллельно данной прямой, дѣлимъ хорду пополамъ и указываемъ діаметръ, соотвѣтствующій хордѣ; черезъ точку пересѣченія діаметра съ параболой проводимъ параллельно хордѣ прямую, эта прямая есть искомая касательная.

2-й способъ. Изъ фокуса F опускаемъ на заданную прямую перпендикуляръ. Этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ директрису въ точкѣ C. Перпендикуляръ возстановленный въ серединѣ отрѣзка CF есть искомая касательная.

73. Провести нормаль къ параболѣ въ данной точкѣ M параболы.

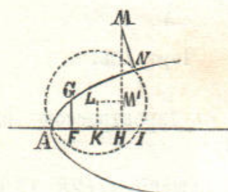
Отв. Изъ фокуса F радіусомъ равнымъ MF описываемъ кругъ, который пересѣкаетъ ось въ точкѣ принадлежащей нормали.

74. Провести нормаль къ параболѣ изъ точки M внѣ кривой.

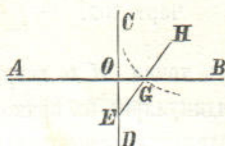
Отв. Изъ точки M (см. черт. 104) опускаемъ на ось перпендикуляръ MH; отрѣзокъ $HI = p$ параметру; черезъ точки A и I проводимъ кругъ, центръ котораго имѣетъ ординату $LK = \frac{1}{4} HM$. Этотъ кругъ пересѣкаетъ параболу въ искомой точкѣ N.

75. Провести нормаль изъ точки M заданной на оси.

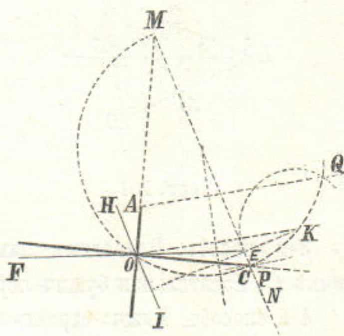
Отв. Отъ точки M въ сторону вершины откладываемъ длину параметра MN. Перпендикуляръ къ оси въ точкѣ N пересѣкаетъ параболу въ искомыхъ точкахъ (сравни § 130). Точки искомыя лежатъ на кругѣ, центръ котораго въ фокусѣ F, а радіусъ есть MF.



Черт. 104.



Черт. 105.



Черт. 106.

76. По данному діаметру эллипса или гиперболы построить его сопряженный.

Отв. Построеніе основано на свойствахъ дополнительныхъ хордъ.

77. По данной большой оси AB и точкѣ H начертить эллипсъ.

Отв. Найдемъ малую ось. Изъ точки H, какъ центра, радіусомъ $HE = AO$, гдѣ O средина AB, описываемъ кругъ. $G\ H$ будетъ малою осью. (См. черт. 105).

78. По данной малой оси DC (см. черт. 105) и точкѣ H начертить эллипсъ.

Отв. Рѣшеніе аналогичное съ рѣшеніемъ задачи 77.

79. По даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ FE и HI найти оси эллипса, не имѣя его обвода.

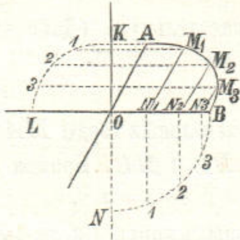
Отв. Проводимъ черезъ E линіи EK (см. черт. 106) перпендикулярно къ HI, откладываемъ $EK = OH$. Соединяемъ K съ O; $MN \parallel HI$. Черезъ точки O и K проводимъ кругъ, имѣющій центръ на прямой MN; точки M, N лежатъ на искомыхъ осяхъ. Изъ центра K радіусомъ EK проводимъ кругъ PEQ и черезъ точки P и Q прямыя PC и QA параллельно OK. A и C суть вершины.

80. По даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ начертить эллипсъ.

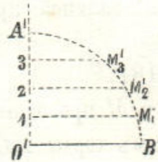
Отв. 1-й способъ. По рѣшенію предыдущей задачи находимъ оси.

2-й способъ. Изъ центра O проводимъ перпендикуляръ OK къ одному изъ

діаметровъ OB (см. черт. 107); $AK \parallel OB$. Изъ центра O проводимъ четверть окружности KL и BN. Эти дуги дѣлимъ на одинаковое число равныхъ частей; черезъ точки дѣленія KL проводимъ прямыя $1M_1$, $2M_2$,... параллельно діаметру OB, черезъ точки же дѣленія BN прямыя параллельныя KN до встрѣчи съ діаметромъ OB въ точкахъ N_1, N_2,..., черезъ эти послѣднія точки проводимъ прямыя $N_1 M_1$, $N_2 M_2$,... Точки встрѣчи M_1, M_2,... лежатъ на искомомъ эллипсѣ.

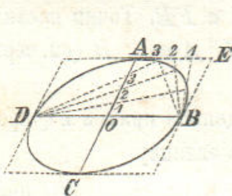


Черт. 107.

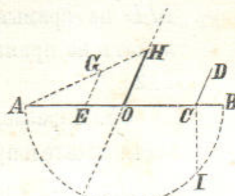


Черт. 108.

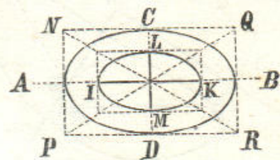
3-й способъ. На радіусѣ $O'B'=OB$ (см. черт. 108) строимъ четверть окружности B_1A_1; радіусъ A_1O_1 дѣлимъ точками 1, 2, 3,... на нѣкоторое число n равныхъ частей. Въ этихъ точкахъ возставляемъ перпендикуляры $1M'_1$, $2M'_2$, $3M'_3$,... Полудіаметръ OA дѣлимъ на n равныхъ частей; черезъ точки дѣленія 1, 2, 3,...



Черт. 109.



Черт. 110.



Черт. 111.

проводимъ прямыя $1M_1$, $2M_2$, $3M_3$,..., параллельныя полудіаметру OB, на этихъ прямыхъ откладываемъ отрѣзки $1M_1=1M'_1$, $2M_2=2M'_2$, $3M_3=3M'_3$,...; точки M_1, M_2, M_3 принадлежатъ искомому эллипсу.

4-й способъ. Проводимъ AE и BE параллельно заданнымъ діаметрамъ DB и AC. Дѣлимъ OA и EA на n равныхъ частей точками 1, 2, 3.... Соединяемъ прямыми точки дѣленія OA съ точкою D и точки дѣленія AE съ точкою B. (см. черт. 109).

81. По данному діаметру AB и полухордѣ CD, соотвѣтствующей ему, построить другой сопряженный діаметръ эллипса.

Отв. На AB (см. черт. 110) описываемъ полукругъ; $CI \perp AB$; $AE=CI$; $EG \parallel OH \parallel DC$; $GE=DC$; соединяемъ точки A и G прямою AG, которую проводимъ до пересѣченія съ діаметромъ OH; OH будетъ искомый полудіаметръ.

82. На данной большой оси IK начертить эллипсъ подобный данному.

Отв. Въ срединѣ O данной прямой IK проводимъ перпендикуляръ CD къ прямой IK (см. черт. 111). Отъ точки O откладываемъ $OB = OA = a$, $OC = OD = b$, гдѣ a, b суть полуоси заданнаго эллипса. Строимъ прямоугольникъ и проводимъ его діагонали; $NP \parallel QR \perp IK$; точки пересѣченія съ діагоналями N, Q; P, R соединяемъ прямыми, образуется новый прямоугольникъ; LM будетъ малою осью искомаго эллипса, а IK большая ось.

83. Въ данной точкѣ M эллипса провести касательную. (Дано очертаніе эллипса).

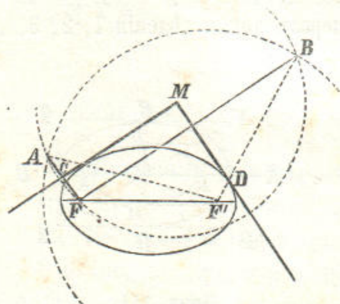
Отв. 1-й способъ. См. § 181.

2-й способъ. Черезъ точку M проводимъ двѣ произвольныя хорды MA и MB, черезъ концы A и B проводимъ хорды $AC \parallel MB$, $BD \parallel MB$. Прямая CD параллельна искомой касательной.

3-й способъ. Построеніе при помощи дополнительныхъ хордъ. См. §§ 177, 187.

84. Изъ точки M внѣ эллипса провести касательную.

Отв. Изъ фокуса F' проводимъ кругъ AB радіусомъ равнымъ $2a$, т. е. большой полуоси; изъ точки M какъ центра проводимъ кругъ AFB проходящій черезъ фокусъ F; точки встрѣчи A и B двухъ круговъ соединяемъ съ фокусомъ F'. Искомыя касательныя будутъ перпендикуляры MC и MD на прямыя FA и FB. Точки касанія лежатъ на прямыхъ $F'A$ и $F'B$ (см. черт. 112).



Черт. 112.

85. Параллельно данной прямой PQ провести касательную къ эллипсу.

Отв. 1-й способъ. Параллельно PQ проводимъ діаметръ эллипса; находимъ діаметръ сопряженный, концы котораго будутъ точками касанія.

2-й способъ. Изъ фокуса F_1 проводимъ кругъ радіусомъ, равнымъ большой оси эллипса; изъ фокуса F проводимъ прямую $L \perp PQ$. Прямая L пересѣкаетъ кругъ въ точкахъ A и B, дѣлимъ отрѣзки FA и FB точками C и D пополамъ; точки C и D лежатъ на искомыхъ касательныхъ. Точки касанія лежатъ на прямыхъ $F_1 A$ и $F_1 B$.

86. Провести нормаль къ эллипсу въ данной точкѣ на обводѣ его.

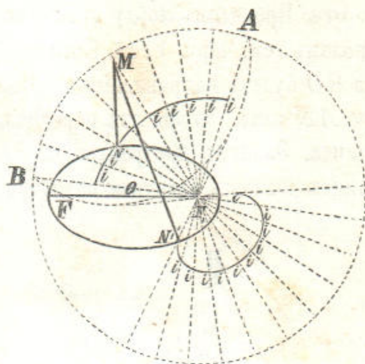
Отв. 1-й способъ. Проводимъ радіусы векторы и дѣлимъ уголъ между ними пополамъ.

2-й способъ. Проводимъ касательную и возставляемъ къ ней перпендикуляръ.

87. Изъ точки M внѣ эллипса провести нормаль.

Отв. Изъ M какъ центра описываемъ дугу AFB, проходящую черезъ фо-

кусъ F; изъ другого фокуса F_1 радіусомъ $2a$ описываемъ кругъ, который пересѣкаетъ дугу въ точкахъ A и B. Изъ F_1 проводимъ рядъ радіусовъ дуги AB (см. черт. 113). Части этихъ радіусовъ заключающіяся между дугою AB и частью другой окружности дѣлимъ пополамъ; черезъ точки дѣленія i, i', i'',... очерчиваемъ кривую; точка встрѣчи этой кривой съ эллипсомъ N будетъ концомъ искомой нормали.



Черт. 113.

88. Около даннаго эллипса описать квадратъ.

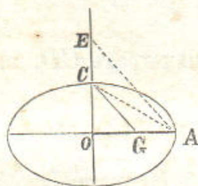
Отв. Изъ центра эллипса радіусомъ равнымъ $\sqrt{a^2+b^2}$ описать кругъ, этотъ кругъ пересѣкаетъ оси въ вершинахъ искомаго квадрата.

89. Въ данномъ эллипсѣ вписать квадратъ.

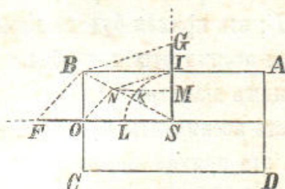
Отв. $OE=AC=\sqrt{a^2+b^2}$, $CG \parallel AE$ (см. черт. 114), OG будетъ равна половинѣ стороны искомаго квадрата.

90. Около даннаго прямоугольника описать эллипсъ, котораго оси пропорціональны сторонамъ прямоугольника.

Отв. Радіусомъ IS изъ точки S описываемъ кругъ, черезъ K, средину дуги



Черт. 114.



Черт. 115.

IL, проводимъ NM параллельно AB; соединяемъ N съ I и O (см. черт. 115) проводимъ $BG \parallel NI$ и $BF \parallel NO$; SG и SF будутъ полуоси эллипса.

91. Въ данномъ равностороннемъ треугольникѣ ABC вписать эллипсъ, такъ чтобы одна изъ осей была параллельна сторонѣ AC, а другая ось равнялась прямой ED.

Отв. На линіи ED описываемъ кругъ (см. черт. 116) проводимъ изъ B касательную BM къ кругу; проводимъ MO и параллельную ей AK; KE будетъ равна половинѣ неизвѣстной оси.

92. Въ данномъ квадратѣ вписать эллипсъ по данному отношенію между осями.

Отв. Описываемъ около квадрата кругъ; вписываемъ въ кругъ прямоуголь-

никъ такъ, чтобы отношеніе между сторонами его равнялось данному отношенію между осями эллипса и чтобы его стороны были параллельны діагоналямъ квадрата. Стороны этого прямоугольника будутъ искомыми осями эллипса.

93. Къ данному кругу провести эллипсъ касательный въ данныхъ точкахъ A и B.

Отв. Проводимъ хорду AB и касательную AS въ A; раздѣляемъ уголъ AOB пополамъ (см. черт. 117). Если требуемый эллипсъ долженъ касаться извнѣ, прямая SO будетъ направленіемъ большой оси и тогда проводимъ произвольную прямую AN такъ, чтобы она пересѣкла SO за точкою O; точка K будетъ центръ эллипса. Эллипсъ построится по центру K, касательной AS и точкѣ B. Если эллипсъ долженъ касаться извнутри, линія SO будетъ направленіемъ малой оси и

Черт. 116. Черт. 117. Черт. 118.

тогда проводимъ черезъ A прямую AP такъ чтобы она прошла черезъ точку L между O и D; эта прямая будетъ діаметръ.

94. Даны ассимптоты гиперболы и одинъ изъ діаметровъ CD, найти сопряженный съ нимъ діаметръ.

Отв. Пусть ассимптоты будутъ CA и CB (см. черт. 118); проводимъ прямую $MN \parallel CB$, эта прямая пересѣкаетъ ассимптоту CA въ точкѣ N а данный діаметръ въ точкѣ M. Откладываемъ $M'N = MN$; сопряженный діаметръ будетъ CM'.

95. По ассимптотамъ и фокусу гиперболы найти вершины.

Отв. 1-й способъ. См. § 217.

2-й способъ. Изъ фокуса F опускаемъ перпендикуляръ на одну изъ ассимптотъ. Разстояніе другаго фокуса до этого перпендикуляра есть дѣйствительная ось гиперболы.

96. По даннымъ осямъ начертить гиперболу.

Отв. См. §§ 217, 215.

97. По даннымъ ассимптотамъ и точкѣ N на кривой начертить гиперболу.

Отв. См. § 193.

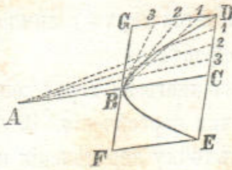
98. По данному діаметру AB и данной хордѣ DE, соотвѣтствующей ему, начертить гиперболу.

Отв. Проводимъ $GF \parallel DE$, $DG \parallel EF \parallel AC$. Дѣлимъ DG и CD на одинако-

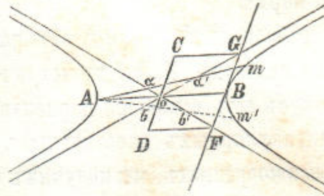
вое число равныхъ частей. Точку A соединяемъ съ точками дѣленія CD, а точку B съ точками дѣленія DG. Точки пересѣченія проведенныхъ прямыхъ лежатъ на гиперболѣ (см. черт. 119).

99. По даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ AB и CD начертить гиперболу.

Отв. 1-ый способъ. Проводимъ $GF \parallel CD$ и $GC \parallel FD \parallel AB$; OG и OF будутъ



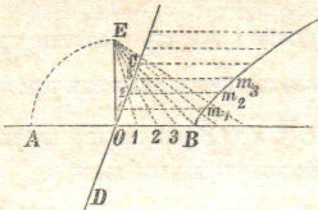
Черт. 119.



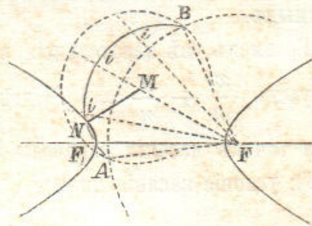
Черт. 120.

ассимптоты (см. черт. 120). Проводимъ изъ A прямыя Am, Am' . . ., откладываемъ $a'm = Aa$, $b'm' = Ab$ . . ., точки m, m' . . . будутъ на гиперболѣ.

2-ой способъ. Воставляемъ $OE \perp AB$; откладываемъ $OE = OA$; дѣлимъ BO и OC на n равныхъ частей и откладываемъ тѣ-же части по другую сторону B и C; соединяемъ E съ точками 1, 2, 3 . . . B; проводимъ черезъ точки дѣленія OC прямыя $1m_1$, $2m_2$, ... параллельно AB и откладываемъ части $1m_1 = E1$, $2m_2 = E2$ ..., и т. д. Точка m_1, m_2, ... ляжетъ на гиперболѣ (см. черт. 121).



Черт. 121.



Черт. 122.

100. Провести касательную черезъ точку M на гиперболѣ.

Отв. См. зад. 83.

101. Провести касательную къ гиперболѣ черезъ точку M внѣ кривой.

Отв. См. зад. 84.

102. Провести касательную къ гиперболѣ параллельно данной прямой.

Отв. См. зад. 85.

103. Провести нормаль къ гиперболѣ изъ точки M внѣ кривой.

Отв. Изъ точки M какъ центра радіусомъ MF_1 проводимъ кругъ, проходящій черезъ фокусъ F_1. Этотъ кругъ пересѣкаетъ въ точкахъ A и B кругъ описанный изъ фокуса F радіусомъ равнымъ $2a$ (см. черт. 122). Проводимъ изъ F рядъ пря-

мыхъ и чертимъ кривую геометрическаго мѣста срединъ i хордъ, образованныхъ между двумя окружностями эта кривая пересѣкаетъ гиперболу въ искомой точкѣ N.

104. Провести нормаль черезъ точку M на равносторонней гиперболѣ.

Отв. Изъ точки M какъ центра радіусомъ равнымъ разстоянію точки M отъ центра гиперболы проводимъ кругъ, который пересѣкаетъ ось гиперболы въ точкѣ лежащей на нормали.

105. Парабола съ постояннымъ параметромъ касается двухъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ.

Отв. Фокусъ есть основаніе перпендикуляра опущеннаго на хорду соприкосновенія перпендикулярныхъ касательныхъ изъ ихъ точки пересѣченія. Взявъ касательныя за оси координатъ, мы получимъ фокусъ какъ точку пересѣченія прямыхъ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ и $ax - by = 0$ (см. зад. 2). Принимая же во вниманіе $p = \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$ (см. зад. 52), гдѣ p число постоянное, получимъ черезъ исключеніе a и b уравненіе искомаго геометрическаго мѣста

$$4x^2y^2 = p^2 (x^2 + y^2).$$

106. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ параболъ, касающихся трехъ данныхъ прямыхъ.

Отв. Возьмемъ двѣ касательныя за оси координатъ и пусть уравненіе третьей прямой будетъ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ (*), гдѣ m и n числа заданныя. Назовемъ черезъ a и b разстоянія точекъ касанія параболы съ осями $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$ отъ начала координатъ (см. зад. 2); условіе касанія прямой (*) съ параболою выразится такъ

$$an + bm = ab. \qquad (**)$$

Принимая въ соображеніе, что уравненіе оси параболы будетъ

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta};$$

получимъ координаты фокуса

$$\xi = Rb,\ \eta = Ra,$$

гдѣ $R = \frac{ab}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$, а θ уголъ между осями.

Отсюда

$$\xi^2 + 2\xi\eta \cos\theta + \eta^2 = R^2 (a^2 + b^2 + 2ab \cos\xi) = R\,ab.$$

кромѣ того

$$\xi m + \eta n = R\,(bm + an) = R\,ab,$$

откуда

$$\xi^2 + 2\xi\eta \cos\theta + \eta^2 - \xi m - \eta n = 0.$$

Послѣднее же уравненіе есть уравненіе круга, описаннаго вокругъ треугольника, образованнаго заданными прямыми. Эта задача есть слѣдствіе задачи 61.

107. Доказать, что сумма угловъ, образуемыхъ двумя касательными къ параболѣ съ осью этой кривой, равняется углу между осью и прямою, проведенною изъ фокуса къ точкѣ пересѣченія этихъ касательныхъ.

Отв. Слѣдствіе задачъ 58 и 36.

108. Найти выраженіе длины хорды, образуемой нормалью въ какой нибудь точкѣ на параболѣ черезъ разстояніе ρ точки до фокуса и параметръ p.

Отв. $\dfrac{(2p\rho)^{3/2}}{p\left(\rho - \dfrac{p}{2}\right)}$.

109. Зная параметръ параболы, найти ея уравненіе относительно осей координатъ, совпадающихъ съ касательною и нормалью въ концѣ фокальной хорды, перпендикулярной къ оси.

Отв. Принимая во вниманіе, что касательная въ концѣ фокальной хорды, составляетъ съ осью уголъ въ 45°, мы получаемъ искомое уравненіе въ такомъ видѣ: $(x+y)^2 - cy = 0$. Остается опредѣлить коэффиціентъ c, который есть не что иное, какъ длина нормали, совпадающей съ осью y-овъ, и, слѣдовательно, на основаніи предыдущей задачи, $c = 4.\sqrt{2}\,p$, ибо $\rho = p$.

100. Зная параметръ параболы, написать ея уравненіе относительно осей координатъ, совпадающихъ съ двумя касательными въ концахъ фокальной хорды, перпендикулярной къ оси.

Отв. $(x-y)^2 - 2\sqrt{2}\,p\,(x+y) + 2p^2 = 0$.

111. Доказать, что всякій кругъ, построенный на фокальной хордѣ, какъ на діаметрѣ, касается директрисы.

Отв. Слѣдствіе зад. 63.

112. Если кругъ пересѣкаетъ коническое сѣченіе, то ихъ хорды пересѣченья составляютъ равные углы съ осью.

Отв. Слѣдствіе зад. 12 и § 200.

113. Пусть будетъ A вершина, F фокусъ параболы, ρ и ρ' радіусы векторы двухъ точекъ M и M' кривой, θ уголъ MFM', l длина хорды MM'; доказать слѣдующія, употребляемыя въ астрономіи, формулы

$$p = \frac{2\rho\rho' \sin^2 \dfrac{\theta}{2}}{\rho + \rho' - 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\dfrac{\theta}{2}};\quad 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{(\rho+\rho')^2 - l^2}\,.$$

Отв. См. зад. 108.

114. Черезъ точки пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

$$A_1 x^2 + 2B_1 xy + C_1 y^2 + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1 = 0$$

провести параболу, проходящую через начало координатъ. Когда это возможно?

Отв. Обозначая через $S = 0$ и $S_1 = 0$ уравненія заданныхъ коническихъ сѣченій, получимъ уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго через точки пересѣченія данныхъ, въ видѣ: $S - kS_1 = 0$; остается подобрать k такъ, чтобы было $(A - kA_1)(C - kC_1) - (B - kB_1)^2 = 0$ и также $F - kF_1 = 0$; сказанное опредѣленіе k возможно, когда удовлетворяется условіе, получаемое черезъ исключеніе k изъ послѣднихъ двухъ уравненій.

115. Доказать, что всякая линія второго порядка, проходящая черезъ точки пересѣченія двухъ равностороннихъ гиперболъ, есть также гипербола равносторонняя.

Отв. Легко показать, что условіемъ равносторонности гиперболы будетъ равенство $A = -C$. Отсюда слѣдуетъ, что обозначая черезъ S и S_1 первыя части уравненій $S = 0$, $S_1 = 0$ двухъ равностороннихъ гиперболъ, мы получимъ уравненіе новой равносторонней гиперболы въ видѣ $S - kS_1 = 0$.

116. Доказать, что четыре точки пересѣченія двухъ линій второго порядка, оси которыхъ параллельны, лежатъ на одномъ кругѣ.

Отв. Уравненіе совокупности осей (**) выведено въ § 160. Уравненіе совокупности прямыхъ, проведенныхъ черезъ начало параллельно осямъ, есть

$$-L(Ax + By)^2 + \frac{A^2 + B^2 - L}{B}(Ax + By)Ly + L^2 y = 0;$$

сокращая, получимъ

$$Bx^2 - (A - C)xy - By^2 = 0.$$

Условіе параллельности осей двухъ коническихъ сѣченій имѣетъ видъ

$$\frac{B_1}{B} = \frac{A_1 - C_1}{A - C},$$

откуда получается: $B_1 A - A_1 B = CB_1 - BC_1$; легко показать, что это же условіе выразитъ возможность провести черезъ точки пересѣченья кругъ, ибо

$$S - kS_1 = 0$$

будетъ давать кругъ, если $A - kA_1 = C - kC_1$, $B - kB_1 = 0$.

117. Двѣ хорды данной линіи второго порядка пересѣкаютъ одинъ изъ его діаметровъ на равныхъ разстояніяхъ отъ центра. Показать, что всякая линія второго порядка, проходящая черезъ концы обѣихъ хордъ, пересѣкаетъ этотъ діаметръ въ двухъ точкахъ, также равно удаленныхъ отъ центра.

Отв. Возьмемъ за оси координатъ два сопряженныхъ діаметра; уравненіе коническаго сѣченія будетъ: $\frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 1$; уравненіе коническаго сѣченія, прохо-

дящаго черезъ точки пересѣченія хордъ съ даннымъ коническимъ сѣченіемъ, будетъ:

$$\frac{x^2}{a_1^{\ 2}} \pm \frac{y^2}{b_1^{\ 2}} - 1 - k\,[m\,(x - \delta) - y]\,[n\,(x + \delta) - y] = 0$$

изъ послѣдняго уравненія при всякомъ k для $y = 0$ получаемъ $x = \pm f(k)$.

118. Кривая второго порядка касается двухъ ассимптотъ нѣкоторой гиперболы. Доказать, что въ числѣ общихъ хордъ этихъ кривыхъ существуютъ двѣ параллельныя между собой.

Отв. Пусть будетъ уравненіе гиперболы $\alpha\beta - k^2 = 0$, гдѣ $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ассимптоты, тогда уравненіе касающагося ассимптотъ коническаго сѣченія будетъ $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$; вычитая, получимъ $\gamma^2 - k^2 = 0$, что и требовалось доказать.

119. Даны кругъ и равносторонняя гипербола. Доказать, что если одна изъ общихъ хордъ есть діаметръ круга, то другая есть діаметръ гиперболы и обратно.

Отв. Уравненіе совокупности двухъ хордъ будетъ

$$A\,(x^2 - y^2) + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F - k\,(x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

но $k = -F$, ибо одна изъ хордъ проходитъ черезъ начало координатъ. Получаемъ уравненіе

$$A_1 x^2 + 2Bxy + C_1 y^2 + 2Dx + 2Ey = 0, \qquad (*)$$

гдѣ $A_1 = A + F$, $C_1 = -A + F$. Выразимъ условіе дѣлимости первой части уравненія (*) на $y - \lambda x$; получимъ

$$A_1 + 2B\lambda + C_1\lambda^2 = 0, \quad D + E\lambda = 0.$$

Производя на самомъ дѣлѣ дѣленіе, получимъ

$$C_1 y + 2\left(B + \frac{C_1\lambda}{2}\right) x + 2E = 0. \qquad (**)$$

Показать, что прямая, опредѣляемая уравненіемъ (**), проходитъ черезъ центръ кривой

$$A\,(x^2 - y^2) + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Обратное заключеніе можно получить, разсматривая уравненіе

$$x^2 - y^2 - 1 - k\,(lx + my)\,(ax + by + c) = 0,$$

дающее коническое сѣченіе, проходящее черезъ концы хордъ гиперболы, опредѣляемыхъ уравненіями

$$lx + my = 0, \quad ax + by + c = 0;$$

подбирая k, a, b такъ, чтобы выходило уравненіе круга, мы замѣчаемъ, что достаточно положить

$$k = \frac{2}{l^2 + m^2}, \quad a = l, \quad b = -m.$$

Уравненіе круга будетъ имѣть видъ

$$x^2 + y^2 - \frac{2lc}{m^2 - l^2}\,x - \frac{2mc}{m^2 - l^2} - \frac{m^2 + l^2}{m^2 - l^2} = 0.$$

Очевидно, что прямая $lx - my + c = 0$ есть діаметръ послѣдняго круга.

120. Показать, что совокупность двухъ прямыхъ, соединяющихъ вершину параболы $y^2 = 2px$ съ точками прикосновенія касательныхъ къ ней изъ точки x_1, y_1, выражается уравненіемъ

$$2px^2 - 2y_1xy + x_1y^2 = 0.$$

Отв. $y^2 - 2px - 2kx\,(yy_1 - px - px_1) = 0$. Разлагая на сумму квадратовъ и выражая условіе $P = 0$, получимъ $k = \dfrac{1}{x_1}$.

121. Синусы угловъ, составляемыхъ двумя прямыми съ осями параболы, относятся какъ m къ n. Въ какой зависимости между собой находятся разстоянія отъ вершины параболы до діаметровъ, проходящихъ черезъ середины хордъ, параллельныхъ этимъ прямымъ.

Отв. См. § 119.

122. Въ коническомъ сѣченіи перпендикуляръ, опущенный изъ фокуса на хорду, и діаметръ, дѣлящій эту хорду пополамъ, пересѣкаются на директрисѣ.

Отв. См. §§ 212, 197.

123. Доказать, что полудіаметръ эллипса или гиперболы есть среднее пропорціональное между прямыми, которыя соединяютъ фокусы съ концами діаметра, сопряженнаго первому.

Отв. См. §§ 210, 197.

124. Въ равносторонней гиперболѣ разстояніе точки кривой отъ центра есть среднее пропорціональное между разстояніями точки отъ фокусовъ.

Отв. См. предыдущую задачу и § 200.

125. Найти въ плоскости эллипса такой кругъ, чтобы длина касательной, проведенной къ кругу изъ каждой точки эллипса была функція раціональная, цѣлая и первой степени относительно координатъ этой точки.

Отв. Центръ круга лежитъ въ фокусѣ эллипса.

126. Доказать, что сумма или разность касательныхъ, проведенныхъ изъ каждой точки эллипса къ двумъ кругамъ, имѣющимъ предыдущее свойство, есть величина постоянная.

127. Данъ эллипсъ; сѣкущая обращается около неподвижной точки P; соединяемъ F съ точками M и M_1, въ которыхъ она пересѣкаетъ кривую. Доказать что произведеніе $tg\,\dfrac{PFM}{2}\,.\,tg\,\dfrac{PFM_1}{2}$ есть величина постоянная.

Отв. Продолжимъ сѣкущую MM_1 до пересѣченія въ точкѣ D съ директрисою и обозначимъ черезъ e эксцентриситетъ эллипса, а черезъ e' отношеніе разстояній

точки P отъ директрисы и отъ фокуса, тогда

$$\frac{MF}{MD} : \frac{PF}{PD} = \frac{e}{e'}, \text{ или } \frac{\sin MDF}{\sin MFD} : \frac{\sin PDF}{\sin PFD} = \frac{e}{e'};$$

принимая во вниманіе задачи 36, 60, получимъ, обозначая черезъ T полюсъ хорды MM_1,

$$\cos PFT : \cos MFT = e : e',$$

но, согласно задачѣ 36, углы PFT и MFT суть полуразность и полусумма угловъ PFM и PFM_1; откуда требуемое въ задачѣ произведеніе тангенсовъ равно $\frac{e-e'}{e+e'}$. Очевидно, что это произведеніе останется постояннымъ, если точка P не будетъ постоянна, но будетъ находиться на коническомъ сѣченіи, имѣющемъ общіе фокусы и директрису съ даннымъ (см. § 213).

128. Если проведемъ нормали изъ оконечностей фокусной хорды, то линія, проведенная черезъ точку ихъ пересѣченія параллельно оси, дѣлитъ хорду пополамъ.

Отв. Взять полюсъ хорды, который, очевидно, лежитъ гдѣ нибудь на директрисѣ, а также принять во вниманіе задачу 26.

129. Прямая, соединяющая полюсъ фокусной хорды съ точкою пересѣченія нормалей въ концахъ хорды, проходитъ черезъ другой фокусъ.

Отв. См. задачу 128.

130. Данъ треугольникъ, составленный тремя касательными параболы; доказать относительно него, что три его высоты пересѣкаются на директрисѣ, что площадь его равна половинѣ треугольника, составленнаго тремя точками касанія, и найти радіусъ круга описаннаго.

Отв. Радіусъ круга описаннаго опредѣляется по формулѣ:

$$R^2 = \frac{p_1\, p_2\, p_3}{4p},$$

гдѣ p_1, p_2, p_3 суть параметры, соотвѣтствующіе діаметрамъ, проходящимъ черезъ точки касанія (см. §§ 118, 119).

131. Найти выраженіе радіуса круга, описаннаго около треугольника, вписаннаго въ параболу.

Отв. $R^2 = \frac{c_1\, c_2\, c_3}{4p}$, гдѣ c_1, c_2, c_3 суть параметры діаметровъ, дѣлящихъ пополамъ стороны треугольника (см. §§ 118, 119).

132. Если равносторонняя гипербола описана около треугольника, то она проходитъ черезъ пересѣченіе его высотъ.

Отв. Уравненіе коническаго сѣченія, пересѣкающаго оси въ данныхъ точкахъ, выведено въ задачѣ (1). При прямоугольной системѣ координатъ гипербола будетъ равносторонняя, если $bb' = -aa'$; отсюда $b' = -\frac{aa'}{b}$; точка (a, b') есть точка встрѣчи высотъ треугольника (o, b) (a, o) (a', o).

133. Равносторонняя гипербола, однофокусная съ даннымъ эллипсомъ, отсѣкаетъ на сторонахъ прямого угла, описаннаго около эллипса, равныя хорды.

Отв. Возьмемъ стороны прямого угла за оси координатъ. Уравненіе эллипса напишется такъ:

$$\frac{X^2}{a^2} + 2\,\frac{\lambda}{ab}\,X.\,Y + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda},$$

гдѣ $X = x - \frac{a}{1+\lambda}$, $Y = y - \frac{b}{1+\lambda}$. Уравненіе равносторонней гиперболы будетъ

$$AX^2 + 2BX.\,Y - AY^2 = 1.$$

Чтобы гипербола была софокусная, необходимо положить

$$B = A\,\frac{2\lambda ab}{b^2 - a^2}\,;\;\; \frac{2}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)^2 + 4\lambda^2a^2b^2}}{(1+\lambda)^2},$$

откуда непосредственно слѣдуетъ справедливость высказаннаго въ задачѣ.

134. Если взять уголъ φ, разсматриваемый въ § 173, и обозначить черезъ u тотъ уголъ, который обозначенъ черезъ φ въ § 222, то получимъ

$$\rho = a\,(1 - e\cos\varphi),\;\; tg\,\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,.\,tg\,\frac{\varphi}{2};$$

ρ есть радіусъ векторъ точки на эллипсѣ (см. § 222), а e эксцентриситетъ.

135. Картушка компаса, составленная изъ m радіусовъ, обращается около своего центра, помѣщеннаго въ фокусѣ эллипса; доказать, что сумма обратныхъ величинъ длинъ, отсчитываемыхъ на каждомъ радіусѣ отъ фокуса до точки встрѣчи съ эллипсомъ, есть величина постоянная.

Отв. $\frac{m}{p}$, гдѣ p параметръ эллипса. Доказательство основано на равенствѣ

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\delta) + \cos(\alpha+2\delta) + \ldots + \cos[\alpha + (m-1)\,\delta] = 0,$$

гдѣ $\delta = \frac{2\pi}{m}$.

136. Изъ какой нибудь точки P, находящейся въ плоскости эллипса, проводимъ касательныя къ этому эллипсу; изъ точки P опускаемъ на хорду прикосновенія AB перпендикуляръ PC; прямыя PC и AB пересѣкаютъ малую ось въ точкахъ D и E; доказать, что кругъ, описанный на DE, какъ на діаметрѣ, пройдетъ черезъ оба фокуса.

137. Продолжая радіусы векторы, которые идутъ отъ какой нибудь точки M эллипса къ двумъ фокусамъ F и F', до точекъ ихъ пересѣченія P и Q съ кривой, доказать, что сумма $\frac{MF}{PF} + \frac{MF'}{QF'}$ есть величина постоянная.

Отв. Можно посовѣтовать взять полярныя координаты.

138. Дана равносторонняя гипербола и точка M, не лежащая на ней

точки M проведены нормали. Требуется: 1) провести черезъ основанія нормалей новую равностороннюю гиперболу, которой нормали въ этихъ точкахъ сходились бы въ одну точку, и указать положеніе послѣдней; 2) обозначая черезъ K гиперболу, удовлетворяющую предыдущему требованію, указать ту часть плоскости, въ которой нужно взять точку M, чтобы ей соотвѣтствовала дѣйствительная гипербола K; 3) какую линію должна описывать точка M, чтобы гипербола K была равна заданной.

Отв. 1) Пусть уравненіе заданной гиперболы будетъ $x^2 - y^2 = a^2$, а координаты точки $M(p, q)$. См. зад. 12. Гипербола K имѣетъ уравненіе

$$x^2 - y^2 - a^2 + \lambda(2xy - qx - py) = 0.$$

Возьмемъ точку встрѣчи нормалей гиперболы K произвольно, пусть ея координаты будутъ α и β. Придется отождествить два уравненія

$$(\alpha - x)(2y - 2\lambda x + \lambda p) + (\beta - y)(2x + 2\lambda y - \lambda q) = 0$$

и

$$x^2 - y^2 - a^2 + \mu(2xy - qx - py) = 0,$$

откуда

$$\mu = -\frac{1}{\lambda}, \quad p\alpha - q\beta = -2a^2, \quad 2\lambda\alpha + \lambda p = 2(\beta - q),$$
$$2\lambda\beta + \lambda q = -2(\alpha - p)$$

изъ двухъ послѣднихъ равенствъ получаемъ

$$\left(\alpha - \frac{p}{4}\right)^2 + \left(\beta - \frac{q}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}(p^2 + q^2).$$

Координаты α и β опредѣляются, какъ координаты точки пересѣченія прямой

$$px - qy + 2a^2 = 0$$

съ кругомъ

$$\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}(p^2 + q^2).$$

2) Точка M должна находиться внутри эллипса

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{2a^2} - 1 = 0.$$

3) Уравненіе линіи, описываемой точкой M при сказанномъ условіи, имѣетъ видъ

$$(x^2 - y^2 + 8a^2)^3 = 2.\ 3^3 a^2 (x^2 + y^2)^2.$$

139. Найти всѣ коническія сѣченія, въ которыхъ двумъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ хордъ соотвѣтствуютъ два перпендикулярныхъ между собой діаметра.

Отв. Равностороннія гиперболы и круги.

140. Въ равносторонней гиперболѣ уголъ между двумя діаметрами равенъ углу между діаметрами сопряженными.

141. Данъ эллипсъ и точка $P(\alpha, \beta)$ на нормали точки $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на эллипсѣ; изъ точки P проведены къ эллипсу четыре нормали, имѣющія основаніями точки M_0, M_1, M_2, M_3; найти уравненіе круга, проходящаго черезъ точки M_1, M_2, M_3 и доказать, что этотъ кругъ проходитъ черезъ точку M'_0. діаметрально противоположную точкѣ M_0, и черезъ основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ центра на касательную въ точкѣ M'_0 (теорема Іоахимсталя).

Отв. Обозначая черезъ x, y координаты любой изъ точекъ M_1, M_2, M_3 мы получимъ

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \quad b^2x_0^2 + a^2y_0 = a^2b^2;$$

вычитая, получаемъ

$$b^2(x^2 - x_0^2) + a^2(y^2 - y_0^2) = 0. \qquad (*)$$

Съ другой стороны, согласно задачѣ 22, получимъ

$$b^2 + \frac{a^2\alpha}{x} = a^2 + \frac{b^2\beta}{y}, \qquad b^2 + \frac{a^2\alpha}{x_0} = a^2 + \frac{b^2\beta}{y_0};$$

вычитая, получимъ

$$\frac{a^2\alpha(x - x_0)}{xx_0} = \frac{b^2\beta(y - y_0)}{yy_0}; \qquad (**)$$

исключаемъ изъ уравненій (*) и (**) разности $x - x_0$ и $y - y_0$, получимъ

$$\frac{xx_0(x + x_0)}{a^4\alpha} + \frac{yy_0(y + y_0)}{b^4\beta} = 0.$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ три точки M_1, M_2, M_3 и черезъ точку M'_0, діаметрально противоположную точкѣ M_0. Полагая

$$b^2 + \frac{a^2\alpha}{x_0} = a^2 + \frac{b^2\beta}{y_0} = h$$

получимъ

$$\frac{x(x + x_0)}{a^2}(h - a^2) + \frac{y(y + y_0)}{b^2}(h - b^2) = 0.$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ коническое сѣченіе, имѣющее оси параллельныя осямъ заданнаго эллипса. Получаемъ, на основаніи задачи 116, искомый кругъ, проходящій черезъ точки M_1, M_2, M_3, M'_0:

$$x^2 + y^2 + xx_0 + yy_0 = h\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + 1\right).$$

142. Черезъ точку M на эллипсѣ можно провести три нормали къ кривой кромѣ той, которая имѣетъ своимъ основаніемъ точку M; если на этихъ трехъ нормаляхъ отложить отъ точки M отрѣзки, равные тѣмъ отрѣзкамъ этихъ нормалей, которые

образуетъ на нихъ большая ось, считая отъ основанія нормали, то три полученныя точки лежатъ на кругѣ, касающемся эллипса въ точкѣ M.

Отв. Пусть будетъ $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ уравненіе заданнаго эллипса. Кругъ Іоахимсталя (см. задачу 141) для точки M (α, β) будетъ

$$a^2b^2(x^2 + y^2) - \alpha b^4 x - \beta a^4 y - a^2b^2(a^2 + b^2) = 0.$$

Обозначая черезъ X и Y координаты точки, взятой на нормали въ точкѣ (x, y) эллипса, согласно условіямъ задачи получимъ

$$X = \alpha + \frac{b^2 x}{a^2}, \quad Y = \beta + y;$$

подставляя значенія x, y изъ послѣднихъ уравненій въ предыдущія, получимъ

$$a^2(X - \alpha)^2 + b^2(Y - \beta)^2 = b^4,$$

$$a^6(X-\alpha)^2 + a^2b^4(Y-\beta)^2 - \alpha a^2b^4(X-\alpha) - \beta a^2b^2(Y-\beta) - \rho^2b^4(a^2+b^2) = 0.$$

Послѣднія два уравненія даютъ коническія сѣченія съ параллельными осями; черезъ точки ихъ пересѣченія проходитъ кругъ

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + \frac{b^2}{a^2}(X - \alpha) + (Y - \beta) = 0. \qquad (*)$$

Послѣдній кругъ проходитъ черезъ точку M и касается эллипса. Когда точка M двигается по эллипсу, центръ круга (*) описываетъ эллипсъ

$$b^2a^2x^2 + (a^2 + c^2)y^2 = \frac{(a^2 + c^2)^2}{4} b^2.$$

143. Черезъ точку 0 окружности круга проведены три хорды и на каждой, какъ на діаметрѣ, описаны круги. Эти три круга, пересѣкаясь въ точкѣ 0, пересѣкутся еще въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой.

Отв. Возьмемъ полярныя координаты: полюсъ въ точкѣ 0, полярная ось-діаметръ круга. Уравненіе заданнаго круга есть $\rho = d\cos\theta$. Пусть діаметръ одного изъ другихъ круговъ составляетъ уголъ α съ осью; тогда его длина будетъ $d\cos\alpha$; уравненіе же этого круга будетъ $\rho = d\cos\alpha . \cos(\theta - \alpha)$. Уравненіе другого круга будетъ $\rho = d\cos\beta . \cos(\theta - \beta)$. Найти точку пересѣченія этихъ двухъ круговъ значитъ удовлетворить уравненію $\cos\alpha\cos(\theta - \alpha) = \cos\beta\cos(\theta - \beta)$. Легко видѣть, что $\theta = \alpha + \beta$, а соотвѣтствующая величина ρ будетъ $d\cos\alpha\cos\beta$. Точно также полярныя координаты точки пересѣченія круга перваго съ третьимъ будутъ:

$$\theta = \alpha + \gamma, \quad \rho = d\cos\alpha\cos\gamma.$$

Найдемъ теперь уравненіе въ полярныхъ координатахъ прямой линіи, соединяющей эти двѣ точки. Возьмемъ общее уравненіе прямой линіи

$$\rho\cos(a - \theta) = b$$

и подставимъ въ него послѣдовательно найденныя величины для θ и ρ. Получимъ

$$b = d\cos\alpha.\cos\beta.\cos[a-(\alpha+\beta)] = d\cos\alpha.\cos\gamma.\cos[a-(\alpha+\gamma)],$$

откуда

$$a = \alpha+\beta+\gamma, \quad b = d\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma.$$

Полная симметрія выраженій a и b относительно угловъ α, β, γ выражаетъ свойство геометрической фигуры, высказанное въ задачѣ.

144. Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ можно провести къ параболѣ двѣ взаимно перпендикулярныя нормали.

Отв. Уравненіе параболы

$$y^2 = 2px, \tag{1}$$

уравненіе нормали въ точкѣ параболы (x, y) будетъ

$$(\xi - x)\,y + (\eta - y)\,p = 0. \tag{2}$$

Если заданы значенія ξ и η, то координаты точки на параболѣ (x, y) опредѣлятся рѣшеніемъ совмѣстно (см. зад. 22 и 23) уравненій (1) и (2). Получатся три точки пересѣченія параболы (1) съ гиперболою (2). Исключая x изъ этихъ двухъ уравненій, получимъ для y слѣдующее кубическое уравненіе:

$$y^3 - 2p(\xi - p)\,y - 2\eta p^2 = 0.$$

Три корня этого уравненія y_0, y_1, y_2 удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$y_0 + y_1 + y_2 = 0 \tag{3}$$

$$y_0y_1 + y_0y_2 + y_1y_2 = -2p(\xi - p) \tag{4}$$

$$y_0 y_1 y_2 = 2\eta p^2 \tag{5}$$

Условіе перпендикулярности двухъ изъ нормалей есть:

$$y_0y_1 + p^2 = 0 \text{ [см. уравн. (2)]} \tag{6}$$

Остается изъ четырехъ уравненій (3), (4), (5), (6), для полученія геометрическаго мѣста, исключить три величины y_0, y_1, y_2, что легко сдѣлать.

145. Сѣкущая обращается около неподвижной точки, взятой на оси параболы; черезъ точки, въ которыхъ она пересѣкаетъ параболу, проводимъ нормали; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ нормалей.

146. Парабола перемѣщается параллельно самой себѣ такимъ образомъ, что вершина ея описываетъ параболу въ ея начальномъ положеніи; изъ вершины неподвижной параболы проводимъ касательныя къ движущейся параболѣ; найти геометрическое мѣсто точекъ касанія.

Отв. Называя α, β координаты новой вершины параболы, имѣемъ: $\beta^2 = 2p\alpha$ (1); уравненіе подвижной параболы будетъ

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha); \tag{2}$$

уравненіе касательной изъ начала:

$$-2(y-\beta)\beta-2p(x-\alpha)+2p\alpha=0; \qquad (3)$$

остается изъ трехъ уравненій (1), (2) и (3) исключить α и β.

147. Найти геометрическое мѣсто такой точки, чтобы сумма квадратовъ нормалей, проведенныхъ изъ этой точки къ данной параболѣ, была постоянна.

Отв. См. задачу 144. Надо положить

$$(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2+(\xi-x_2)^2+(\eta-y_2)^2=k,$$

гдѣ k постоянное число, а выраженія

$$y^2{}_0+y^2{}_1+y^2{}_2 \text{ и } y^4{}_0+y^4{}_1+y^4{}_2$$

опредѣляются черезъ коэффиціенты уравненія третьей степени по формуламъ Ньютона. Въ данномъ случаѣ

$$y^4{}_0+y^4{}_1+y^4{}_2=2(y_0y_1+y_0y_2+y_1y_2)^2.$$

148. Дана кривая второго порядка, вписанная въ уголъ; проводимъ къ этой кривой какую нибудь касательную. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія высотъ треугольника, образуемаго движущеюся касательною и сторонами угла; найти также геометрическое мѣсто центра круга, описаннаго около того же треугольника.

Отв. Примемъ за ось x-овъ одну изъ сторонъ угла, вершину его за начало, а ось y-овъ возьмемъ перпендикулярно. При всѣхъ задачахъ, гдѣ требуется проводить перпендикуляры, можно посовѣтовать брать прямоугольныя оси координатъ, ибо тогда условіе перпендикулярности выражается проще. Уравненія касательныхъ будутъ $y=0$, $y-\lambda x=0$. Уравненіе искомаго коническаго сѣченія можно написать такъ

$$(ax+by+c)^2-y(y-\lambda x)=0, \qquad (1)$$

гдѣ $ax+by+c$ есть хорда, соединяющая точки касанія касательныхъ. Уравненіе прямой напишемъ въ видѣ

$$Ay+B(y-\lambda x)+C(ax+by+c)=0. \qquad (2)$$

Чтобы эта прямая была касательная, необходимо исключить изъ уравненія (1) и (2) $(ax+by+c)$ и выразить, что результатъ долженъ быть полнымъ квадратомъ; получимъ:

$$C^2=4AB,$$

откуда окончательно уравненіе касательной приметъ видъ

$$C^2y+4B^2(y-\lambda x)+4CB(ax+by+c)=0.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе задачи не представляетъ затрудненій.

149. Данъ эллипсъ; черезъ неподвижную точку проводимъ двѣ какія нибудь взаимно перпендикулярныя прямыя и въ точкахъ, гдѣ эти прямыя пересѣкаютъ

эллипсъ, проводимъ касательныя къ этому элипсу. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія этихъ касательныхъ.

Отв. X, Y координаты точки пересѣченія касательныхъ къ эллипсу; координаты точекъ касанія назовемъ x_1, y_1; x_2, y_2. Координаты неподвижной точки пусть будутъ α и β; условіе перпендикулярности напишется такъ:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 - \alpha (x_1 + x_2) - \beta (y_1 + y_2) + \alpha^2 + \beta^2 = 0;$$

но x_1 и x_2 суть корни уравненія:

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right) - 2\frac{x}{a}\,\frac{X}{a} + 1 - \frac{Y}{b^2} = 0,$$

точно также y_1 и y_2 суть корни уравненія аналогичнаго.

150. Та-же задача, когда взаимно перпендикулярныя линіи замѣнимъ прямыми, параллельными двумъ сопряженнымъ діаметрамъ другого даннаго эллипса.

Отв. Надо поставить условіе

$$A\lambda\mu + B(\lambda + \mu) + C = 0,$$

гдѣ

$$\lambda = \frac{y_1 - \beta}{x_1 - \alpha}, \quad \mu = \frac{y_2 - \beta}{x_2 - \alpha}.$$

151. Уголъ постоянной величины обращается около своей вершины, помѣщенной на данной кривой второго порядка; въ точкахъ, въ которыхъ стороны угла пересѣкаютъ кривую, проводимъ касательныя къ этой кривой. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія этихъ касательныхъ.

152. Проводимъ какую нибудь касательную къ гиперболѣ; точки, въ которыхъ она пересѣкаетъ соотвѣтствующія асимптоты, соединяемъ съ двумя неподвижными точками. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія послѣднихъ двухъ прямыхъ.

Отв. Отнести гиперболу къ асимптотамъ.

153. Даны двѣ точки A и B; черезъ эти двѣ точки проводимъ такія двѣ двигающіяся прямыя AM и BM, чтобы уголъ MAB былъ вдвое больше угла MBA. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія M.

154. Опредѣлить геометрическое мѣсто центровъ окружностей, которыя отсѣкаютъ линіи данной длины на сторонахъ даннаго угла.

Отв. Возьмемъ стороны даннаго угла θ за оси координатъ. Уравненіе круга будетъ $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2\cos\theta\ (x-\alpha)\ (y-\beta) = r^2$; полагая $y = 0$ для разности корней x получимъ выраженіе: $2\sqrt{r^2 - \beta^2 \sin^2\theta}$.

155. Даны двѣ неподвижныя прямыя; движущаяся прямая пересѣкаетъ первыя двѣ такъ, что составляетъ треугольникъ постоянной величины. Найти геометрическое мѣсто центровъ тяжести этихъ треугольниковъ.

Отв. Гипербола.

156. Даны неподвижная точка и неподвижная прямая; уголъ постоянной вели-

чины вращается около своей вершины, помѣщенной въ неподвижной точкѣ. Найти геометрическое мѣсто центра круга, описаннаго около треугольника, образуемаго сторонами угла и неподвижной прямой.

Отв. Гипербола.

157. Треугольникъ ABC вписанъ въ гиперболу; двѣ стороны его неподвижны; найти геометрическое мѣсто средины третьей стороны.

Отв. Гипербола.

158. На одной изъ діагоналей прямоугольника, принимаемой за хорду, описанъ кругъ. Найти мѣсто концовъ діаметровъ, параллельныхъ второй діагонали.

Отв. Гипербола.

159. Даны уголъ и неподвижная точка; черезъ послѣднюю проводимъ сѣкущую и черезъ точки, въ которыхъ эта сѣкущая встрѣчаетъ двѣ стороны угла, проводимъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя сторонамъ угла. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ параллелей.

Отв. Гипербола.

160. Найти мѣсто такой точки, чтобы одинъ изъ биссектровъ угловъ, образуемыхъ прямыми, соединяющими эту точку съ двумя данными точками A и B, имѣлъ данное направленіе.

Отв. Гипербола.

161. Данъ эллипсъ; проводимъ два сопряженныхъ діаметра. Найти мѣсто точки пересѣченія одного изъ нихъ съ прямой, проведенной черезъ данную точку перпендикулярно къ другому или, болѣе общая задача, съ прямой, образующей со вторымъ діаметромъ данный уголъ.

Отв. Гипербола.

162. Найти геометрическое мѣсто вершинъ параллелограммовъ, построенныхъ на сопряженныхъ діаметрахъ эллипса.

Отв. Если одна изъ вершинъ параллелограмма лежитъ въ началѣ, а двѣ рядомъ лежащія вершины имѣютъ координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2), то противоположная вершина имѣетъ координаты (x_1+x_2, y_1+y_2). Искомое геометрическое мѣсто — эллипсъ.

163. Найти геометрическое мѣсто средины хордъ, проведенныхъ черезъ одну и туже точку эллипса.

Отв. Эллипсъ.

164. Хорда круга перемѣщается, оставаясь параллельною самой себѣ; черезъ концы проводимъ прямыя, параллельныя двумъ даннымъ направленіямъ. Найти мѣсто точки пересѣченія параллельныхъ линій.

Отв. Эллипсъ.

165. Прямая перемѣщается параллельно самой себѣ въ плоскости двухъ другихъ прямыхъ: найти геометрическое мѣсто такой ея точки, чтобы сумма квадратовъ разстояній этой точки отъ точки пересѣченія съ данными прямыми была постоянною.

Отв. Эллипсъ.

166. Эллипсъ вращается около своего центра; въ точкахъ, гдѣ онъ пересѣкаетъ данную прямую, проводимъ къ нему касательныя; найти мѣсто точки пересѣченія этихъ касательныхъ.

Отв. Уравненіе эллипса, отнесенное къ центру есть

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 = P\,;$$

неподвижная прямая пусть будетъ $y = b$; кромѣ того, по условію вопроса,

$$A + C = k,\ AC - B^2 = l\,,$$

гдѣ k и l постоянныя. Уравненіе эллипса можно написать въ видѣ

$$(Ax + By)^2 + ly^2 = AP\,;$$

откуда уравненіе касательной въ точкѣ x_0, y_0 будетъ

$$(Ax_0 + By_0)\,(Ax + By) + lyy_0 = AP\,.$$

Далѣе рѣшеніе не представляетъ затрудненія. Искомое геометрическое мѣсто есть кругъ.

167. Данъ кругъ и неподвижная прямая, проходящая черезъ его центръ; подвижная прямая, равная радіусу круга, опирается однимъ концомъ на окружность круга, другимъ на прямую; найти геометрическое мѣсто, описываемое какою либо точкою движущейся прямой.

Отв. Центръ круга принять за начало, неподвижную прямую за одну изъ осей координатъ. Искомое геометрическое мѣсто есть эллипсъ или кругъ, концентрическій съ заданнымъ.

168. Движущаяся плоскость перемѣщается по неподвижной плоскости такъ, что двѣ прямыя движущейся плоскости остаются соотвѣтственно касательными къ двумъ кругамъ неподвижной плоскости; найти геометрическое мѣсто, описываемое точкою неподвижной плоскости на движущейся плоскости.

Отв. Возьмемъ такія прямоугольныя координаты x, y неподвижной плоскости: центръ одного круга примемъ за начало, ось x-овъ проведемъ черезъ центръ другаго круга, абсцисса котораго пусть будетъ k. За координаты ξ, η въ движущейся плоскости примемъ двѣ касательныя.

Формулы перехода будутъ:

$$x = a + \xi \cos\alpha + \eta \cos\beta,\ y = b + \xi \sin\alpha + \eta \sin\beta \qquad (1)$$

(см. §41), гдѣ a и b—координаты новаго начала. Подвижныя оси имѣютъ въ старыхъ координатахъ уравненія

$$(x - a)\sin\beta - (y - b)\cos\beta = 0,\ (x - a)\sin\alpha - (y - b)\cos\alpha = 0.$$

Условія касанія къ даннымъ кругамъ будутъ:

$$-a\sin\beta + b\cos\beta = r\,, \qquad (2)$$

$$(k - a)\sin\alpha + b\cos\alpha = r_1\,, \qquad (3)$$

гдѣ r и r_1 радіусы круговъ. Возьмемъ нѣкоторую точку неподвижной плоскости x_0, y_0; тогда, исключивъ a и b изъ уравненій (1), (2) и (3), получимъ два уравненія вида

$$A\cos + B\sin\alpha = Q;\; A_1\cos\beta + B_1\sin\beta = Q_1,$$

гдѣ A, A_1, B, B_1 числа постоянныя, а Q и Q_1 линейныя функціи отъ ξ и η. Остается изъ двухъ послѣднихъ уравненій исключить α и β, принимая во вниманіе, что $\beta - \alpha =$ пост. Показать, что геометрическое мѣсто будетъ эллипсъ.

169. Отъ какой нибудь точки эллипса по нормали откладываемъ линію, равную $\frac{k^2}{p}$, гдѣ k есть постоянная величина, а p перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную; найти геометрическое мѣсто конца этой прямой.

Отв. Легко видѣть, что $\frac{k^2}{p}$ пропорціонально діаметру параллельному къ касательной. Когда искомое мѣсто будетъ кругъ?

170. Найти геометрическое мѣсто вершины постояннаго угла, описаннаго около параболы.

Отв. Гипербола.

171. Черезъ фокусъ параболы проводимъ хорду и на хордѣ, какъ діаметрѣ, описываемъ кругъ, затѣмъ проводимъ къ кругу касательныя, параллельныя данной прямой; найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія.

Отв. Гипербола.

172. Постоянный уголъ вращается около фокуса кривой втораго порядка; въ точкахъ, въ которыхъ стороны угла встрѣчаютъ кривую, проводимъ къ ней касательныя; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ касательныхъ.

Отв. Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ, принимая за полюсъ фокусъ:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

Возьмемъ на этомъ коническомъ сѣченіи точку, опредѣляемую угломъ θ_0. Тогда касательная въ этой точкѣ будетъ имѣть уравненіе:

$$\frac{p}{\rho} = e\cos\theta + \cos(\theta - \theta_0).$$

Половину вращающагося угла обозначимъ черезъ α; тогда, обозначая полярныя координаты точки, принадлежащей искомому геометрическому мѣсту черезъ R и φ, получимъ уравненія:

$$\varphi = \theta_0 + \alpha,\; R = \frac{p}{e\cos(\theta_0 + \alpha) + \cos\alpha}.$$

Отсюда, исключая θ_0, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

173. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ параболъ, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки при данномъ направленіи оси.

Отв. Уравненіе параболы представляемъ въ такомъ видѣ:

$$(ax + by + \lambda)^2 = 2P(bx - ay + \mu).$$

Координаты данныхъ точекъ пусть будутъ

$$(k, o), (-k, o).$$

Тогда

$$P = \frac{a\lambda}{b}, \quad \mu = \frac{b}{a\lambda}(a^2k^2 + \lambda^2).$$

Дальнѣйшее рѣшеніе получимъ, принимая во вниманіе § 115.

174. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ равностороннихъ гиперболъ, имѣющихъ директрисою ось y-овъ и отсѣкающихъ на оси x-овъ постоянный отрѣзокъ.

Отв. Уравненіе разсматриваемой гиперболы имѣетъ видъ:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 2x^2,$$

гдѣ α и β координаты фокуса. Согласно требованію задачи гипербола должна проходить черезъ точку:

$$x = a, \quad y = o.$$

Уравненіе искомаго геометрическаго мѣста имѣетъ видъ:

$$(a - \alpha)^2 + \beta^2 = 2a^2.$$

175. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, проходящихъ черезъ данную точку и отсѣкающихъ отъ данной прямой отрѣзокъ данной длины.

Отв. Парабола.

176. Къ эллипсамъ:

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1,$$

гдѣ k перемѣнный параметръ, проведены касательныя изъ точки, лежащей на большой оси. Найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія этихъ касательныхъ.

Отв. Кругъ.

177. Найти геометрическое мѣсто центровъ равныхъ равностороннихъ гиперболъ, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки.

Отв. Уравненіе гиперболы можно представить въ видѣ

$$(x - \alpha)^2 + 2\lambda(x - \alpha)(y - \beta) - (y - \beta)^2 - p = 0,$$

гдѣ α и β координаты центра. Условіе постоянства длины дѣйствительной оси гиперболы есть:

$$\frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = a.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе уже не представляетъ затрудненій.

178. Найти геометрическое мѣсто полюсовъ такихъ хордъ параболы, нормали въ концахъ которыхъ пересѣкаются на этой параболѣ.

Отв. Назовемъ черезъ α и β координаты какой нибудь точки искомаго геометрическаго мѣста. Уравненіе поляры будетъ:

$$y\beta = p(x + \alpha).$$

Назовемъ черезъ ξ и η координаты точки встрѣчи нормалей въ концахъ хорды; тогда получимъ координаты концовъ хорды, рѣшая относительно x и y уравненія:

$$xy + y(p - \xi) - p\eta = 0 \text{ и } y^2 - 2px = 0,$$

причемъ имѣетъ мѣсто условіе: $\eta^2 = 2p\xi$. Обозначая черезъ y_1 и y_2 ординаты концовъ хорды, получимъ слѣдующее уравненіе для ихъ опредѣленія: $y^2 + y\eta + 2p^2 = 0$. Уравненіе хорды имѣетъ видъ: $\frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{X - x_1}{x_2 - x_1}$, отсюда $Y = \frac{2pX + y_1 y_2}{y_1 + y_2}$. Далѣе, $\beta = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $\frac{p\alpha}{\beta} = \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}$ и окончательно: $\alpha = p$.

179. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія касательныхъ въ концахъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса.

Отв. См. § 197.

180. Найти геометрическое мѣсто вершинъ гиперболъ, имѣющихъ общими одну асимптоту и одинъ фокусъ.

Отв. Примемъ асимптоту за ось y-овъ, а фокусъ возьмемъ на оси x-овъ. Общій видъ уравненія гиперболы будетъ

$$(x - a)^2 + y^2 = (mx + y)^2,$$

гдѣ a — заданная абсцисса фокуса, а m — перемѣнный параметръ, черезъ исключеніе котораго получается искомое уравненіе.

181. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ параболъ, имѣющихъ общую вершину A и общую касательную MT.

Отв. Возьмемъ уравненіе параболы въ простѣйшемъ видѣ:

$$y^2 = 2px.$$

Повернемъ оси координатъ на уголъ α, тогда уравненіе параболы будетъ:

$$(-X \sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 = 2p(X\cos\alpha + Y\sin\alpha).$$

Чтобы эта парабола касалась заданной прямой:

$$Y = -b,$$

необходимо, чтобы удовлетворялось условіе:

$$\sin^2\alpha\,(b^2\cos^2\alpha + 2pb\sin\alpha) - (b\cos\alpha\sin\alpha - p\cos\alpha)^2 = 0 \; (*).$$

Обозначая координаты точки, принадлежащей искомому геометрическому мѣсту,

черезъ ξ, η, получимъ:

$$\xi = \frac{p}{2} \cos \alpha, \ \eta = \frac{p}{2} \sin \alpha \ .$$

Исключая уголъ α при помощи условія (*), получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

182. Найти геометрическое мѣсто полюсовъ данной прямой по отношенію къ кругамъ, касающимся одной прямой и имѣющимъ центры на другой данной прямой.

Отв. Примемъ точку встрѣчи данныхъ прямыхъ за начало координатъ, прямую, которой круги должны касаться, за ось x-овъ; тогда уравненіе измѣняющаго положеніе круга будетъ имѣть видъ:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha a y + \alpha^2 = 0,$$

гдѣ α абсцисса центра, a — величина заданная. Сравнивая уравненіе третьей заданной прямой $Ax + By + C = 0$ съ уравненіемъ поляры, получимъ два уравненія, исключая изъ которыхъ перемѣнный параметръ α, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

183. Найти геометрическое мѣсто вершинъ гиперболъ, имѣющихъ общую асимптоту и общую директрису.

Отв. Обозначая черезъ α и β координаты фокуса гиперболы, взявъ заданную асимптоту за ось y-овъ и представляя уравненіе заданной директрисы въ видѣ

$$lx + my + n = 0,$$

получимъ уравненіе гиперболы въ такомъ видѣ:

$$[(1 - l^2)\, x \mp 2ly - 2\,(\alpha \mp ln)]\, x + \alpha^2 = 0.$$

При нахожденіи уравненія искомаго геометрическаго мѣста придется исключить параметръ α.

184. Даны двѣ прямыя AB и CD, пересѣкающіяся подъ прямымъ угломъ; найти геометрическое мѣсто фокусовъ гиперболъ, имѣющихъ прямую AB асимптотою и касающихся CD въ точкѣ P.

Отв. Возьмемъ касательную за ось x-овъ, а асимптоту за ось y-овъ; пусть точка P имѣетъ абсциссу: $x{=}a$. Тогда уравненіе $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (lx + my + n)^2$ опредѣлитъ гиперболу, имѣющую фокусомъ точку (α, β) и мы получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста черезъ исключеніе l, m, n изъ четырехъ уравненій

$$(a - \alpha)^2 + \beta^2 = (la + n)^2, \ m = \pm 1, \ \beta = \mp n, \ l\alpha^2 + 2n\alpha + ln^2 = 0.$$

185. Даны три точки A, B, C; черезъ A проведена прямая AA'. Найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ, параллельныхъ AA', касающихся къ коническимъ сѣченіямъ, проходящимъ черезъ B и C и касающихся прямой AA' въ точкѣ A.

Отв. Возьмемъ прямую AA' за ось х-овъ и начало координатъ въ точкѣ A. Уравненіе разсматриваемыхъ коническихъ сѣченій будетъ:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0 \text{ (см. зад. 24).}$$

То, что коническія сѣченія должны проходить черезъ двѣ точки, даетъ условія:

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Eb = 0 \qquad (1)$$

$$Aa_1^2 + 2Ba_1 b_1 + Cb_1^2 + 2Eb_1 = 0. \qquad (2)$$

Обозначимъ черезъ ξ и η координаты точки касанія касательной; тогда уравненіе касательной будетъ $Ax\xi + B(x\eta + y\xi) + Cy\eta + E(y + \eta) = 0$; условіе параллельности касательной и оси х-овъ выразится такъ: $A\xi + B\eta = 0$ (3). Остается еще условіе $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2E\eta = 0$ (4). Исключая изъ уравненій (1), (2), (3), (4) коэффиціенты A, B, C, E, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣсто, которое будетъ коническое сѣченіе (гипербола).

186. Найти геометрическое мѣсто вершинъ коническихъ сѣченій, полученныхъ при рѣшеніи предыдущей задачи, въ предположеніи, что прямая AA' вращается около точки A. (Ecole normale, 1863).

187. Показать, что четыре точки пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій, вписанныхъ въ данный прямоугольникъ, суть вершины параллелограмма, стороны котораго параллельны двумъ даннымъ направленіямъ; 2) найти мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки ко всѣмъ коническимъ сѣченіямъ, вписаннымъ въ данный прямоугольникъ, или касательныхъ, параллельныхъ данному направленію; 3) найти мѣсто точки всѣхъ этихъ коническихъ сѣченій, въ которой касательная образуетъ данный уголъ съ діаметромъ, проходящимъ черезъ точку прикосновенія. (Concours général, 1866).

188. Даны прямыя AB и CD, пересѣкающіяся подъ прямымъ угломъ; разсматриваются гиперболы, имѣющія AB асимптотою и касающіяся CD въ точкѣ P. Найти: 1) мѣсто точки пересѣченія другой асимптоты съ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ точки P на директрису; 2) мѣсто встрѣчи этой другой асимптоты съ прямою, соединяющею фокусъ съ точкой пересѣченія 0 обѣихъ данныхъ прямыхъ. (Ecole normale, 1867).

189. Даны прямоугольный треугольникъ BOA и прямая D. 1) Найти общее уравненіе равностороннихъ гиперболъ, описанныхъ около треугольника BOA. 2) Найти уравненіе мѣста L точекъ, въ которыхъ эти различныя гиперболы имѣютъ касательныя, параллельныя прямой D. 3) Изслѣдовать различные виды мѣста L, соотвѣтствующіе различнымъ направленіямъ прямой D. (Ecole polytechnique, 1867).

190. Даны кругъ и точка A. Найти геометрическое мѣсто центровъ равностороннихъ гиперболъ, проходящихъ черезъ данную точку A и касающихся даннаго круга въ двухъ точкахъ. Изслѣдовать полученную кривую для различныхъ поло-

женій точки A и доказать, что, въ общемъ случаѣ, точки прикосновенія касательныхъ, которыя можно провести къ геометрическому мѣсту изъ точки A, расположены по окружности нѣкотораго круга (Ecole polytechnique. 1873).

Отв. Пусть заданный кругъ будетъ $x^2+y^2-1=0$ и координаты данной точки α и β. Уравненіе гиперболы, имѣющей двойное касаніе къ данному кругу, будетъ:

$$x^2+y^2-1-(ax+by+c)^2=0.$$

Условіе равносторонности гиперболы будетъ: $a^2+b^2=2$. Условіемъ того, чтобы гипербола проходила черезъ точку A является уравненіе:

$$\alpha^2+\beta^2-1-(a\alpha+b\beta+c)^2=0.$$

Обозначая черезъ ξ и η координаты центра, получимъ для опредѣленія ихъ два уравненія:

$$\xi-(a\xi+b\eta+c)\,a=0,\ \eta-(a\xi+b\eta+c)\,b=0.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе задачи не представляетъ особенныхъ затрудненій, если примемъ въ соображеніе, что условіемъ прохожденія касательной черезъ точку A является уравненіе:

$$(\alpha-x)\frac{df}{dx}+(\beta-y)\frac{df}{dy}=0 \qquad (1)$$

гдѣ

$$f(x,y)=0 \qquad (2)$$

есть уравненіе искомаго геометрическаго мѣста. Комбинируя уравненія (1) и (2) легко убѣдиться въ справедливости высказаннаго въ задачѣ утвержденія.

191. Черезъ три вершины прямоугольнаго треугольника проведены параболы; къ этимъ параболамъ проводимъ касательныя, параллельныя гипотенузѣ даннаго треугольника. 1) Найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія. 2) Искомое мѣсто есть коническое сѣченіе, пересѣкающее каждую параболу въ четырехъ точкахъ; найти геометрическое мѣсто центра тяжести треугольника, образованнаго общими сѣкущими, непроходящими черезъ начало. (Ecole normale, 1874).

192. Найти геометрическое мѣсто центра эллипса постоянныхъ размѣровъ, проходящаго черезъ данную точку, фокальная ось котораго проходитъ черезъ другую данную точку.

Отв. Можно посовѣтовать рѣшать эту задачу при помощи преобразованія координатъ.

193. Найти геом. мѣсто точки прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ точки P къ коническимъ сѣченіямъ, проходящимъ черезъ четыре точки.

Отв. См. зад. 1 и 190. Подлежитъ исключенію коэффиціентъ B.

194. Найти геометрическое мѣсто центра эллипса съ постоянной площадью, описаннаго около треугольника.

Отв. Уравненіе эллипса, координаты центра котораго α и β, имѣетъ видъ:

$$A(x-\alpha)^2+2B(x-\alpha)(y-\beta)+C(y-\beta)^2=1. \qquad (*)$$

Выражая условія того, чтобы эллипсъ проходилъ черезъ три точки $(0, 0)$ $(a, 0)$ $(0, b)$, получаемъ три равенства:

$$A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2=1, \qquad (1)$$

$$A(a-\alpha)^2-2B(a-\alpha)\beta+C\beta^2=1, \qquad (2)$$

$$A\alpha^2-2B(b-\beta)\alpha+C(b-\beta)^2=1. \qquad (3)$$

Вычитая (1) изъ (2) и (1) изъ (3), можемъ условія (2) и (3) замѣнить двумя слѣдующими: $\frac{Aa}{2}=A\alpha+B\beta$ (4), $\frac{Cb}{2}=B\alpha+C\beta$ (5). Условія (4) и (5) позволяютъ выразить A и C черезъ B. Подставляя полученныя выраженія въ условіе (1), мы опредѣлимъ B, а слѣдовательно, A и C. Остается выразить условіе постоянства площади, что легко сдѣлать, принимая въ соображеніе, что площадь эллипса

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}=1$$

имѣетъ видъ: πlm. (см. § 18. Геом. трехъ изм.). Мы замѣчаемъ, что уравненіе (*) послѣ разложенія на сумму квадратовъ принимаетъ видъ:

$$L[A(x-\alpha)+B(y-\beta)]^2+[L(y-\beta)]^2=P,$$

гдѣ $P=LA$, а $L=AC-B^2$. Оси l и m выражаются на основаніи § 151 формулами: $l=\sqrt{\frac{P}{A_1AL}}$, $m=\sqrt{\frac{P}{AC_1L}}$; отсюда $lm=\frac{1}{\sqrt{A_1C_1}}$, гдѣ A_1 и C_1 суть корни квадратнаго уравненія (см. § 149). Произведеніе корней

$$\sin^2\theta\, A_1C_1=AC-B^2.$$

Слѣдовательно, искомая площадь эллипса выразится формулой: $\frac{\pi \sin\theta}{\sqrt{AC-B^2}}$, гдѣ θ уголъ между осями координатъ (см. § 299).

195. Найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ равностороннимъ гиперболамъ, касающимся трехъ сторонъ даннаго треугольника.

Отв. Можно посовѣтовать выбрать за оси координатъ двѣ стороны даннаго треугольника.

196. Данъ кругъ C, центръ котораго лежитъ на оси y, и рядъ окружностей, касающихся оси x-овъ въ началѣ; найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія къ этимъ окружностямъ касательныхъ, общихъ данному кругу и даннымъ окружностямъ.

Отв. Назовемъ ординату центра даннаго круга черезъ a, его радіусъ черезъ R. Тогда искомое геометрическое мѣсто разбивается на двѣ кривыя, опредѣляемыя уравненіями:

$$(a+y+R)x^2-(a-y-R)\,y^2=0,\ (a+y-R)x^2-(a-y+R)\,y^2=0.$$

197. Найти геометрическое мѣсто основаній нормалей, проведенныхъ изъ данной точки къ системѣ подобныхъ, подобно-расположенныхъ и концентрическихъ эллипсовъ.

Отв. Уравненіе системы заданныхъ эллипсовъ можетъ быть написано такъ:

$$\frac{x^2}{k^2a^2}+\frac{y^2}{k^2b^2}=1.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе задачи не представляетъ затрудненій, если принять въ соображеніе задачу 22.

198. Найти геометрическое мѣсто вершинъ параболъ, вписанныхъ въ прямоугольный треугольникъ.

Отм. См. зад. 2, 106. Координаты вершины параболъ суть:

$$\xi=\frac{ab}{(a^2+b^2)^2}\,b^3,\ \eta=\frac{ab}{(a^2+b^2)^2}\,a^3.$$

Исключая a и b изъ этихъ друхъ равенствъ и условія:

$$an+bm=ab,$$

получаемъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

199. Найти геометрическое мѣсто основаній нормалей, опущенныхъ изъ вершины прямого угла треугольника, въ который вписаны параболы.

Отв. Принимая условія предыдущей задачи, замѣчаемъ, что придется исключать a и b при помощи уравненія нормали, проходящей черезъ начало координатъ и имѣющаго видъ:

$$xy\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+(x^2-y^2)\,\frac{1}{ab}+\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0.$$

200. Данъ треугольникъ ABC и эллипсъ, имѣющій фокусами точки B и C; найти геометрическое мѣсто другого фокуса эллипса, вписаннаго въ треугольникъ ABC, одинъ фокусъ котораго находится на данномъ эллипсѣ.

Отв. Уравненіе заданнаго эллипса пусть будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Пусть tg-сы угловъ, составляемыхъ другими сторонами треугольника съ основаніемъ, принятымъ за ось х-овъ, будетъ A и B. Тогда, обозначая координаты фокуса

вписаннаго эллипса, лежащаго на данномъ эллипсѣ, черезъ x и y, а другого фокуса черезъ ξ и η, замѣчаемъ, что, если соединимъ оба фокуса съ вершинами треугольника, то, на основаніи зад. 32, эти послѣднія линіи будутъ равно наклонены къ соотвѣтствующимъ сторонамъ треугольника. Тангенсы угловъ, составляемыхъ съ осью х-овъ прямыми, проведенными черезъ оба фокуса вписаннаго эллипса къ фокусу $(+c, o)$, будутъ $\frac{y}{x-c}$ и $\frac{\eta}{\xi - c}$; что касается другого фокуса, то *tang*-сы будутъ $\frac{y}{x+c}$ и $\frac{\quad}{\xi + c}$. Обозначимъ теперь черезъ $\varphi(\xi, \eta)$ функцію; $\frac{A(\xi - c) - \eta}{\xi - c + A\eta}$, а черезъ $\psi(\xi, \eta)$ функцію $\frac{B(\xi + c) - \eta}{\xi + c + B\eta}$, получимъ, слѣдующихъ два равенства: $\frac{y}{x-c} = \varphi(\xi, \eta)$, $\frac{y}{x+c} = \psi(\xi, \eta)$. Опредѣляя изъ этихъ уравненій x и y черезъ ξ и η и подставляя въ уравненіе заданнаго эллипса, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

Общія свойства коническихъ сѣченій.

Сокращенный способъ.

234. Подобно тому, какъ мы примѣняли сокращенный способъ при рѣшеніи задачъ на прямую, можно разсматривать и коническія сѣченія. Пусть будутъ $S=o$, $S'=o$ уравненія двухъ линій второго порядка. Покажемъ, что двѣ кривыя 2-го порядка пересѣкаются въ четырехъ точкахъ. Чтобы найти координаты точекъ пересѣченія, необходимо рѣшить относительно x и y два уравненія.

$$S = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = o$$

$$S' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f' = o$$

Эти уравненія можно переписать такъ

$$\left.\begin{aligned} cy^2 + 2Uy + V &= o \\ c'y^2 + 2U'y + V' &= o \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ $U = bx + e$, $V = ax^2 + 2dx + f$, $U' = b'x + e'$, $V' = a'x^2 + 2d'x + f'$.

Исключимъ изъ системы (1) y. Умножая первое уравненіе на c', а второе на c и вычитая, получимъ

$$2\,(cU' - c'U)\,y + V'c - c'V = o \qquad (2)$$

Умножая первое изъ уравненій (1) на V', второе-же на V, вычитая и сокращая на y, получимъ

$$(V'c - c'V)\,y + 2\,(UV' - U'V) = o \qquad (3)$$

Исключая изъ уравненій (2) и (3) y, мы получимъ

$$4\,(cU' - c'U)\,(UV' - U'V) - (V'c - c'V)^2 = o.$$

Подставляя въ послѣднее уравненіе вмѣсто U, V, U', V' ихъ выраженія черезъ x и раскрывая скобки, мы получимъ уравненіе 4-ой степени относительно x

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o \qquad (4)$$

гдѣ A, B, C, D, E выражаются черезъ коэффиціенты заданныхъ уравненій.

235. Итакъ, мы видимъ, что два коническихъ сѣченія пересѣкаются въ четырехъ точкахъ, четыре абсциссы которыхъ получаются, какъ корни уравненія (4).

Изъ алгебры извѣстно, что уравненія съ дѣйствительными коэффиціентами могутъ имѣть мнимые корни, причемъ эти корни должны входить въ четномъ числѣ и быть по парно сопряженными, т. е. каждая пара мнимыхъ корней имѣетъ видъ $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, $\alpha - \beta \sqrt{-1}$; отсюда мы заключаемъ, что уравненіе (4) имѣетъ или всѣ четыре дѣйствительныхъ корня, или же два корня дѣйствительные, а два мнимые, или же наконецъ всѣ четыре корня мнимые.

Каждый дѣйствительный корень уравненія (4) даетъ абсциссу точки пересѣченія заданной пары коническихъ сѣченій, соотвѣтствующая ордината точки пересѣченія получается черезъ рѣшеніе относительно y уравненія (2) или (3).

Изъ сказаннаго мы заключаемъ, что два коническихъ сѣченія или не пересѣкаются, или же пересѣкаются въ 2-хъ или 4-хъ точкахъ. Первый случай имѣетъ мѣсто, когда всѣ корни уравненія (4) мнимые, второй когда два вещественные и наконецъ третій, когда всѣ четыре корня вещественные.

Если мы будемъ вводить въ разсмотрѣніе мнимыя точки, т. е. точки, координаты которыхъ мнимыя, то можемъ утверждать, что каждая пара коническихъ сѣченій пересѣкается въ четырехъ точкахъ.

236. Уравненіе (1) $S - kS' = o$ при различныхъ k опредѣляетъ, очевидно, различныя коническія сѣченія, проходящія черезъ четыре точки пересѣченія коническихъ сѣченій $S = o$, $S' = o$ и даетъ при разныхъ k такъ называемый *пучекъ* коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ эти четыре точки.

237. Число k можно подобрать такъ, чтобы уравненіе (1) представляло двѣ прямыя.

Условіе обращенія коническаго сѣченія

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = o$$

въ систему двухъ прямыхъ состоитъ, какъ мы уже видѣли (см. § 88), въ равенствѣ нулю дискриминанта

$$ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2.$$

Назовемъ дискриминантъ уравненія $S - k\,S' = o$, черезъ D, а дискриминанты уравненій $S = o$ и $S' = o$ черезъ Δ и Δ', тогда

$$D = (a - ka')(c - kc')(f - kf') + 2\,(b - kb')(d - kd')(e - ke') - \ldots =$$
$$= \Delta + k\Theta + k^2\Theta' + k^3\Delta' = o \qquad (*)$$

Уравненіе (*) даетъ для k три значенія k_1, k_2, k_3, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одно вещественное, какъ это извѣстно изъ алгебры.

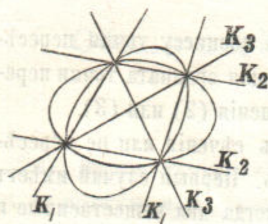
Когда всѣ три корня вещественные, тогда могутъ существовать три дѣйствительныхъ пары прямыхъ линій

$$S - k_1\,S' = o,\ S - k_2\,S' = o,\ S - k_3\,S' = o, \qquad (**)$$

представляющихъ нечто иное, какъ полный четыреугольникъ, составляемый четырьмя точками пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій $S=o$ и $S'=o$ (см. черт. 123).

Прямыя (**) называются хордами пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій $S=o$, $S'=o$.

238. У каждыхъ двухъ коническихъ сѣченій существуютъ всегда по крайней мѣрѣ двѣ дѣйствительныя изъ числа хордъ пересѣченія. Если заданныя кон. сѣченія пересѣкаются въ четырехъ точкахъ, то и двѣ другія пары хордъ будутъ дѣйствительныя. Въ случаѣ если коническія сѣченія не пересѣкаются, то одна пара хордъ существуетъ, двѣ остальныя пары мнимыя, но точки пересѣченія хордъ, составляющихъ каждую изъ паръ (**) всѣ три дѣйствительныя. Наконецъ, въ случаѣ двухъ точекъ пересѣченія существуетъ только одна точка пересѣченія дѣйствительной пары хордъ, двѣ же другія пары съ ихъ точками пересѣченія мнимыя.



Черт. 123.

Чтобы доказать справедливость сказаннаго, мы разсмотримъ мнимыя точки и мнимыя прямыя. (См. § 52).

Двѣ мнимыя точки мы будемъ называть сопряженными, если у нихъ абсциссы и ординаты суть мнимыя сопряженныя. Такъ напр. точки M_1 $(x_1\ y_1)$, $M_2(x_2\ y_2)$ суть мнимыя сопряженныя, если

$$\left.\begin{aligned} x_1=\alpha+\beta\sqrt{-1},\ y_1=\gamma+\delta\sqrt{-1} \\ x_2=\alpha-\beta\sqrt{-1},\ y_2=\gamma-\delta\sqrt{-1} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ дѣйствительныя точки, какъ мы видѣли, писалось въ видѣ

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2} \quad (^*)$$

Условимся подъ прямою, проходящею черезъ двѣ мнимыя точки разумѣть прямую, опредѣляемую уравненіемъ (*). Легко показать, что когда точки M_1 и M_2 мнимыя сопряженныя, то уравненіе прямой, проходящей черезъ нихъ, не будетъ заключать мнимыхъ коэффиціентовъ; въ самомъ дѣлѣ, подставляя въ уравненіе (*) выраженія (1), получимъ

$$\frac{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}{2\beta\sqrt{-1}}=\frac{y-\gamma+\delta\sqrt{-1}}{2\delta\sqrt{-1}}$$

откуда окончательно

$$\frac{x-\alpha}{\beta}=\frac{y-\gamma}{\delta} \quad (2)$$

Итакъ, мы видимъ, что черезъ двѣ мнимыя сопряженныя точки (1) проходитъ одна дѣйствительная прямая (2).

Условимся говорить, что уравненіе

$$(A+\sqrt{-1}\,A_1)\,x+(B+\sqrt{-1}\,B_1)\,y+C+\sqrt{-1}\,C_1=0$$

опредѣляетъ нѣкоторую, такъ называемую мнимую, прямую.

Двѣ мнимыя прямыя:

$$\left.\begin{aligned}(A+A_1\sqrt{-1})\,x+(B+B_1\sqrt{-1})\,y+C+C_1\sqrt{-1}=0\\(A-A_1\sqrt{-1})\,x+(B-B_1\sqrt{-1})\,y+C-C_1\sqrt{-1}=0\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

называются сопряженными.

Легко доказать, что двѣ сопряженныя мнимыя прямыя пересѣкаются въ дѣйствительной точкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (3) можно переписать такъ

$$Ax+By+C+\sqrt{-1}\,(A_1x+B_1y+C_1)=0$$

$$Ax+By+C-\sqrt{-1}\,(A_1x+B_1y+C_1)=0$$

откуда видно, что они оба удовлетворяются координатами точки пересѣченія дѣйствительныхъ прямыхъ

$$Ax+By+C=0$$
$$A_1x+B_1y+C_1=0;$$

эта дѣйствительная точка и есть точка пересѣченія сопряженныхъ прямыхъ.

239. Замѣтивъ это, покажемъ справедливость высказаннаго относительно хордъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій.

Если всѣ четыре точки мнимыя, то ихъ координаты очевидно будутъ имѣть видъ:

$$M_1\,(\alpha_1+\beta_1 i,\ \gamma_1+\delta_1 i),\ \ M_2\,(\alpha_1-\beta_1 i,\ \gamma_1-\delta_1 i),\ \ M_3\,(\alpha_2+\beta_2 i,\ \gamma_2+\delta_2 i),$$
$$M_4\,(\alpha_2-\beta_2 i,\ \gamma_2-\delta_2 i)$$

и двѣ хорды M_1M_2, M_3M_4 будутъ дѣйствительныя, что же касается двухъ другихъ паръ хордъ, то онѣ будутъ имѣть уравненіями:

$$L\pm Mi=0,\ \ L'\pm M'i=0$$

и дадутъ въ пересѣченіи каждая пара по одной дѣйствительной точкѣ

$$(L=0,\ M=0);\ (L'=0,\ M'=0).$$

Итакъ, три точки пересѣченія паръ хордъ дѣйствительныя.

Если же коническія сѣченія пересѣкаются въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ, то изъ шести хордъ двѣ будутъ дѣйствительныя, именно тѣ, которыя соединяютъ двѣ дѣйствительныя точки и двѣ точки мнимыя сопряженныя, остальныя четыре хорды будутъ мнимыя; и такъ какъ каждая изъ остальныхъ проходитъ черезъ дѣйствительную точку, то онѣ не могутъ имѣть другихъ дѣйствительныхъ точекъ.

Въ этомъ случаѣ изъ трехъ точекъ пересѣченія паръ хордъ одна дѣйствительная, именно та, которая лежитъ на пересѣченіи дѣйствительныхъ хордъ; другія же двѣ мнимыя.

Случай трехъ дѣйствительныхъ точекъ есть тотъ случай, когда уравненіе (*) § 237 даетъ для k три вещественныхъ корня.

Остается указать, чѣмъ будетъ отличаться случай шести дѣйствительныхъ хордъ отъ остальныхъ.

Разлагаемъ первую часть уравненія $S - k\,S' = 0$ на сумму квадратовъ; пусть полученное уравненіе имѣетъ видъ

$$L\alpha^2 + \beta^2 - P = 0, \tag{1}$$

гдѣ $P = LN - M^2$ (см. § 96) и, слѣдовательно,

$$P = (AC - B^2)(AF - D^2) - (AE - BD)^2 = AD,$$

гдѣ D дискриминантъ. Но мы k нашли изъ уравненія $D = 0$, причемъ для k получили три вещественныхъ рѣшенія, слѣдовательно, уравненіе (1) имѣетъ видъ $L\alpha^2 + \beta^2 = 0$.

Въ этомъ уравненіи $L = (a - ka')(c - kc') - (b - kb')^2$. Если $L < 0$, то уравненіе (1) даетъ двѣ дѣйствительныя хорды при разсматриваемомъ значеніи для k, а если $L > 0$, то хорды мнимыя, пересѣкающіяся въ точкѣ $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

240. Мы получимъ уравненіе совокупности шести хордъ, если исключимъ k изъ уравненій $S - kS' = 0$ и $\Delta + \Theta k + \Theta' k^2 + \Delta' k^3 = 0$; получается уравненіе шестой степени

$$\Delta .\, S'^3 + \Theta .\, S'^2 .\, S + \Theta' .\, S' .\, S^2 + \Delta' \, S^3 = 0.$$

241. Если $\Delta = 0$, т. е., если $S = 0$ представляетъ систему двухъ прямыхъ, то уравненіе $\Delta + \Theta k + \Theta' k^2 + \Delta' k^3 = 0$ (*) даетъ для k одно значеніе равное нулю, напр. $k_1 = 0$, двѣ изъ числа хордъ опредѣляются въ этомъ случаѣ уравненіемъ $S = 0$. Если $\Delta' = 0$, то $k_1 = \infty$ и одна пара хордъ опредѣляется уравненіемъ $S' = 0$.

242. На основаніи замѣчаній предыдущаго параграфа мы видимъ, что уравненіе

$$S - k\,\alpha\,\beta = 0,$$

гдѣ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ суть уравненія двухъ прямыхъ, опредѣлитъ коническое сѣченіе, имѣющее съ коническимъ сѣченіемъ $S = 0$ хордами пересѣченія прямыя $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, другими словами, коническое сѣченіе, проходящее черезъ четыре точки сѣченія кривой $S = 0$ прямыми $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

243. Если будетъ въ одно время $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$, то $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$, а k_3 опредѣлится изъ уравненія

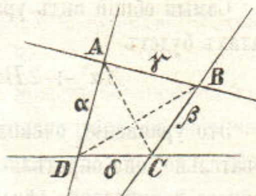
$$\Theta + k_3\,\Theta' = 0. \tag{1}$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе $S - kS' = 0$ имѣетъ видъ (2) $\alpha\beta - k\gamma\,\delta = 0$ и

при разныхъ k опредѣляетъ коническія сѣченія, проходящія черезъ четыре точки A, B, C, D (см. черт. 124) пересѣченія прямыхъ $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$. Если же мы подставимъ въ уравненіе (2) то значеніе k, которое получается изъ уравненія (1), то получимъ уравненіе

$$\Theta'\alpha\beta+\Theta\gamma\delta=0$$

опредѣляющее совокупность діагоналей AC и BD.



Черт. 124.

Задачи.

1) Найти уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ точки пересѣченія даннаго коническаго сѣченія $S=0$ съ осями координатъ.

Отв. $S-kxy=0$.

2) Найти уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ пять данныхъ точекъ.

Отв. Составить уравненія $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$ сторонъ четыреугольника, имѣющаго вершинами четыре изъ числа точекъ. Уравненіе искомаго коническаго сѣченія будетъ $\alpha\gamma=k\beta\delta$. Остается подобрать k такъ, чтобы послѣднему уравненію удовлетворяли координаты пятой точки.

3) Написать уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ 5 точекъ (1, 2), (3, 5), (—1, 4), (—3, —1), (—4, 3).

Отв. Разсматривая четыреугольникъ, составленный четырьмя первыми точками видимъ, что уравненіе должно быть

$$(3x-2y+1)(5x-2y+13)=k(x-4y+17)(3x-4y+5).$$

Подставляя въ него координаты (—4, 3) пятой точки, получимъ $k=-\frac{22}{19}$ откуда окончательно

$$79x^2-320xy+301y^2+1101x-1665y+1586=0.$$

244. Мы видѣли уже, что уравненіе $S-k\alpha\beta=0$ опредѣляетъ коническое сѣченіе S', имѣющее съ даннымъ S хорды пересѣченія PQ и pq (см. черт. 125), опредѣляемыя уравненіями $\alpha=0$, $\beta=0$. Приближая хорду pq ($\beta=0$) до совпаденія съ хордою PQ, получимъ уравненіе $S-k\alpha^2=0$ коническаго сѣченія, касающагося въ двухъ концахъ хорды PQ съ заданнымъ коническимъ сѣченіемъ (см. черт. 126).

Если коническое сѣченіе $S=0$ распадается на двѣ прямыя, то мы замѣтимъ, что уравненіе

$$\beta\gamma-k\alpha^2=0$$

опредѣляетъ коническое сѣченіе, касающееся двухъ прямыхъ $\beta=0$ и $\gamma=0$ въ точкахъ B и C, въ которыхъ эти прямыя пересѣкаетъ хорда $\alpha=0$ (см. черт. 127).

Уравненіе коническаго сѣченія $\beta\gamma-k\alpha^2=0$, отнесенное къ двумъ касатель-

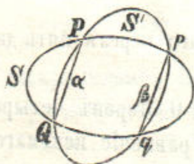
нымъ $\beta = 0$, $\gamma = 0$ и хордѣ касанія $\alpha = 0$, есть частный случай коническаго сѣченія, выраженнаго въ трилинейныхъ координатахъ.

245. Пусть треугольникъ трилинейной системы состоитъ изъ прямыхъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

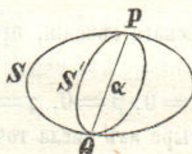
Самый общій видъ уравненія коническаго сѣченія въ трилинейныхъ координатахъ будетъ

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0. \qquad (1)$$

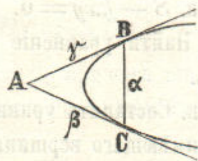
Это уравненіе, очевидно, второй степени относительно координатъ x, y и, слѣдовательно, оно опредѣляетъ нѣкоторое коническое сѣченіе и наоборотъ, уравненіе всякого коническаго сѣченія можетъ быть написано въ видѣ (1). Въ самомъ дѣлѣ,



Черт. 125.



Черт. 126.



Черт. 127.

это уравненіе заключаетъ пять произвольныхъ отношеній пяти изъ числа коэффиціентовъ къ шестому и, слѣдовательно, можно опредѣлить эти отношенія подъ условіемъ, чтобы коническое сѣченіе проходило черезъ 5 заданныхъ точекъ; отсюда мы заключаемъ, что приличнымъ выборомъ коэффиціентовъ $A, B, \ldots$ можно заставить коническое сѣченіе (1) совпадать съ любымъ заданнымъ коническимъ сѣченіемъ.

246. Разложимъ первую часть уравненія (1) на сумму квадратовъ. Если A не равно нулю то

$$(A\alpha + B\beta + D\gamma)^2 + L\beta^2 + 2M\beta\gamma + N\gamma^2 = 0,$$

гдѣ

$$L = AC - B^2,\ M = AE - BD,\ N = AF - D^2.$$

Если L не равно нулю, то

$$L\,(A\alpha + B\beta + D\gamma)^2 + (L\beta + M\gamma)^2 + P\gamma^2 = 0,$$

гдѣ

$$P = NL - M^2.$$

Обозначая

$$A\alpha + B\beta + D\gamma = \alpha_1,\ L\beta + M\gamma = \beta_1,$$

мы получимъ

$$L\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + P\gamma^2 = 0. \qquad (*)$$

Однимъ словомъ, легко видѣть, что каковы бы ни были коэффиціенты уравненія (1), мы всегда можемъ это уравненіе представить въ видѣ

$$L\alpha_1{}^2 + M\beta_1{}^2 + N\gamma_1{}^2 = 0$$

гдѣ α_1, β_1, γ_1 суть нѣкоторыя линейныя функціи α, β, γ.

Взявъ за оси трилинейныхъ координатъ прямыя $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, мы видимъ, что всякое коническое сѣченіе въ трилинейныхъ координатахъ можетъ быть представлено въ видѣ:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0,$$

другими словами, мы видимъ, что перемѣною трилинейныхъ координатъ можно въ уравненіи (1) § 245 уничтожить коэффиціенты B, D, E.

247. Изъ этихъ трехъ линейныхъ функцій α, β, γ одна можетъ обращаться въ постоянное число, что дастъ намъ случай, который мы разсматривали въ нашемъ курсѣ при изученіи основныхъ свойствъ линіи второго порядка съ центромъ, ибо уравненіе $L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0$ отличается отъ уравненія (*) только тѣмъ, что $\gamma = 1$. Въ этомъ случаѣ, уравненіе $\gamma = 0$ одной изъ осей трилинейныхъ координатъ обращается въ уравненіе невозможное: $1 = 0$ и даетъ такъ называемую безконечно далекую прямую. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе $Ax + By + C = 0$ опредѣляетъ прямую, отстоящую отъ начала координатъ на разстояніе $\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; если же мы положимъ C не $= 0$, а $A = 0$ и $B = 0$, то говорятъ, что уравненіе $0x + 0.y + C = 0$, или $C = 0$, опредѣляетъ безконечно далекую прямую, отстоящую отъ начала координатъ на разстояніе $\frac{C}{0} = \infty$.

Итакъ, мы видимъ, что разсмотрѣніе линій второго порядка съ центромъ въ томъ видѣ, какъ это сдѣлано въ курсѣ, начиная съ § 131, приводится къ способу трилинейныхъ координатъ, причемъ за координатныя прямыя взяты два сопряженные діаметра $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и безконечно далекая прямая.

248. Покажемъ теперь, что двѣ изъ числа функцій α_1, β_1, γ_1 не могутъ обращаться въ постоянное число, ибо тогда получимъ

$$\alpha_1 = A\alpha + B\beta + D\gamma = k,$$

$$\beta_1 = A_1\alpha + B_1\beta + D_1\gamma = k_1.$$

Умножая первое уравненіе на k_1, а второе на k и вычитая, получимъ

$$(Ak_1 - A_1k)\alpha + (Bk_1 - B_1k)\beta + (Dk_1 - D_1k)\gamma = 0,$$

что показывало бы, что три прямыя

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$$

пересѣкаются въ одной точкѣ, чего въ способѣ трилинейныхъ координатъ не должно быть (см. § 63).

249. Коэффиціенты L, M, N суть нѣкоторыя положительныя или отрицательныя числа, причемъ одинъ изъ нихъ или даже два могутъ равняться нулю.

250. Основное свойство коническаго сѣченія, уравненіе котораго приведено въ трилинейныхъ координатахъ къ простѣйшему виду

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = o, \tag{1}$$

состоитъ въ томъ, что относительно него координатный треугольникъ ($\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$) *автополяренъ*, т. е. каждая изъ его сторонъ есть поляра противоположной вершины.

Чтобы доказать это свойство выведемъ для уравненія (1) уравненіе поляры точки (α_0, β_0, γ_0). Если разсматриваемая точка лежитъ на коническомъ сѣченіи, то ея трилинейныя координаты (α_0, β_0, γ_0) удовлетворяютъ уравненію (1). Поляра обращается въ касательную. Итакъ, пусть будетъ (2) ... $L\alpha_0{}^2 + M\beta_0{}^2 + N\gamma_0{}^2 = o$, т. е. точка ($\alpha_0$, β_0, γ_0) лежитъ на коническомъ сѣченіи (1); найдемъ уравненіе касательной въ этой точкѣ къ коническому сѣченію. Вычитая изъ уравненія (1) уравненіе (2), получимъ

$$L(\alpha + \alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + M(\beta + \beta_0)(\beta - \beta_0) + N(\gamma + \gamma_0)(\gamma - \gamma_0) = o \quad (3)$$

Проведемъ черезъ точку α_0, β_0, γ_0 сѣкущую; ея уравненіе будетъ

$$l(\alpha - \alpha_0) + m(\beta - \beta_0) + n(\gamma - \gamma_0) = o. \quad (4)$$

Координаты α_1, β_1, γ_1 другого конца хорды (4) получимъ изъ уравненія (4) и двухъ слѣдующихъ

$$\frac{l}{L(\alpha + \alpha_0)} = \frac{m}{M(\beta + \beta_0)} = \frac{n}{N(\gamma + \gamma_0)} \quad (5)$$

Остается теперь опредѣлить l, m и n такъ, чтобы точки сѣченія совпали; для этого въ уравненіи (5) необходимо положить $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$, тогда получимъ:

$$\frac{l}{2L\alpha_0} = \frac{m}{2M\beta_0} = \frac{n}{2N\gamma_0}.$$

Отсюда уравненіе касательной напишется въ такомъ видѣ:

$$L\alpha_0(\alpha - \alpha_0) + M\beta_0(\beta - \beta_0) + N\gamma_0(\gamma - \gamma_0) = o$$

или окончательно

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = o \quad (6)$$

Послѣднее уравненіе (6) въ случаѣ, если уравненіе (2) не удовлетворяется, даетъ поляру точки α_0, β_0, γ_0.

Уравненіе (6) показываетъ, что вершинѣ $\alpha_0 = o$, $\beta_0 = o$ координатнаго треугольника, лежащей на пересѣченіи сторонъ $\alpha = o$, $\beta = o$, соотвѣтствуетъ поляра $N\gamma\gamma_0 = o$, но N мы не предполагаемъ равнымъ o, также γ_0 не $= o$, ибо координатныя прямыя не пересѣкаются въ одной точкѣ и, очевидно, поляра вершины ($\alpha = o$, $\beta = o$) есть прямая $\gamma = o$. Подобнымъ образомъ мы покажемъ, что полярами двухъ другихъ вершинъ координатнаго треугольника будутъ противоположныя стороны.

Задача. Данъ центръ (a, b) равносторонняго треугольника и радіусъ круга вписаннаго R. Найти уравненіе круга, относительно котораго данный треугольникъ автополяренъ.

Отв. Три стороны треугольника имѣютъ уравненія

$$A_1 = (x - a)\cos\alpha_1 + (y - b)\sin\alpha_1 - R = o$$

$$A_2 = (x - a)\cos\alpha_2 + (y - b)\sin\alpha_2 - R = o$$

$$A_3 = (x - a)\cos\alpha_3 + (y - b)\sin\alpha_3 - R = o$$

гдѣ $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2\pi}{3}, \alpha_3 = \alpha_2 + \frac{2\pi}{3}$

Уравненіе круга, относительно котораго заданный треугольникъ автополяренъ есть

$$LA_1{}^2 + MA_2{}^2 + NA_3{}^2 = o;$$

Остается опредѣлить L, M, N такъ, чтобы это уравненіе опредѣляло кругъ; окончательно получаемъ уравненіе $(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2R^2 = o$.

Получается кругъ мнимый.

251. Итакъ мы видимъ, что приведеніе уравненія коническаго сѣченія въ трилинейныхъ координатахъ къ простѣйшему виду:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0 \qquad (*)$$

приводится къ выбору за оси координатъ треугольника, автополярнаго относительно коническаго сѣченія. Такихъ треугольниковъ существуетъ безчисленное множество, а потому уравненіе всякаго коническаго сѣченія можетъ быть приведено къ виду (*) на безчисленное множество maнеровъ. Напр. мы видѣли, что при выборѣ за оси двухъ сопряженныхъ діаметровъ и безконечно далекой прямой, уравненіе коническаго сѣченія имѣло видъ

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0; \qquad (1)$$

тоже самое уравненіе можно переписать, взявъ за оси два другихъ сопряженныхъ діаметра

$$\alpha_1 = l\alpha + m\beta,$$

$$\beta_1 = Lm\alpha - l\beta;$$

тогда получимъ уравненіе

$$L\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + P_1 = 0, \text{ гдѣ } P_1 = P\,(Lm^2 + l^2). \qquad (2)$$

Мѣняя числа l и m, получаемъ безчисленное множество уравненій (2), равносильныхъ уравненію (1).

252. Сказанное въ предыдущемъ параграфѣ покажемъ геометрически. Предварительно замѣтимъ нѣсколько основныхъ свойствъ поляръ.

253. Мы видѣли уже, что уравненіе коническаго сѣченія въ трилинейныхъ координатахъ можетъ быть приведено къ виду:

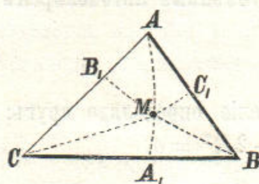
$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0.$$

Уравненіе поляры точки $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ было

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = 0. \quad (**)$$

Для изученія свойствъ поляръ по уравненію (**), войдемъ въ нѣкоторыя подробности относительно способа трилинейныхъ координатъ.

254. Въ параграфѣ 63 мы ввели въ разсмотрѣніе систему трилинейныхъ координатъ α, β, γ, причемъ предполагали, что уравненіе трехъ координатныхъ прямыхъ $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ приведены къ нормальному виду (см. §§ 60, 24).



Черт. 128.

Три координаты α, β, γ, суть не что иное, какъ три разстоянія отъ разсматриваемой точки до трехъ координатныхъ прямыхъ $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$, взятыя съ тѣмъ или другимъ знакомъ.

Если начало декартовыхъ координатъ (x, y) внутри треугольника трилинейныхъ координатъ, то для точекъ внутри треугольника всѣ три координаты α, β, γ отрицательны. Назовемъ черезъ a, b, c длины сторонъ BC, CA, AB координатнаго треугольника ($\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$). Возьмемъ какую нибудь точку M внутри треугольника, координаты этой точки α, β, γ будутъ

$$\alpha = -MA_1, \quad \beta = -MB_1, \quad \gamma = -MC_1;$$

обозначая черезъ $\triangle$ взятую со знакомъ минусъ удвоенную площадь треугольника ABC мы получимъ

$$\triangle = -2\,(CBM + ACM + BAM) =$$

$$= -BC.MA_1 - CA.MB_1 - AB.MC_1,$$

откуда окончательно такое соотношеніе между трилинейными координатами

$$\triangle = a\alpha + b\beta + c\gamma; \quad (1)$$

соотношеніе (1) имѣетъ мѣсто гдѣ бы ни была взята точка M, внутри треугольника или снаружи; надо помнить, что если, напримѣръ, точка M будетъ по другую сторону линіи a, то координата α будетъ другаго знака, то есть положительная, а тогда

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = -2\,(ACM + BAM - CBM) = \triangle.$$

Итакъ, мы видимъ, что три координаты α, β, γ нѣкоторой точки M всегда удовлетворяютъ условію

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \triangle.$$

255. Если мы напишемъ уравненіе

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = k$$

гдѣ k не $= \triangle$, то такое уравненіе будетъ опредѣлять прямую, лежащую на безконечно далекомъ разстояніи, ибо такое уравненіе приводится къ уравненію $0.x + 0.y + c = 0$. (см. § 247).

256. Общее уравненіе линіи, параллельной $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, можетъ быть написано въ трилинейныхъ координатахъ такъ:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + k(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

ибо оно приводится къ такому:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + k\triangle = 0,$$

причемъ $k\triangle$ постоянное.

257. Мы знаемъ, что линія, параллельная $\alpha = 0$ (*), имѣетъ уравненіе $\alpha - kC = 0$ (**), гдѣ k и C числа постоянныя; послѣднее уравненіе показываетъ, что прямая (**) проходитъ черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ $\alpha = 0$, $C = 0$, изъ которыхъ вторая безконечно далекая. Уравненіе (**) опредѣляетъ параллельную прямую, какъ встрѣчающуюся съ данною въ безконечно далекой точкѣ.

Задачи.

1) Написать уравненіе внутреннихъ биссекторовъ угловъ треугольника.

Отв. $\alpha - \beta = 0$, $\beta - \gamma = 0$, $\gamma - \alpha = 0$.

2) Написать уравненіе медіанъ, т. е. линій, соединяющихъ вершины угловъ съ серединами противоположныхъ сторонъ.

Отв. Обозначивъ углы, противоположные сторонамъ α, β, γ, черезъ A, B, C, получимъ уравненія медіанъ въ видѣ:

$$\alpha \sin A - \beta \sin B = 0;\ \beta \sin B - \gamma \sin C = 0;\ \gamma \sin C - \alpha \sin A = 0.$$

3) Найти уравненіе высотъ треугольника.

Отв. $\alpha \cos A - \beta \cos B = 0$, $\beta \cos B - \gamma \cos C = 0$, $\gamma \cos C - \alpha \cos A = 0$.

4) Найти уравненіе перпендикуляра, возставленнаго изъ середины какой нибудь стороны треугольника.

Отв. Середина стороны C опредѣлится изъ двухъ уравненій: $\alpha \sin A - \beta \sin B = 0$, $\gamma = 0$; уравненіе искомаго перпендикуляра будетъ слѣдовательно,

$$\lambda(\alpha \sin A - \beta \sin B) - \mu\gamma = 0,$$

вычитая уравненіе соотвѣтственной высоты, получимъ:

$$\lambda \sin A - k \cos A = pa = q \sin A$$

$$-\lambda \sin B + k \cos B = pb = q \sin B$$

$$-\mu = pc = q \sin C,$$

откуда получимъ:

$$\lambda = q\,\frac{\sin C}{\sin(A - B)},\quad \mu = -q \sin C;$$

искомое уравненіе будетъ

$$\alpha \sin A - \beta \sin B + \gamma \sin (A - B) = 0.$$

5) Показать, что три перпендикуляра задачи 4 пересѣкаются въ центрѣ круга описаннаго.

Отв. Умножая уравненія трехъ перпендикуляровъ на $\sin 2C$, $\sin 2A$, $\sin 2B$ и складывая, получимъ результатъ равный нулю.

6) Показать, что центръ круга описаннаго и точки встрѣчи медіанъ и высотъ лежатъ на одной прямой.

Отв. См. зад. 14 стр. 45. Уравненіе прямой, на которой лежатъ три точки есть:

$$\alpha \sin 2A \sin (B - C) + \beta \sin 2B \sin (C - A) + \gamma \sin 2C \sin (A - B) = 0.$$

6) Найти длину перпендикуляра изъ точки $\alpha' \beta' \gamma'$ на линію $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$.

Отв. $\dfrac{A\alpha' + B\beta' + C\gamma'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2AB \cos C - 2AC \cos B - 2BC \cos A}}$.

258. Уравненіе поляры есть

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = 0. \quad (1)$$

Если полюсъ α_0, β_0, γ_0 двигается, оставаясь постоянно на прямой

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \ (*)$$

то покажемъ, что поляра (1) вертится вокругъ точки M_1, которая есть не что иное, какъ полюсъ прямой (*). Въ самомъ дѣлѣ, выражая, что полюсъ лежитъ на прямой (*), получимъ (2) $l\alpha_0 + m\beta_0 + n\gamma_0 = 0$. Такъ какъ два уравненія (1) и (2) должны удовлетворяться при безчисленномъ множествѣ значеній α_0, β_0, γ_0, то должно быть

$$\frac{L\alpha}{l} = \frac{M\beta}{m} = \frac{N\gamma}{n}. \quad (3)$$

Два уравненія (3) опредѣляютъ точку, черезъ которую, очевидно, проходитъ прямая (1), что и требовалось доказать; точка опредѣляемая уравненіями (3) есть полюсъ прямой (*). Въ самомъ дѣлѣ, называя трилинейныя координаты точки (3) черезъ α_1, β_1, γ_1, получимъ изъ уравненій (3)

$$\alpha_1 = \frac{l}{L}\rho, \quad \beta_1 = \frac{m}{M}\rho, \quad \gamma_1 = \frac{n}{N}\rho, \quad (4)$$

гдѣ ρ есть общая величина отношеній (3).

Уравненіе поляры точки α_1, β_1, γ_1, напишется такъ:

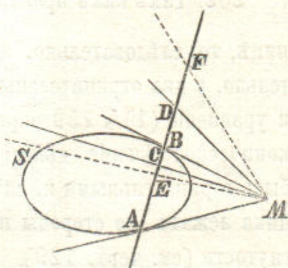
$$L\alpha\alpha_1 + M\beta\beta_1 + N\gamma\gamma_1 = 0;$$

подставляя вмѣсто α_1, β_1, γ_1 ихъ выраженія (4) и сокращая на ρ, получимъ уравненіе (*), что и требовалось доказать.

259. Пусть автополярный треугольникъ для коническаго сѣченія

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0 \qquad (1)$$

будетъ CDM со сторонами MC, MD, CD, опредѣляемыми уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. (см. черт. 129). Черезъ точку M, опредѣляемую уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0$, проведемъ сѣкущую ME, имѣющую уравненіе $\beta - \lambda\alpha = 0$ (2). Прямая эта въ сѣченіи своемъ съ прямою $\gamma = 0$ опредѣляетъ точку $E(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, трилинейныя координаты которой удовлетворяютъ уравненіямъ $\beta_0 - \lambda\alpha_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$. (3). Поляра точки E будетъ стороною FM автополярнаго треугольника EFM и будетъ имѣть уравненіе $L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = 0$. Принимая же во вниманіе уравненія (3), получимъ $L\alpha\alpha_0 + M\beta\lambda\alpha_0 = 0$, или $L\alpha + M\lambda\beta = 0$ (4).



Черт. 129.

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ прямую MF, проходящую черезъ точку M, ибо ея уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ $\beta - \mu\alpha = 0$ (5), гдѣ

$$\mu = -\frac{L}{M\lambda}.$$

Итакъ, мы видимъ, что двѣ прямыя ME и MF суть стороны автополярнаго треугольника EMF, причемъ точка E полюсъ стороны MF и наоборотъ, точка F полюсъ стороны ME.

260. Итакъ, мы видимъ, что въ вершинѣ M ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) коническое сѣченіе опредѣляетъ инволюцію, выражаемую уравненіями:

$$\beta - \lambda\alpha = 0, \quad \beta - \mu\alpha = 0, \quad \lambda\mu = -\frac{L}{M}. \qquad (*)$$

Всѣ пары элементовъ этой инволюціи суть стороны различныхъ автополярныхъ треугольниковъ, имѣющихъ вершиною точку M ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), а основаніемъ прямую CD ($\gamma = 0$).

Инволюція (*) будетъ, очевидно, эллиптическою, если L и M одинаковыхъ знаковъ и гиперболическою, если разныхъ (см. § 191). Двойнымъ элементомъ гиперболической инволюціи должны, очевидно, соотвѣтствовать касательныя MA и MB, проведенныя изъ точки M къ коническому сѣченію, ибо въ этомъ случаѣ полюсъ E долженъ лежать на соотвѣтственной полярѣ MF.

Ясно, что точка M должна лежать со стороны выпуклости кривой, чтобы черезъ нее можно было провести двѣ дѣйствительныя касательныя, или, другими словами, чтобы соотвѣтствующая ей инволюція была гиперболическою.

261. Въ вершинѣ D ($\beta = 0$, $\gamma = 0$) автополярнаго треугольника коническое сѣченіе (1) даетъ инволюцію, опредѣляемую уравненіями

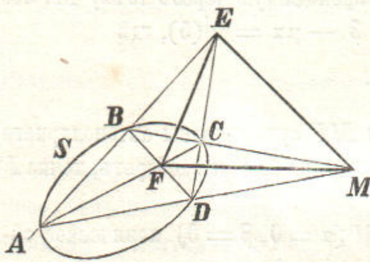
$$\gamma - \lambda\beta = 0, \quad \gamma - \mu\beta = 0, \quad \lambda\mu = -\frac{M}{N}.$$

Наконецъ въ вершинѣ C ($\gamma = 0$, $\alpha = 0$) инволюція опредѣляется уравненіями

$$\alpha - \lambda\gamma = 0, \quad \alpha - \mu\gamma = 0, \quad \lambda\mu = -\frac{N}{L}.$$

262. Такъ какъ произведеніе трехъ отношеній $\frac{L}{M}$, $\frac{M}{N}$, $\frac{N}{L}$ равно единицѣ, то, слѣдовательно, или всѣ три отношенія положительны, или одно положительно, а два отрицательны. Въ первомъ случаѣ всѣ три коэффиціента одного знака и уравненіе (1) § 259 опредѣляетъ мнимое коническое сѣченіе. Если же заданное коническое сѣченіе дѣйствительное, то два изъ предыдущихъ отношеній должны быть отрицательными и, слѣдовательно, двѣ изъ вершинъ автополярнаго треугольника лежатъ со стороны выпуклости коническаго сѣченія и одна со стороны вогнутости (см. черт. 129).

263. Покажемъ, что по заданному очертанію коническаго сѣченія можетъ быть построенъ одною линейкою любой изъ безчисленнаго множества автополярныхъ треугольниковъ. Беремъ произвольную точку M, изъ нея проводимъ двѣ сѣкущія MA и MB, пересѣкающія коническое сѣченіе въ четырехъ точкахъ $ABCD$. Соединяемъ прямыми AB, CD, AC, BD точки A, B, C, D (см. черт. 130). Точки пересѣченія E и F дадутъ двѣ другія вершины автополярнаго треугольника EFM. Покажемъ это. Возьмемъ за треугольникъ трилинейныхъ координатъ ΔAED и пусть уравненія сторонъ ED, AE, AD будутъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.



Черт. 130.

Обозначая уравненіе стороны BC въ трилинейныхъ координатахъ черезъ $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$, получимъ для прямыхъ EF, FM, EM уравненія (см. § 75)

$$\lambda\alpha - \mu\beta = 0, \quad \lambda\alpha + \mu\beta + 2\nu\gamma = 0, \quad \lambda\alpha + \mu\beta = 0. \qquad (*)$$

Уравненіе коническаго сѣченія S, проходящаго черезъ четыре точки A, B, C, D будетъ

$$\gamma.\,(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) - k\alpha\beta = 0. \qquad (1)$$

Преобразуемъ уравненіе это къ новымъ трилинейнымъ координатамъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, взявъ за координатный треугольникъ прямыя (*). Очевидно, будемъ имѣть

$$\alpha_1 = \lambda\alpha - \mu\beta, \quad \beta_1 = (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) + \nu\gamma, \quad \gamma_1 = \lambda\alpha + \mu\beta;$$

отсюда

$$\gamma = \frac{\beta_1 - \gamma_1}{2\nu}, \quad \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = \frac{\beta_1 + \gamma_1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2\lambda}, \quad \beta = \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{2\mu};$$

подставляя въ уравненіе (1), получимъ

$$\frac{\beta_1 - \gamma_1}{2\nu} \cdot \frac{\beta_1 + \gamma_1}{2} - k \cdot \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2\lambda} \cdot \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{2\mu} = 0,$$

откуда окончательно

$$\lambda\mu . \beta_1{}^2 + k\nu\alpha_1{}^2 - \gamma_1{}^2 (\lambda\mu + k\nu) = 0. \qquad (2)$$

Послѣднее уравненіе (2) показываетъ, что треугольникъ EFM (*) ($\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$) автополяренъ относительно всякаго коническаго сѣченія, проходящаго черезъ четыре точки, что и требовалось доказать.

264. На основаніи разсужденій послѣднихъ параграфовъ, мы замѣчаемъ, что каждой точкѣ M плоскости соотвѣтствуетъ опредѣленная инволюція относительно заданнаго коническаго сѣченія.

265. Покажемъ теперь, что фокусы суть точки круговой инволюціи.

Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія въ декартовыхъ координатахъ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

Разсмотримъ инволюцію, которую опредѣляетъ въ точкѣ M (ξ, η) заданное кон. сѣч. (1). Перенесемъ начало координатъ въ точку M; тогда уравненіе (1) обратится въ слѣдующее

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0,$$

гдѣ

$$D_1 = A\xi + B\eta + D, \quad E_1 = B\xi + C\eta + E,$$

а F_1 есть результатъ подстановки координатъ ξ, η въ первую часть уравненія (1) (см. § 92).

Уравненіе поляры любой точки (x_0, y_0) будетъ

$$(Ax_0 + By_0 + D_1)\, X + (Bx_0 + Cy_0 + E_1)\, Y + D_1x_0 + E_1y_0 + F_1 = 0.$$

Уравненіе поляры новаго начала координатъ будетъ:

$$D_1X + E_1Y + F_1 = 0. \qquad (2)$$

Проведемъ прямую MC произвольно черезъ точку M; ея уравненіе будетъ

$$Y - \lambda X = 0. \qquad (3)$$

Координаты точки C (X_0, Y_0) (см. черт. 129) опредѣляются изъ двухъ уравненій (2) и (3).

$$X_0 = -\frac{F_1}{D_1 + \lambda E_1}, \quad Y_0 = -\frac{\lambda F_1}{D_1 + \lambda E_1}. \qquad (4)$$

Поляра MD точки C будетъ

$$(AX_0 + BY_0 + D_1) . X + (BX_0 + CY_0 + E_1)\, Y = 0.$$

Представляя это уравненіе въ видѣ $Y - \mu X = 0$, получимъ:

$$\mu = -\frac{AX_0 + BY_0 + D_1}{BX_0 + CY_0 + E_1}.$$

Подставляя въ послѣднее уравненіе вмѣсто X_0 и Y_0 полученныя для нихъ выраженія (4), мы получимъ послѣ приличныхъ преобразованій слѣдующее уравненіе инволюціи точки M:

$$(E^2_1 - CF_1)\lambda\mu + (E_1 D_1 - BF_1)(\lambda + \mu) + D^2_1 - AF_1 = 0. \quad (5)$$

На основаніи разсужденій § 195 мы получаемъ линію 2-го порядка, соотвѣтствующую инволюціи (5), въ видѣ

$$(E^2_1 - CF_1)y^2 + 2(E_1 D_1 - BF_1)xy + (D^2_1 - AF_1)x^2 = P, \quad (6)$$

гдѣ P совершенно произвольное число.

Очевидно, что инволюція будетъ круговая, если коническое сѣченіе (6) обращается въ кругъ, что какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто, когда

$$E^2_1 - CF_1 = D^2_1 - AF_1$$
$$E_1 D_1 - BF_1 = 0.$$

266. Примѣнимъ нахожденіе фокусовъ, какъ точекъ круговой инволюціи, къ уравненію коническаго сѣченія въ простѣйшемъ видѣ. Начнемъ съ параболы

$$y^2 - 2px = 0;$$

перенесемъ начало въ точку ξ, η:

$$y^2 - 2px + 2\eta . y + \eta^2 - 2p\xi = 0.$$

Здѣсь

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 1,\ D_1 = -p,\ E_1 = +\eta,\ F_1 = \eta^2 - 2p\xi.$$

Подставляя въ уравненіе (6), получимъ

$$p^2x^2 - 2p\eta\, xy + y^2(\eta^2 - \eta^2 + 2p\xi) = P,$$

или

$$px^2 - 2\eta\, xy + 2\xi\, y^2 = P_1.$$

Для того, чтобы послѣднее уравненіе давало кругъ, необходимо положить

$$\eta = 0,\ p = 2\xi,$$

что даетъ фокусъ

$$\xi = \frac{p}{2}, \quad \eta = 0.$$

Обратимся теперь къ эллипсу и гиперболѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0,$$

гдѣ $\varepsilon = \pm 1$. Перенося начало въ точку ξ, η, получимъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} + \frac{2\xi}{a^2}\,x + \frac{2\eta}{\varepsilon b^2}\,y + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0.$$

Здѣсь

$$A = \frac{1}{a^2},\ B = 0,\ C = \frac{1}{\varepsilon b^2},\ D_1 = \frac{\xi}{a^2},\ E_1 = \frac{\eta}{\varepsilon b^2},\ F_1 = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{\varepsilon b^2} - 1.$$

Подставляя въ уравненіе (6), получимъ

$$(\varepsilon b^2 - \eta^2)\,x^2 + 2\xi\eta\,xy + (a^2 - \xi^2)\,y^2 = P.$$

Чтобы послѣднее уравненіе опредѣляло кругъ, надо положить

$$\xi\eta = 0,\quad \varepsilon b^2 - \eta^2 = a^2 - \xi^2.$$

Итакъ мы видимъ, что фокусы опредѣляются, какъ точки пересѣченія осей кривой $\xi\eta = 0$ съ равносторонней гиперболой

$$\xi^2 - \eta^2 = a^2 - \varepsilon b^2.$$

Получаемъ два дѣйствительныхъ фокуса на оси x-овъ:

$$\eta = 0,\quad \xi = \pm\sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}$$

и два мнимыхъ на оси y—овъ:

$$\xi = 0,\ \eta = \pm\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}\,.$$

267. Разсматривая уравненіе (6) (см. § 265), легко показать, что оно опредѣляетъ эллипсъ, если $F_1\,\Delta < 0$ и гиперболу, если $F_1\Delta > 0$, гдѣ Δ — дискриминантъ: $AC^2 + CD^2 + BF^2 - 2BDE - ACF$.

Кромѣ того можно показать, что при $AC - B^2 > 0$ уравненіе (6) опредѣляетъ эллипсъ для точекъ ξ и η, лежащихъ съ той стороны кривой, гдѣ центръ, ибо F_1 одного знака съ $-\dfrac{\Delta}{AC - B^2}$. Для гиперболы же $(AC - B^2 < 0)$ инволюція гиперболическая съ той стороны кривой, гдѣ центръ, ибо F_1 и $-\dfrac{\Delta}{AC - B^2}$ одного знака (см. § 136).

Для параболы, опредѣляемой уравненіемъ $(ax + by)^2 + Dx + Ey + F = 0$, начало координатъ лежитъ съ той стороны, гдѣ инволюція гиперболическая, при $F > 0$ и съ другой при $F < 0$.

268. Если черезъ точку M, лежащую внѣ коническаго сѣченія, можно къ нему провести двѣ дѣйствительныя касательныя, то въ точкѣ M будетъ гиперболическая инволюція, причемъ обѣ касательныя будутъ ея двойными элементами (асимптотами). Условіемъ равносторонней гиперболической инволюціи будетъ

$$E^2_1 - CF_1 = -(D^2_1 - AF_1). \qquad (*)$$

Послѣднее уравненіе даетъ линію 2-го порядка, которая будетъ кругомъ для

эллипса и гиперболы и прямой для параболы. Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя къ уравненіямъ въ простѣйшемъ видѣ, получимъ для параболы (см. § 266) $p = -2\xi$, откуда $\xi = -\frac{p}{2}$, т. е. уравненіе директрисы.

Для случая же эллипса и гиперболы получаемъ

$$\varepsilon b^2 - \eta^2 = -(a^2 - \xi^2),$$

что даетъ кругъ:

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 + \varepsilon b^2;$$

кругъ мнимый, если въ гиперболѣ $b > a$.

Уравненіе (*) даетъ линію геометрическаго мѣста точекъ, изъ которыхъ можно провести къ коническому сѣченію двѣ взаимно перпендикулярныя касательныя (см. задачи на кон. сѣч.).

Задачи.

1) Показать, что уравненіе (*) опредѣляетъ кругъ при $AC - B^2$ не $= 0$ и прямую при $AC - B^2 = 0$.

2) Показать, что радіусъ круга (*) равенъ $\frac{\sqrt{\Delta(A+C)}}{AC - B^2}$.

3) Показать, что для равносторонней гиперболы кругъ (*) обращается въ одну точку, совпадающую съ центромъ гиперболы.

4) Показать, что координаты фокуса кривой второго порядка, данной общимъ уравненіемъ, удовлетворяютъ двумъ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$(Ax + By + D)(Bx + Cy + E) = B . f(x.y),$$

$$(Ax + By + D)^2 - (Bx + Cy + E)^2 = (A - C) f(x,y),$$

гдѣ $f(x, y)$ означаетъ первую часть уравненія данной кривой.

269. Обращаемся къ дальнѣйшимъ приложеніямъ сокращеннаго способа.

Мы видѣли, что уравненіе $S - k\alpha^2 = 0$ опредѣляетъ коническое сѣченіе, имѣющее двойное соприкосновеніе съ коническимъ сѣченіемъ $S = 0$ (см. § 244). Если линія $\alpha = 0$ будетъ касательною къ S, то двѣ точки P и Q (см. черт. 126) совпадутъ и коническое сѣченіе $S - k\alpha^2 = 0$ будетъ имѣть четыре общія точки съ $S = 0$. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что такъ называемое двойное соприкосновеніе обращается въ соприкосновеніе третьяго порядка. Послѣдній терминъ требуетъ разъясненія.

270. Если двѣ изъ точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій совпадаютъ, то говорятъ, что коническія сѣченія касаются одно другого и линія, соединяющая совпадающія точки, будетъ ихъ общая касательная. Пусть уравненія двухъ коническихъ сѣченій, отнесенныя къ касательной и нормали, будутъ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0,$$

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2E_1y = 0;$$

тогда уравненіе линіи MN, соединяющей двѣ другія точки пересѣченія M и N, будетъ

$$2(BA_1 - AB_1)x + (CA_1 - AC_1)y + 2(EA_1 - AE_1) = 0.$$

Этотъ случай касанія называется *соприкосновеніемъ перваго порядка.*

Соприкосновеніе будетъ гораздо тѣснѣе, если совпадутъ три общія точки двухъ коническихъ сѣченій. Въ этомъ случаѣ одна изъ точекъ M, N должна совпадать съ точкою касанія, слѣдовательно, прямая MN будетъ проходить черезъ начало координатъ и мы получимъ условіе $EA_1 - AE_1 = 0$. Это—*соприкосновеніе втораго порядка.* Кривыя, имѣющія соприкосновеніе выше перваго порядка, называются *соприкасающимися* (оскулирующими). Очевидно, что коническія сѣченія, имѣющія соприкосновеніе втораго порядка, пересѣкаются еще въ одной точкѣ.

Самое тѣсное соприкосновеніе коническихъ сѣченій будетъ, если ихъ четыре точки пересѣченія совпадутъ. Въ этомъ случаѣ прямая MN должна совпасть съ касательною, принятою за ось x-овъ ($y = 0$), и мы получимъ два условія

$$EA_1 - AE_1 = 0, \quad BA_1 - AB_1 = 0.$$

Это—*соприкосновеніе третьяго порядка.*

271. Для опредѣленія положенія линіи второго порядка необходимо пять условій (см. § 91). Въ случаѣ параболы одно условіе должно удовлетворяться уравненіемъ $AC - B^2 = 0$, а потому положеніе параболы на плоскости опредѣляется четырьмя точками. Слѣдовательно, можно искать параболу, имѣющую съ даннымъ коническимъ сѣченіемъ соприкосновеніе третьяго порядка. Уравненіе параболы, имѣющей сказанное соприкосновеніе съ коническимъ сѣченіемъ

$$x^2 + 2Bxy + Cy_1 + 2Ey = 0$$

будетъ

$$(x + By)^2 + 2Ey = 0 \text{ (см. § 270).}$$

272. Кругъ не можетъ имѣть соприкосновенія третьяго порядка съ коническимъ сѣченіемъ, ибо необходимо удовлетворить тремъ условіямъ, чтобы уравненіе выражало кругъ, другими словами, кругъ опредѣляется вполнѣ тремя точками.

Кругъ, имѣющій въ нѣкоторой точкѣ коническаго сѣченія соприкосновеніе второго порядка, называется *соприкасающимся* кругомъ, или *кругомъ кривизны*; радіусъ этого круга называется *радіусомъ кривизны*, а центръ его *центромъ кривизны.*

Для уравненія коническаго сѣченія:

$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0$$

уравненіе круга, имѣющаго соприкосновеніе перваго порядка, будетъ

$$x^2 + y^2 + 2\nu y = 0.$$

Чтобы это былъ кругъ кривизны, необходимо положить $1.\,2\nu - 1.\,2.\,E = 0$, откуда радіусъ кривизны выразится такъ $\nu = E$.

Задачи:

1) Найти выраженіе радіуса кривизны въ какой нибудь точкѣ эллипса.

Отв. Уравненіе эллипса, отнесенное къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ, изъ которыхъ одинъ b_1, проходитъ черезъ заданную точку, имѣетъ видъ $\frac{x^2}{a^2_1} + \frac{y^2}{b^2_1} = 1$; перенося начало координатъ въ заданную точку, получимъ $y = y' + b_1$, откуда $\frac{x'_1}{a^2_1} + \frac{y'^2}{b^2_1} + \frac{2y'}{b_1} = 0$. Остается повернуть ось y-овъ на уголъ $\frac{\pi}{2} - \theta$, гдѣ θ уголъ между діаметрами, $Y = y' \sin\theta$; $X = x' + y' \cos\theta$. Коэффиціентъ при X^2 будетъ $\frac{1}{a^2_1}$, а при Y, $\frac{2}{b_1 \sin\theta}$, откуда радіусъ кривизны опредѣлится такъ

$$\nu = \frac{a}{b_1 \sin\theta} = \frac{a_1^{\,3}}{a_1 b_1 \sin\theta} = \frac{a_1^{\,3}}{ab} \text{ (см. § 198)}$$

Эту величину легко построить.

2) Найти координаты точки пересѣченія круга кривизны съ коническимъ сѣченіемъ.

Отв. $X = \frac{4x'^3}{a^2} - 3x'$, $Y = \frac{4y'^3}{a^2} - 3y'$.

3) Существуютъ три точки на коническомъ сѣченіи, коихъ кругъ кривизны проходитъ черезъ данную точку на кривой; эти точки лежатъ на кругѣ, проходящемъ черезъ данную точку; онѣ составляютъ треугольникъ, пересѣченіе медіанъ котораго есть центръ кривой.

Отв. Въ этой задачѣ и предыдущей можно посовѣтовать ввести эксцентрическій уголъ φ (см. § 173). Легко показать, что условіемъ нахожденія четырехъ точекъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ на одномъ кругѣ будетъ $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0$, или $= 2m\pi$ (см. зад. на коническія сѣченія 112); откуда, полагая $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, получимъ $\varphi_1 = -\frac{\varphi_4}{3}$. Если φ_4 задано, то получимъ три значенія для φ_1, а именно $-\frac{\varphi_4}{3}$, $-\frac{\varphi_4}{3} + \frac{2}{3}\pi$, $-\frac{\varphi_4}{3} + \frac{4}{3}\pi$; эти три точки лежатъ на кругѣ, проходящемъ черезъ точку φ_4. Утвержденіе относительно центра получимъ, разсматривая уравненія предыдущей задачи и замѣчая, что эти уравненія, будучи кубическими относительно x', y', не заключаютъ членовъ съ x'^2, y'^2, откуда суммы ихъ корней равны нулю (сравн. зад. 10 стр. 45).

4) Во всѣхъ коническихъ сѣченіяхъ радіусъ кривизны равенъ кубу нормали, раздѣленному на квадратъ параметра.

273. Итакъ мы видимъ, что уравненіе $S - k\alpha^2 = 0$ въ томъ случаѣ, если $\alpha = 0$ есть касательная къ коническому сѣченію $S = 0$, опредѣляетъ коническое сѣченіе, имѣющее съ заданнымъ $S = 0$ касаніе третьяго порядка; ибо въ этомъ случаѣ четыре точки пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій совпадаютъ въ

одну, такъ напримѣръ мы видѣли (см. § 269), что два коническихъ сѣченія, имѣющихъ соприкосновеніе третьяго порядка въ какой нибудь точкѣ оси x-овъ, имѣютъ форму:

$$S = 0 \text{ и } S - ky^2 = 0.$$

Уравненіе $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$, какъ мы видѣли, опредѣляетъ коническое сѣченіе касающееся двухъ прямыхъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$ въ точкахъ пересѣченія этихъ прямыхъ съ прямою $\gamma = 0$. Заключеніе это обобщается и для того случая, когда одна изъ линій α, β, γ находится на безконечномъ разстояніи. Въ самомъ дѣлѣ, когда, напримѣръ, $\gamma = c$, тогда уравненіе $c = 0$, какъ говорятъ, даетъ безконечно далекую прямую и уравненіе $\alpha\beta - c^2 = 0$ опредѣляетъ гиперболу, имѣющую асимптоты $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому говорятъ иногда, что гипербола касается своихъ асимптотъ въ точкахъ, лежащихъ на безконечно далекой прямой $c = 0$. Подобнымъ образомъ, если $\beta = c$, то уравненіе $\alpha c - \gamma^2 = 0$ опредѣляетъ параболу, которая касается прямой $\alpha = 0$ и безконечно далекой прямой $c = 0$ въ точкахъ встрѣчи этихъ прямыхъ съ діаметромъ $\gamma = 0$. Поэтому говорятъ иногда, что всякая парабола имѣетъ касательную на безконечности.

274. Остановимся еще на случаѣ такъ называемыхъ подобныхъ и подобно-расположенныхъ коническихъ сѣченій. Мы будемъ называть двѣ фигуры подобными и подобно-расположенными, если радіусы векторы, проведенные къ первой изъ нихъ изъ точки O находятся въ постоянномъ отношеніи къ параллельнымъ радіусамъ векторамъ, проведеннымъ къ другой черезъ точку O_1. Если сказанное свойство имѣетъ мѣсто для двухъ какихъ нибудь точекъ O и O_1, то, какъ не трудно убѣдиться, можно найти безчисленное множество паръ точекъ, обладающихъ тѣми же свойствами. Положимъ, что имѣемъ пару точекъ O_1 (x, y_1) и O_2 (x_2, y_2); уравненіе прямой, проходящей черезъ точку O_1 можетъ быть написано такъ:

$$x - x_1 = \rho \cos \theta, \quad y - y_1 = \rho \sin \theta,$$

гдѣ ρ и θ двѣ новыя величины, изъ которыхъ одна, ρ, подлежитъ исключенію изъ написанной пары уравненій; что же касается другой, θ, то отъ измѣненія ея мѣняется положеніе разсматриваемой прямой. Пусть будутъ даны два коническихъ сѣченія:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Преобразуемъ въ первомъ систему координатъ, перенеся начало въ точку O_1, а второе уравненіе преобразуемъ, взявъ новую систему координатъ съ началомъ въ O_2. Тогда уравненія этихъ коническихъ сѣченій примутъ видъ:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0. \text{ (см. § 92)}$$

Уравненія радіуса вектора, проведеннаго черезъ точку O_1, будутъ:

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta,$$

а уравненія радіуса вектора, ему параллельнаго и проходящаго черезъ точку O_2, будутъ:

$$x = r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta.$$

Отсюда уравненія для полученія искомыхъ величинъ ρ и r будутъ:

$$(A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta)\rho^2 + 2(D_1\cos\theta + E_1\sin\theta)\rho + F_1 = 0 \quad (1)$$

$$(a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta)r^2 + 2(d_1\cos\theta + e_1\sin\theta)r + f_1 = 0 \quad (2)$$

Но такъ какъ при всякомъ θ должно быть $r = k\rho$, то два такихъ уравненія должны быть тождественны (1) и

$$(a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\sin\theta + c\sin^2\theta)k^2\rho^2 + 2(d_1\cos\theta + e_1\sin\theta)k\rho + f_1 = 0.$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что надо будетъ подобрать x_1, y_1, x_2, y_2 и k такъ, чтобы удовлетворилась пропорція:

$$\frac{A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta}{(a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta)k^2} = \frac{D_1\cos\theta + E_1\sin\theta}{(d_1\cos\theta + e_1\sin\theta)k} = \frac{F_1}{f_1} = \omega,$$

гдѣ подъ ω разумѣемъ общую величину отношенія. Такъ какъ написанная пропорція должна имѣть мѣсто при безчисленномъ множествѣ значеній угла θ, то необходимо, чтобы было

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k^2 w,$$

что даетъ условіе подобія и подобнаго расположенія двухъ коническихъ сѣченій; для опредѣленія координатъ точекъ O_1 и O_2 получимъ слѣдующія равенства

$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{E_1}{e_1} = k\omega, \quad \frac{F_1}{f_1} = \omega,$$

которыя, по исключеніи ω дадутъ

$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{E_1}{e_1} = \frac{F_1}{f_1}k. \quad (*)$$

Легко видѣть, что, напримѣръ, если точка O, совпадаетъ съ центромъ коническаго сѣченія (1), то соотвѣтственная точка O_2 будетъ центромъ коническаго сѣченія (2), ибо уравненія $D_1 = 0$ и $E_1 = 0$, повлекутъ за собой какъ слѣдствія уравненія $d_1 = 0$ и $e_1 = 0$. Число же k опредѣлится изъ равенства

$$\frac{A}{a} = k^2\frac{F_1}{f_1}. \quad (**)$$

Интересенъ случай, когда точки O_1 и O_2 совпадаютъ. Въ такомъ случаѣ полу-

чается точка, называемая *центромъ подобія.* Покажемъ, какъ опредѣлить координаты центра подобія.

275. На основаніи сказаннаго мы замѣчаемъ, что общими уравненіями двухъ подобныхъ и подобно-расположенныхъ коническихъ сѣченій будутъ уравненія $S = 0$ и $S - k\alpha = 0$, гдѣ α линейная функція, ибо коэффиціенты A, B и C въ двухъ такихъ уравненіяхъ будутъ одинаковы. Положимъ, что за начало координатъ выбранъ центръ коническаго сѣченія $S = 0$; тогда, очевидно, уравненія заданныхъ коническихъ сѣченій будутъ имѣть видъ

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + P = 0$$

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Обозначая черезъ x_1 и y_1 координаты искомаго центра подобія, получимъ для ихъ опредѣленія слѣдующія уравненія:

$$\frac{Ax_1 + By_1}{Ax_1 + By_1 + D} = \frac{Bx_1 + Cy_1}{Bx_1 + Cy_1 + E} = k\omega;\ \ \frac{f(x_1, y_1)}{F(x_1, y_1)} = \omega,$$

гдѣ $k^2\omega = 1$.

Очевидно, что искомый центръ подобія лежитъ на прямой линіи, имѣющей уравненіе

$$\frac{Ax_1 + By_1}{Ax_1 + By_1 + D} = \frac{Bx_1 + Cy_1}{Bx_1 + Cy_1 + E}.$$

Послѣднее уравненіе можно переписать въ видѣ

$$E(Ax_1 + By_1) = D(Bx_1 + Cy_1)$$

Прямая, опредѣляемая этимъ уравненіемъ, очевидно, проходитъ черезъ центры двухъ коническихъ сѣченій.

276. Покажемъ, какъ опредѣлить координаты центра подобія двухъ центральныхъ коническихъ сѣченій, зная координаты ихъ центровъ. Пусть уравненія двухъ гомотетическихъ *) коническихъ сѣченій будутъ

$$f_1(x, y) = A(x - \alpha_1)^2 + 2B(x - \alpha_1)(y - \beta_1) + C(y - \beta_1)^2 - P^2{}_1 = 0 \quad (1)$$

$$f_2(x, y) = A(x - \alpha_2)^2 + 2B(x - \alpha_2)(y - \beta_2) + C(y - \beta_2)^2 - P^2{}_2 = 0 \quad (2)$$

гдѣ, очевидно, α_1 и β_1 суть координаты центра коническаго сѣченія (1), а α_2 и β_2— координаты центра коническаго сѣченія (2). Обозначая черезъ ξ и η координаты искомаго центра подобія и перенося начало координатъ въ эту точку, мы предста-

---

*) *Гомотетическими фигурами* (figures homothétiques) называются фигуры подобныя и подобно расположенныя. (*Chasles*. Géometrie Supérieure).

вимъ уравненія (1) и (2) въ слѣдующемъ видѣ:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1 = 0 \qquad (1')$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2D_2 x + 2E_2 y + F_2 = 0 \qquad (2')$$

гдѣ

$$D_1 = A(\xi - \alpha_1) + B(\eta - \beta_1),\ E_1 = B(\xi - \alpha_1) + C(\eta - \beta_1),\ F_1 = f_1(\xi, \eta),$$

$$D_2 = A(\xi - \alpha_2) + B(\eta - \beta_2),\ E_2 = B(\xi - \alpha_2) + C(\eta - \beta_2),\ F_2 = f_2(\xi, \eta).$$

Для нахожденія центра подобія придется рѣшать систему уравненія:

$$\frac{A}{A} = k\frac{D_1}{D_2} = k\frac{E_1}{E_2} = k^2\frac{F_1}{F_2}.$$

Въ данномъ случаѣ эта система обращается въ слѣдующую:

$$1 = k\frac{A(\xi - \alpha_1) + B(\eta - \beta_1)}{A(\xi - \alpha_2) + B(\eta - \beta_2)} = k\frac{B(\xi - \alpha_1) + C(\eta - \beta_1)}{B(\xi - \alpha_2) + C(\eta - \beta_2)} = k^2\frac{f_1(\xi, \eta)}{f_2(\xi, \eta)}.$$

Равенство двухъ среднихъ отношеній даетъ:

$$(AC - B^2)\left[(\xi - \alpha_1)(\eta - \beta_2) - (\xi - \alpha_2)(\eta - \beta_1)\right] = 0$$

отсюда, такъ какъ $AC - B^2$ не $= 0$, то имѣетъ мѣсто равенство:

$$(\xi - \alpha_1)(\eta - \beta_2) - (\xi - \alpha_2)(\eta - \beta_1) = 0.$$

На основаніи послѣдняго равенства получаемъ;

$$k = \frac{\xi - \alpha_2}{\xi - \alpha_1} = \frac{\eta - \beta_2}{\eta - \beta_1}.$$

Подставляя полученную для k величину въ уравненіе:

$$1 = k^2\frac{f_1(\xi, \eta)}{f_2(\xi, \eta)},$$

получимъ окончательно для опредѣленія ξ уравненіе

$$P^2{}_1(\xi - \alpha_2)^2 - P^2{}_2(\xi - \alpha_1)^2 = 0.$$

Послѣднее уравненіе распадается на два слѣдующихъ:

$$P_1(\xi - \alpha_2) + P_2(\xi - \alpha_1) = 0 \text{ и } P_1(\xi - \alpha_2) - P_2(\xi - \alpha_1) = 0.$$

Слѣдовательно, существуютъ два центра подобія; одинъ изъ нихъ имѣетъ абсциссу:

$$\xi = \frac{P_1\alpha_2 + P_2\alpha_1}{P_1 + P_2},$$

а другой:

$$\xi = \frac{P_1\alpha_2 - P_2\alpha_1}{P_1 - P_2}.$$

Подобнымъ же образомъ замѣтимъ, что ординаты этихъ центровъ подобія будутъ:

$$\eta = \frac{P_1\beta_2 + P_2\beta_1}{P_1 + P_2} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{P_1\beta_2 - P_2\beta_1}{P_1 - P_2}.$$

Указаннныя выраженія координатъ центровъ подобія показываютъ, что эти центры лежатъ на линіи, соединяющей центры заданныхъ гомотетическихъ коническихъ сѣченій и, на основаніи соображеній § 35, дѣлятъ разстояніе между центрами въ отношеніи коэффиціентовъ P_1 и P_2.

Итакъ, можно написать общія выраженія для координатъ центра подобія въ такомъ видѣ

$$\xi = \frac{\alpha_2 + \lambda\alpha_1}{1 + \lambda}, \quad \eta = \frac{\beta_2 + \lambda\beta_1}{1 + \lambda},$$

причемъ одинъ центръ подобія соотвѣтствуетъ $\lambda = -\frac{P_2}{P_1}$ и лежитъ внѣ отрѣзка между центрами, а другой соотвѣтствуетъ значенію $\lambda = +\frac{P_2}{P_1}$ и лежитъ внутри этого отрѣзка. На основаніи же §§ 70 и 74 мы видимъ, что два центра подобія дѣлятъ гармонически разстояніе между центрами данныхъ коническихъ сѣченій.

Опредѣливъ центры подобія, легко получить выраженія для k. Простыя выкладки даютъ: $k = -\lambda$, причемъ, очевидно, k положительно для внѣшняго центра подобія и отрицательно для внутренняго.

Изъ самаго понятія о центрѣ подобія ясно, что онъ лежитъ въ пересѣченіи двухъ общихъ касательныхъ къ заданнымъ гомотетическимъ коническимъ сѣченіямъ.

277. На основаніи соображеній § 151 мы замѣчаемъ, что отношеніе $\frac{P_2}{P_1}$ равняется отношенію соотвѣтственныхъ полуосей заданныхъ гомотетическихъ кривыхъ второго порядка. Отсюда, какъ слѣдствіе, вытекаетъ, что въ гомотетическихъ коническихъ сѣченіяхъ обѣ полуоси пропорціональны, а направленія соотвѣтственныхъ осей параллельны, что слѣдуетъ на основаніи § 143.

278. Сказанныя замѣчанія отъ слова до слова могутъ быть приложены къ системѣ двухъ круговъ, ибо всѣ круги суть фигуры гомотетическія, что ясно изъ того, что ихъ уравненія могутъ быть приведены къ такому виду, что $A = C = 1$, $B = 0$. Въ случаѣ круговъ P_1 и P_2 пропорціональны радіусамъ этихъ круговъ и равны имъ, если $A = C = 1$.

279. Ясно, что гомотетическія коническія сѣченія имѣютъ параллельныя асимптоты, ибо совокупность прямыхъ линій, параллельныхъ асимптотамъ, выражается уравненіемъ:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Въ случаѣ дѣйствительности линій, опредѣляемыхъ этимъ уравненіемъ, получается гипербола, такъ что можно сказать, что двѣ гомотетическія гиперболы пересѣкаются въ двухъ безконечно удаленныхъ точкахъ. Эти точки суть точки встрѣчи

безконечно далекой прямой съ ассимптотами гиперболъ. Въ случаѣ эллипса ассимптоты мнимы и потому два гомотетическихъ эллипса пересѣкаются, какъ говорятъ, въ двухъ мнимыхъ безконечно далекихъ точкахъ.

280. Остается еще разсмотрѣть случай двухъ гомотетическихъ параболъ. Ясно, что гомотетическія параболы должны имѣть параллельныя оси, а потому уравненія ихъ могутъ быть написаны въ такомъ видѣ:

$$y^2 = 2px, \quad (y - \beta)^2 = 2p_1(x - \alpha),$$

причемъ, очевидно, взяты за оси координатъ ось и касательная въ вершинѣ первой параболы, α и β суть координаты вершины второй параболы, а p и p_1 суть параметры параболъ. Обозначая черезъ ξ и η координаты искомаго центра подобія, получимъ, перенося начало координатъ въ эту точку, преобразованныя уравненія нашихъ параболъ:

$$y^2 - 2px + 2y\eta + \eta^2 - 2p\xi = 0,$$

$$y^2 - 2p_1x + 2y(\eta - \beta) + (\eta - \beta)^2 - 2p_1(\xi - \alpha) = 0.$$

Система для опредѣленія ξ и η будетъ слѣдующая:

$$1 = k\frac{p}{p_1} = k\frac{\eta}{\eta - \beta} = k^2\frac{\eta^2 - 2p\xi}{(\eta - \beta)^2 - 2p_1(\xi - \alpha)}.$$

Рѣшая эту систему относительно k, ξ и η, получимъ:

$$k = \frac{p_1}{p}, \quad \xi = \frac{p\alpha}{p - p_1}, \quad \eta = \frac{p\beta}{p - p_1}.$$

Итакъ мы видимъ, что двѣ гомотетическія параболы имѣютъ одинъ только центръ подобія. Можно сказать, что двѣ гомотетическія параболы соприкасаются на безконечности. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли уже, что парабола касается безконечно далекой прямой въ точкѣ, опредѣляемой направленіемъ оси. А такъ какъ оси двухъ гомотетическихъ параболъ параллельны, то отсюда и слѣдуетъ возможность вышеприведеннаго выраженія.

281. Разсмотримъ теперь случай трехъ центральныхъ гомотетическихъ коническихъ сѣченій. Такъ какъ для каждой пары заданныхъ линій существуютъ два центра подобія, то ясно, что всего центровъ подобія для системы трехъ гомотетическихъ коническихъ сѣченій будетъ шесть *). Всѣ шесть центровъ подобія лежатъ на сторонахъ треугольника, образованнаго центрами заданныхъ коническихъ сѣченій, причемъ три внѣшнихъ центра лежатъ внѣ треугольника. Покажемъ теперь, что сказанные шесть центровъ подобія суть вершины нѣкотораго полнаго четырехсторонника, откуда будетъ слѣдовать, что изъ шести центровъ подобія три лежатъ на одной прямой, причемъ будутъ существовать четыре прямыхъ (стороны четырехсторонника), на каждой изъ которыхъ лежатъ по три центра подобія. Эти четыре

*) Это замѣчаніе принадлежитъ Монжу.

прямыя называются *осями подобія*. Одна изъ нихъ проходитъ черезъ три внѣшнихъ центра подобія, три другихъ соединяютъ каждый изъ внѣшнихъ центровъ съ двумя внутренними.

Справедливость сказаннаго относительно центровъ подобія слѣдуетъ изъ теоремы Менелая (см. § 37). Въ самомъ дѣлѣ, центры подобія дѣлятъ стороны нашего треугольника въ отношеніяхъ: $\pm\frac{P_1}{P_2}$, $\pm\frac{P_2}{P_3}$, $\pm\frac{P_3}{P_1}$. Перемножая эти три отношенія, получимъ ± 1. На основаніи же теоремы Менелая три точки, дѣлящія стороны даннаго треугольника въ данныхъ трехъ отношеніяхъ, лежатъ на одной прямой въ томъ случаѣ, когда произведеніе отношеній $= -1$. А потому изъ центровъ подобія будутъ лежать на одной прямой только или три внѣшніе, дающіе три отрицательныхъ отношенія, или же одинъ внѣшній и два внутреннихъ.

282. Центры и оси подобія играютъ большую роль въ задачахъ, касающихся системъ гомотетическихъ коническихъ сѣченій, въ частномъ случаѣ, системъ круговъ. Какъ одинъ изъ любопытныхъ примѣровъ приложенія центровъ и осей подобія, укажемъ на задачу построенія круга, касающагося трехъ данныхъ круговъ. Для желающихъ познакомиться съ рѣшеніемъ этой задачи можно рекомендовать: *Poncelet*. Traité des propriétés projectives des figures. § 270. *Hesse*. Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie der Geraden Linie, des Punktes und des Kreises. *Salmon-Fiedler*. Analytische Geometrie der Kegelschnitte.

283. Разсмотримъ случай, когда гомотетическія коническія сѣченія концентричны. Тогда ихъ общій центръ есть ихъ центръ подобія. Если примемъ за начало координатъ общій центръ, то ихъ уравненія будутъ имѣть видъ:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + P_1 = 0,$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + P_2 = 0.$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что общій видъ уравненій двухъ концентрическихъ гомотетическихъ коническихъ сѣченій будетъ: $S = 0$, $S + l^2 = 0$, гдѣ l нѣкоторое постоянное число. Послѣднія уравненія показываютъ, что такія кривыя соприкасаются въ двухъ безконечно удаленныхъ точкахъ, причемъ хордою соприкосновенія является безконечно удаленная прямая $l = 0$.

284. Такъ какъ всѣ круги гомотетичны, то на основаніи сказаннаго въ § 279, мы можемъ сказать, что они проходятъ черезъ двѣ мнимыя безконечно далекія, такъ называемыя *циклическія* точки. Эти циклическія точки лежатъ на безконечно далекой прямой въ ея пересѣченіи съ асимптотами круга, или, что одно и то же, въ пересѣченіи съ двумя прямыми, проведенными черезъ начало координатъ параллельно асимптотамъ, уравненіе которыхъ есть $x^2 + y^2 = 0$. Въ данномъ случаѣ асимптоты мнимы и имѣютъ уравненіями

$$x - \alpha + i(y - \beta) = 0,$$

$$x - \alpha - i(y - \beta) = 0,$$

гдѣ α и β координаты центра. Концентрическіе круги можно разсматривать какъ соприкасающіеся въ двухъ мнимыхъ безконечно удаленныхъ точкахъ.

285. Возвратимся теперь къ способу трилинейныхъ координатъ. Мы видѣли, какъ общее уравненіе коническихъ сѣченій въ этихъ координатахъ приводилось, такъ сказать, къ простѣйшему виду

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0$$

принятіемъ автополярнаго треугольника за координатный. Мы показали, что такихъ треугольниковъ безчисленное множество и, слѣдовательно, такихъ приведеній можетъ быть сдѣлано безчисленное множество. Остается изучить послѣднее уравненіе болѣе обстоятельно. Прежде всего покажемъ, какимъ условіямъ должны удовлетворять коэффиціенты L, M и N, чтобы коническое сѣченіе было эллипсомъ, гиперболою или параболою. Чтобы опредѣлить видъ кривой, опредѣляемой уравненіемъ

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0, \tag{1}$$

разсмотримъ ея безконечно далекія точки. Мы знаемъ, что безконечно далекая прямая опредѣляется уравненіемъ:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \text{ (см. § 255)}. \tag{2}$$

Исключая изъ уравненій (1) и (2) функцію γ, получимъ уравненіе

$$(Lc^2 + Na^2)\,\alpha^2 + 2Nab\alpha\beta + (Mc^2 + Nb^2)\,\beta^2 = 0. \tag{3}$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ двѣ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $c\gamma = \Delta$ (см. § 254). Эти прямыя будутъ дѣйствительными, совпадающими или мнимыми, смотря по тому будетъ ли $N^2a^2b^2$ больше, равно или меньше

$$(Lc^2 + Na^2)\,(Mc^2 + Nb^2).$$

Итакъ, въ случаѣ эллипса имѣемъ:

$$LMN\left(\frac{a^2}{L} + \frac{b^2}{M} + \frac{c^2}{N}\right) > 0,$$

въ случаѣ гиперболы:

$$LMN\left(\frac{a^2}{L} + \frac{b^2}{M} + \frac{c^2}{N}\right) < 0,$$

въ случаѣ же параболы:

$$\frac{a^2}{L} + \frac{b^2}{M} + \frac{c^2}{N} = 0,$$

286. Найдемъ теперь координаты центра. Для этого воспользуемся соображеніемъ, что поляра центра есть безконечно далекая прямая. Въ самомъ дѣлѣ, въ § 178 мы видѣли, что уравненіе поляры точки α_1, β_1 имѣетъ видъ:

$$L\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + P = 0.$$

Если разсматриваемая точка есть центръ, то $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$ и поляра центра имѣетъ уравненіе $P = 0$, что даетъ безконечно далекую прямую.

Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію заданнаго уравненія

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0.$$

Мы видѣли, что полярою точки α_0, β_0, γ_0 является прямая

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = 0.$$

Для того, чтобы разсматриваемая точка была центромъ, необходимо, чтобы послѣднее уравненіе совпадало съ уравненіемъ безконечно далекой прямой, что даетъ пропорцію

$$\frac{L\alpha_0}{a} = \frac{M\beta_0}{b} = \frac{N\gamma_0}{c}.$$

Такъ какъ всѣ уравненія прямыхъ линій и коническихъ сѣченій въ трилинейныхъ координатахъ однородны, то понятно, что за координаты центра можно принять три числа, которымъ эти координаты пропорціональны, т. е. $\frac{a}{L}$, $\frac{b}{M}$, $\frac{c}{N}$.

Въ случаѣ параболы центръ лежитъ на безконечно далекой прямой, ибо его координаты удовлетворяютъ уравненію этой прямой.

287. Такъ же просто выводится уравненіе сопряженныхъ діаметровъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ уравненіе какого нибудь діаметра коническаго сѣченія:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0.$$

Для того, чтобы это уравненіе опредѣляло діаметръ, необходимо, чтобы координаты центра удовлетворяли ему, что даетъ условіе:

$$\frac{la}{L} + \frac{mb}{M} + \frac{nc}{N} = 0.$$

Вспомнимъ теперь нашъ основной способъ разсмотрѣнія центральныхъ коническихъ сѣченій при помощи уравненія

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0.$$

Въ § 247 мы уже говорили, что этотъ способъ разсмотрѣнія приводится къ выбору за координатный автополярнаго треугольника, образованнаго двумя сопряженными діаметрами и безконечно далекою прямою. А потому каждый изъ сопряженныхъ діаметровъ можно разсматривать какъ поляру безконечно далекой точки другого, что, впрочемъ, очевидно также изъ геометрическихъ соображеній.

Безконечно далекая точка діаметра

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

опредѣляется двумя уравненіями: уравненіемъ этого діаметра и уравненіемъ безко-

нечно далекой прямой. Отсюда мы видимъ, что координаты $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ этой безконечно далекой точки опредѣлятся изъ пропорцій:

$$\frac{\alpha_0}{bn - cm} = \frac{\beta_0}{cl - an} = \frac{\gamma_0}{am - bl}.$$

Итакъ, за координаты $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ можно принять числа $(bn - cm)$, $(cl - an)$, $(ma - bl)$.

Уравненіе искомаго діаметра, сопряженнаго съ заданнымъ, напишется какъ уравненіе поляры точки $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Это уравненіе будетъ имѣть видъ:

$$L\alpha\,(bn - cm) + M\beta\,(cl - an) + N\gamma\,(am - bl) = 0. \qquad (*)$$

Всѣ діаметры параболы параллельны между собою, потому что пересѣкаются въ безконечно далекой точкѣ. А потому она не имѣетъ сопряженныхъ діаметровъ. Въ этомъ случаѣ уравненіе (*) даетъ безконечно далекую прямую. Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ параболы будетъ

$$l\,\frac{a}{L} + m\,\frac{b}{M} + n\,\frac{c}{N} = 0,$$

$$a\,\frac{a}{L} + b\,\frac{b}{M} + c\,\frac{c}{N} = 0 \text{ (см. § 285).}$$

Отсюда

$$\frac{\frac{a}{L}}{bn - cm} = \frac{\frac{b}{M}}{cl - an} = \frac{\frac{c}{N}}{am - bl}.$$

Подставляя въ уравненіе (*) вмѣсто знаменателей числители этихъ отношеній, получимъ уравненіе безконечно далекой прямой.

Итакъ мы видимъ, что двѣ прямыя

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0 \quad \text{и} \quad l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0$$

будутъ представлять два сопряженныхъ діаметра въ томъ случаѣ, когда

$$l\,\frac{a}{L} + m\,\frac{b}{M} + n\,\frac{c}{N} = 0, \quad l_1\,\frac{a}{L} + m_1\,\frac{b}{M} + n_1\,\frac{c}{N} = 0;$$

послѣднія уравненія представляютъ условія, при которыхъ обѣ прямыя проходятъ черезъ центръ. Что касается коэффиціентовъ l_1, m_1, n_1, то они выражаются формулами

$$l_1 = L\,(bn - cm), \; m_1 = M\,(cl - an), \; n_1 = N\,(am - bl).$$

Отсюда очевидно, что между величинами l, m, n и l_1, m_1, n_1 существуетъ соотношеніе

$$\frac{ll_1}{L} + \frac{mm_1}{M} + \frac{nn_1}{N} = 0.$$

Полнѣйшая симметрія послѣдняго уравненія выражаетъ основное свойство сопряженныхъ діаметровъ, состоящее въ ихъ взаимности и наши разсужденія въ § 142 представляютъ частный случай.

288. Для полноты изложенія остается еще вывести тѣ условія, при которыхъ коническое сѣченіе, заданное въ трилинейныхъ координатахъ, обладаетъ какими нибудь частными свойствами: обращается въ кругъ, равностороннюю гиперболу и т. д.

Начнемъ съ разсмотрѣнія круга.

Предположимъ, что $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, выражены въ нормальномъ видѣ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0, \quad x\cos\beta + y\sin\beta - p_2 = 0,$$
$$x\cos\gamma + y\sin\gamma - p_3 = 0.$$

Для того, чтобы не вводить лишнихъ обозначеній, будемъ одною буквою α обозначать какъ всю первую часть уравненія, такъ и уголъ, образованный перпендикуляромъ къ прямой съ осью x-овъ:

$$\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0.$$

Уравненіе

$$L\alpha^2 + M\beta^3 + N\gamma^2 = 0$$

можетъ быть написано въ такомъ видѣ

$$(L\cos^2\alpha + M\cos^2\beta + N\cos^2\gamma)x^2 + 2(L\cos\alpha\sin\alpha + M\cos\beta\sin\beta + N\cos\gamma\sin\gamma)xy +$$
$$+ (L\sin^2\alpha + M\sin^2\beta + N\sin^2\gamma)y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Для того чтобы кривая, опредѣляемая послѣднимъ уравненіемъ, была кругъ необходимо удовлетворить двумъ условіямъ:

$$L\cos^2\alpha + M\cos^2\beta + N\cos^2\gamma = L\sin^2\alpha + M\sin^2\beta + N\sin^2\gamma$$
$$L\cos\alpha\sin\alpha + M\cos\beta\sin\beta + N\cos\gamma\sin\gamma = 0$$

эти условія могутъ быть написаны еще такъ:

$$L\cos 2\alpha + M\cos 2\beta + N\cos 2\gamma = 0$$
$$L\sin 2\alpha + M\sin 2\beta + N\sin 2\gamma = 0,$$

откуда

$$\frac{L}{\sin 2(\beta-\gamma)} = \frac{M}{\sin 2(\gamma-\alpha)} = \frac{N}{\sin 2(\alpha-\beta)}.$$

Обозначая черезъ A, B, C углы координатнаго треугольника, лежащіе противъ сторонъ α, β, γ, получимъ:

$$\frac{L}{\sin 2A} = \frac{M}{\sin 2B} = \frac{N}{\sin 2C},$$

откуда уравненіе круга напишется въ такомъ видѣ:

$$\sin 2A\,\alpha^2 + \sin 2B\,\beta^2 + \sin 2C\gamma^2 = 0.$$

Кругъ дѣйствительный, если по крайней мѣрѣ одинъ изъ синусовъ отрицателенъ, что приводится къ требованію, чтобы автополярный треугольникъ былъ тупоугольный: отсюда слѣдуетъ напримѣръ, что кругъ не имѣетъ равносторонняго автополярнаго треугольника.

Уравненіе

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0$$

опредѣляетъ равностороннюю гиперболу, если

$$L\cos^2\alpha + M\cos^2\beta + N\cos^2\gamma = -(L\sin^2\alpha + M\sin^2\beta + N\sin^2\gamma),$$

что даетъ условіе

$$L + M + N = 0.$$

289. Найдемъ условія того, чтобы коническое сѣченіе

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0$$

было описано около треугольника $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Вершина треугольника $a\alpha = \Delta$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ должна лежать на коническомъ сѣченіи (1), что даетъ $A\alpha^2 = 0$; но α не $= 0$, слѣдовательно $A = 0$. Подобнымъ же образомъ покажемъ, что $C = 0$ и $F = 0$ и, слѣдовательно, уравненіе искомаго коническаго сѣченія можетъ быть написано такъ

$$B\alpha\beta + D\alpha\gamma + E\beta\gamma = 0.$$

290. Вписать въ треугольникъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ коническое сѣченіе.

Сторона $\gamma = 0$ должна касаться коническаго сѣченія (1) (см. § 290), слѣдовательно, трехчленъ

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$$

долженъ быть полнымъ квадратомъ, то есть должно быть

$$B = \pm\sqrt{AC}.$$

Подобнымъ образомъ должно быть

$$D = \pm\sqrt{AF}, \quad E = \pm\sqrt{CF}.$$

Обозначая $A = l^2$, $C = m^2$, $F = n^2$, получимъ уравненіе

$$l^2\alpha^2 \pm 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 \pm 2ln\,\alpha\gamma \pm 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0.$$

Комбинируя на всевозможные лады знаки въ послѣднемъ уравненіи, мы замѣчаемъ, что изъ 8 случаевъ остаются только четыре слѣдующихъ:

$$l^2\alpha^2 - 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 - 2ln\,\alpha\gamma - 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0,$$

$$l^2\alpha^2 - 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 + 2ln\,\alpha\gamma + 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0,$$

$$l^2\alpha^2 + 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 - 2ln\,\alpha\gamma + 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0,$$

$$l^2\alpha^2 + 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 + 2ln\,\alpha\gamma - 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0,$$

остальные четыре даютъ прямую линію.

Если будемъ придавать коэффиціентамъ l, m, n различные знаки, то можно будетъ написать одно общее уравненіе

$$l^2\alpha^2 - 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 - 2ln\,\alpha\gamma - 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0.$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть написано въ такомъ видѣ

$$\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0.$$

291. *Задача.* Данъ эллипсъ; доказать, что двѣ произвольныя точки и четыре точки прикосновенія касательныхъ къ данному эллипсу, проходящихъ черезъ эти точки, лежатъ на одной кривой второго порядка.

Возьмемъ коническое сѣченіе

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0 \qquad (1)$$

и двѣ его хорды

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,\ l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0.$$

Уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ точки встрѣчи хордъ съ линіею (1), будетъ имѣть уравненіе

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 - k\,(l\alpha + m\beta + n\gamma)\,(l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma) = 0.$$

Возьмемъ точку α_0, β_0, γ_0 внѣ коническаго сѣченія (1); тогда уравненіе поляры будетъ

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = 0;$$

отсюда полюсъ для прямой

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

будетъ опредѣляться изъ условія

$$\frac{L\alpha_0}{l} = \frac{M\beta_0}{m} = \frac{N\gamma_0}{n} = \rho.$$

Выражая условіе того, чтобы коническое сѣченіе проходило черезъ точку $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, получимъ

$$k = \frac{1}{\frac{ll_1}{L} + \frac{mm_1}{M} + \frac{nn_1}{N}};$$

такое же условіе будетъ и для прохожденія коническаго сѣченія черезъ полюсъ хорды

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0.$$

Изъ симметричности послѣдняго выраженія вытекаетъ справедливость высказаннаго въ задачѣ предложенія.

292. *Задача.* Кругъ проходящій черезъ центръ равносторонней гиперболы и черезъ двѣ вершины автополярнаго треугольника, проходитъ также черезъ третью.

Уравненіе гиперболы имѣетъ видъ

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0,$$

причемъ

$$L + M + N = 0.$$

Легко показать, что уравненіе круга, описаннаго около автополярнаго треугольника, имѣетъ видъ

$$a\beta\gamma + b\beta\gamma + c\alpha\beta = 0.$$

Послѣднее же уравненіе показываетъ, что на этомъ кругѣ лежитъ центръ гиперболы:

$$\frac{a}{L}, \frac{b}{M}, \frac{c}{N}.$$

Что уравненіе

$$a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$$

представляетъ кругъ, описанный около автополярнаго треугольника, ясно изъ слѣдующихъ соображеній.

Уравненіе $l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0$ опредѣляетъ коническое сѣченіе, описанное около автополярнаго треугольника, ибо оно удовлетворяется каждымъ изъ положеній:

$$\alpha = 0, \beta = 0; \quad \beta = 0, \gamma = 0; \quad \gamma = 0, \alpha = 0.$$

Условія, чтобы это мѣсто было кругъ, выражаются такъ:

$$l \cos(\beta + \gamma) + m \cos(\gamma + \alpha) + n \cos(\alpha + \beta) = 0,$$

$$l \sin(\beta + \gamma) + m \sin(\gamma + \alpha) + n \sin(\alpha + \beta) = 0.$$

Опредѣляя m и n изъ этихъ уравненій, получимъ

$$\frac{m}{l} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\beta - \gamma)}; \qquad \frac{n}{l} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \gamma)}.$$

Теперь, если уголъ между сторонами α, β будетъ C, то:

$$\sin C = \sin(\alpha - \beta), \text{ и т. д.}$$

(ибо $\alpha - \beta$ есть уголъ между перпендикулярами на эти стороны); слѣдовательно уравненіе круга, описаннаго около треугольника, будетъ:

$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = 0.$$

Можно предложить, въ видѣ упражненія, доказать, что послѣднее уравненіе выражаетъ слѣдующее геометрическое свойство. Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ на стороны треугольника изъ точки, лежащей на окружности описаннаго около этого треугольника круга, лежатъ на одной прямой.

293. *Задача.* Найти уравненіе коническаго сѣченія, описаннаго около треугольника $\alpha\beta\gamma$, имѣющаго центръ въ данной точкѣ α_0, β_0, γ_0.

Уравненіе коническаго сѣченія будетъ:

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0.$$

Уравненіе поляры заданной точки будетъ

$$\alpha(m\gamma_0 + n\beta_0) + \beta(n\alpha_0 + l\gamma_0) + \gamma(l\beta_0 + m\alpha_0) = 0.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ безконечно далекой прямой, получимъ

$$\frac{m\gamma_0 + n\beta_0}{a} = \frac{n\alpha_0 + l\gamma_0}{b} = \frac{l\beta_0 + m\alpha_0}{c}.$$

Отсюда найдемъ числа, которымъ пропорціональны l, m, n.

Если будетъ дана еще одна точка, черезъ которую должно проходить описанное коническое сѣченіе, то можно искать кривую геометрическаго мѣста центровъ.

294. *Задача.* Провести коническое сѣченіе черезъ пять данныхъ точекъ.

Примемъ три изъ числа заданныхъ точекъ за вершины координатнаго треугольника; двѣ же другія пусть имѣютъ координаты α_0, β_0, γ_0; α_1, β_1, γ_1. Придется удовлетворить двумъ условіямъ:

$$l\beta_0\gamma_0 + m\gamma_0\alpha_0 + n\alpha_0\beta_0 = 0.$$

$$l\beta_1\gamma_1 + m\gamma_1\alpha_1 + n\alpha_1\beta_1 = 0.$$

Откуда искомое коническое сѣченіе опредѣлится уравненіемъ:

$$\begin{vmatrix} \alpha\beta & \beta\gamma & \gamma\alpha \\ \alpha_0\beta_0 & \beta_0\gamma_0 & \gamma_0\alpha_0 \\ \alpha_1\beta_1 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1\alpha_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (См. Прибавленіе).}$$

295. *Задача.* Найти уравненіе коническаго сѣченія, вписаннаго въ данный треугольникъ и имѣющаго центромъ данную точку.

Уравненіе поляры заданной точки имѣетъ видъ (см. § 290):

$$\alpha l(m\beta_0 + n\gamma_0 - l\alpha_0) + \beta m(l\alpha_0 + n\gamma_0 - m\beta_0) + \gamma m(l\alpha_0 + m\beta_0 - n\gamma_0) = 0:$$

Сравнивая коэффиціенты этого уравненія съ коэффиціентами безконечно далекой прямой, получимъ пропорцію, изъ которой опредѣлятся коэффиціенты l, m, n.

Въ видѣ упражненія можно предложить найти мѣсто центровъ коническаго сѣченія, касающагося трехъ данныхъ прямыхъ и проходящаго черезъ данную точку.

Показать, что получится коническое сѣченіе, касающееся прямыхъ, соединяющихъ средины сторонъ треугольника, составленнаго данными касательными.

296. *Задача.* Найти уравненіе коническаго сѣченія, касающагося пяти данныхъ прямыхъ.

Примемъ треугольникъ, образованный тремя изъ числа данныхъ прямыхъ за координатный (см. § 290). Остается подобрать l, m, n такъ, чтобы коническое сѣченіе касалось двухъ другихъ прямыхъ:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \quad A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0.$$

Придется удовлетворить двумъ уравненіямъ:

$$\frac{l}{A} + \frac{m}{B} + \frac{n}{C} = 0, \qquad \frac{l}{A_1} + \frac{m}{B_1} + \frac{n}{C_1} = 0.$$

297. *Задача.* Найти геометрическое мѣсто фокуса коническаго сѣченія, вписаннаго въ треугольникъ, другой фокусъ котораго описываетъ заданную линію.

Примемъ данный треугольникъ за координатный и пусть координаты фокуса, описывающаго данную линію, будутъ α_0, β_0, γ_0. Прямыя, соединяющія его съ вершинами треугольника, будутъ:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\beta}{\beta_0}, \quad \frac{\beta}{\beta_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0}, \quad \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\alpha}{\alpha_0},$$

а такъ какъ прямыя, соединяющія эти вершины съ другимъ фокусомъ, составляютъ равные углы со сторонами треугольника (см. зад. 32), то ихъ уравненія будутъ

$$\alpha\alpha_0 = \beta\beta_0; \quad \beta\beta_0 = \gamma\gamma_0; \quad \gamma\gamma_0 = \alpha\alpha_0;$$

послѣднее вытекаетъ изъ того соображенія, что прямая $\alpha - k\beta = 0$, очевидно, составляетъ такой уголъ съ α, какой прямая $k\alpha - \beta = 0$ составляетъ съ β. Ясно, что за координаты другого фокуса можно принять

$$\frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{\beta_0}, \frac{1}{\gamma_0}.$$

Изъ этой общей задачи слѣдуютъ, какъ частные случаи, разнообразныя задачи, которыя мы приводили раньше. Напримѣръ, въ двухъ словахъ рѣшается задача 106 (стр. 224). Такъ какъ одинъ изъ фокусовъ параболы лежитъ на безконечно далекой прямой, то, слѣдовательно, удовлетворяется уравненіе

$$a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0 = 0;$$

другой же фокусъ будетъ на линіи, опредѣляемой уравненіемъ

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 0.$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть преобразовано такъ:

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0$$

и опредѣляетъ кругъ, описанный около треугольника $\alpha\beta\gamma$.

Подобнымъ же образомъ легко рѣшить зад. 200.

298. Въ заключеніе нашего изученія коническихъ сѣченій при помощи трилинейныхъ координатъ замѣтимъ, какъ частный случай, уравненіе

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - (lx + my + n)^2 = 0,$$

гдѣ a и b суть координаты фокуса, а $lx + my + n = 0$ директриса.

Обозначая: $x - a = \alpha$, $y - b = \beta$, $lx + my + n = \gamma$, напишемъ наше уравненіе въ видѣ:

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0.$$

Это уравненіе представляетъ частный случай уравненія коническаго сѣченія, отнесеннаго къ автополярному треугольнику.

Въ данномъ случаѣ этотъ треугольникъ прямоугольный; вершина прямого угла фокусъ, катеты параллельны осямъ координатъ, а гипотенуза—директриса.

Отсюда непосредственно вытекаетъ, что директриса есть поляра фокуса.

Уравненіе коническаго сѣченія въ послѣднемъ видѣ примѣняется съ большимъ удобствомъ къ рѣшенію задачъ.

Приложенія теоріи инваріантовъ къ коническимъ сѣченіямъ.

299. Въ § 148 мы видѣли, что для всякаго коническаго сѣченія

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

уравненіе котораго отнесено къ нѣкоторой прямоугольной системѣ координатъ, выраженія $A + C$, $AC - B^2$ были инваріантами преобразованія координатъ, если только это преобразованіе сводится къ повороту прямоугольной системы координатъ на нѣкоторый уголъ вокругъ начала координатъ. Это замѣчаніе можетъ быть слѣдующимъ образомъ обобщено.

Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія съ центромъ, отнесенное къ этому центру:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + P = 0, \quad (1)$$

причемъ оси координатъ пусть будутъ какія угодно, образующія уголъ ω. Если мы перейдемъ, оставивъ то же начало, къ новой системѣ координатъ, оси которой нѣкоторыя другія и образуютъ уголъ Ω, то уравненіе коническаго сѣченія (1) при новыхъ координатахъ будетъ имѣть видъ такой же, причемъ членъ P, независящій

отъ координатъ, не мѣняетъ своей величины, трехчленъ же

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

обращается въ подобный

$$A_1x^2_1 + 2B_1x_1y_1 + C_1y^2_1,$$

гдѣ A_1, B_1, C_1 суть нѣкоторые коэффиціенты, величина которыхъ зависитъ отъ выбора новой системы координатъ, а x_1 и y_1 суть новыя координаты точки M, старыя координаты которой x и y. Такъ какъ начало координатъ не мѣняется, то растояніе точки M до начала не мѣняется отъ преобразованія координатъ. Слѣдовательно, имѣетъ мѣсто равенство

$$x^2 + 2\cos\omega\, xy + y^2 = x^2_1 + 2\cos\Omega\, x_1y_1 + y^2_1 \qquad (2)$$

Кромѣ того,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A_1x^2_1 + 2B_1x_1y_1 + C_1y^2_1 \qquad (3)$$

Умножая равенство (2) на нѣкоторый, пока произвольный, множитель λ, и складывая съ уравненіемъ (3), получимъ

$$(A + \lambda)x^2 + 2(B + \lambda\cos\omega)xy + (C + \lambda)y^2 =$$
$$= (A_1 + \lambda)x^2_1 + 2(B_1 + \lambda\cos\Omega)x_1y_1 + (C_1 + \lambda)y^2_1. \qquad (4)$$

Подберемъ теперь λ такъ, чтобы первая часть уравненія (4) обращалась въ полный квадратъ линейной функціи. Для этой цѣли мы должны удовлетворить уравненію

$$(A + \lambda)(C + \lambda) - (B + \lambda\cos\omega)^2 = 0,$$

которое, по раздѣленію на $\sin^2\omega$, обращается въ слѣдующее:

$$\lambda^2 + \frac{A + C - 2B\cos\omega}{\sin^2\omega}\lambda + \frac{AC - B^2}{\sin^2\omega} = 0. \qquad (5)$$

Принимая же въ соображеніе, что старыя координаты линейно выражаются черезъ новыя, мы замѣчаемъ, что для выбраннаго значенія λ также и вторая часть дѣлается полнымъ квадратомъ линейной функціи, т. е., другими словами, удовлетворяется уравненіе

$$(A_1 + \lambda)(C_1 + \lambda) - (B_1 + \lambda\cos\Omega)^2 = 0.$$

или равносильное ему

$$\lambda^2 + \frac{A_1 + C_1 - 2B_1\cos\Omega}{\sin^2\Omega}\lambda + \frac{A_1C_1 - B^2_1}{\sin^2\Omega} = 0. \qquad (6)$$

Такъ какъ уравненія (5) и (6) должны удовлетворяться при однихъ и тѣхъ же значеніяхъ λ, то, слѣдовательно, должны существовать равенства:

$$\frac{A+C-2B\cos\omega}{\sin^2\omega}=\frac{A_1+C_1-2B_1\cos\Omega}{\sin^2\Omega},$$

$$\frac{AC-B^2}{\sin^2\omega}=\frac{A_1C_1-B^2_1}{\sin^2\Omega}.$$

Послѣднія равенства показываютъ, что выраженія

$$\frac{A+C-2B\cos\omega}{\sin^2\omega},\quad \frac{AC-B^2}{\sin^2\omega}$$

суть инваріанты преобразованія координатъ.

300. Указанное свойство инваріантовъ даетъ непосредственно извѣстныя теоремы Аполлонія, выведенныя нами въ §§ 197 и 198. Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что уравненіе эллипса, отнесенное къ сопряженнымъ діаметрамъ, имѣетъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2_1}+\frac{y^2}{b^2_1}=1,$$

а отнесенное къ осямъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

замѣчаемъ, что можно положить

$$A=\frac{1}{a^2_1},\ B=0,\ C=\frac{1}{b^2_1},\ A_1=\frac{1}{a^2},\ B_1=0,\ C_1=\frac{1}{b^2};$$

кромѣ того уголъ между сопряженными діаметрами будетъ ω, а $\Omega=90°$. Уравненія, выражающія свойства инваріантовъ, обращаются въ слѣдующія:

$$\frac{a^2_1+b^2_1}{a^2_1\,b^2_1\sin^2\omega}=\frac{a^2+b^2}{a^2\,b^2},\quad \frac{1}{a^2_1b^2_1\sin^2\omega}=\frac{1}{a^2\,b^2},$$

а эти даютъ окончательно

$$a^2_1+b^2_1=a^2+b^2,\quad a_1\,b_1\sin\omega=ab,$$

т. е. какъ разъ равенства, выражающія теоремы Аполлонія.

301. Разсмотримъ теперь общее уравненіе коническаго сѣченія въ трилинейныхъ координатахъ:

$$A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2+2D\alpha\gamma+2E\beta\gamma+F\gamma^2=0 \qquad (1)$$

Назовемъ подобно тому, какъ это сдѣлано въ § 88, опредѣлитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$ (См. прибавленіе).

дискриминантомъ уравненія (1).

302. Сдѣлаемъ теперь преобразованіе координатъ, причемъ перейдемъ къ другой системѣ трилинейныхъ координатъ, опредѣляемой формулами:

$$\alpha = a_1 \alpha_1 + a_2 \beta_1 + a_3 \gamma_1,\ \ \beta = b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_1 + b_3 \gamma_1,$$
$$\gamma = c_1 \alpha_1 + c_2 \beta_1 + c_3 \gamma_1.$$

Понятно, что отъ такого преобразованія уравненіе (1) приметъ видъ:

$$A_1 \alpha^2{}_1 + 2B_1 \alpha_1 \beta_1 + C_1 \beta^2{}_1 + 2D_1 \alpha_1 \gamma_1 + 2E_1 \beta_1 \gamma_1 + F_1 \gamma^2{}_1 = 0, \qquad (2)$$

гдѣ коэффиціенты A_1, B_1, и т. д. выражаются черезъ A, B, C, ..., $a_1\ a_2\ a_3$, $b_1\ b_2\ b_3$, $c_1\ c_2\ c_3$. Обозначимъ:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix} \text{ и } \delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

получимъ $\Delta_1 = \Delta \delta^2$ (см. прибавленіе).

Итакъ мы видимъ, что дискриминантъ Δ есть такая функція коэффиціентовъ уравненія (1) коническаго сѣченія, которая отъ перехода отъ одной трилинейной системы къ другой получаетъ множитель, равный квадрату опредѣлителя, составленнаго изъ коэффиціентовъ формулъ преобразованія. Такая функція отъ коэффиціентовъ называется *инваріантомъ*.

303. Такъ какъ мы всегда, употребляя трилинейныя координаты, беремъ за координатныя прямыя три прямыя, не пересѣкающіяся въ одной точкѣ, то опредѣлитель δ не $= 0$ (см. § 63 и прибавленіе). Отсюда мы замѣчаемъ, что, если $\Delta = 0$, то и $\Delta_1 = 0$.

304. Покажемъ геометрически значеніе равенства $\Delta = 0$. Если новая система координатъ будетъ обыкновенная декартовская, то $\alpha_1 = x$, $\beta_1 = y$, $\gamma_1 = 1$, а тогда равенство $\Delta_1 = 0$ будетъ выражать, согласно § 88, что заданное коническое сѣченіе обращается въ систему двухъ прямыхъ.

Итакъ, условіемъ того, чтобы коническое сѣченіе $S - kS_1 = 0$ приводилось къ двумъ прямымъ, является равенство нулю дискриминанта, въ какихъ бы координатахъ это уравненіе ни было выражено.

305. Итакъ, первая часть уравненія

$$\Delta + k\Theta + k^2\Theta_1 + k^3\Delta_1 = 0, \qquad (1)$$

будучи дискриминантомъ уравненія

$$S - kS_1 = 0,$$

получаетъ при преобразованіи координатъ множитель δ^2, не зависящій отъ величины k, а, слѣдовательно, этотъ множитель получаютъ отдѣльно каждый изъ коэффиціентовъ: Δ, Θ, Θ_1, Δ_1. Изъ сказаннаго видно, что эти коэффиціенты суть инваріанты.

Коэффиціенты Δ и Δ_1 суть дискриминанты $S = 0$ и $S_1 = 0$. Коэффиціенты же Θ и Θ_1 суть такъ называемые совокупные инваріанты уравненій $S=0$ и $S_1=0$, такъ какъ въ каждый изъ нихъ входятъ коэффиціенты обоихъ уравненій.

306. Разсмотримъ теперь два случая, когда 1) $\Theta = 0$ и 2) $\Theta_1 = 0$.

Покажемъ, что если нѣкоторый треугольникъ автополяренъ относительно одного изъ коническихъ сѣченій, напр. $S = 0$, и вписанъ въ другое $S_1 = 0$, то $\Theta = 0$.

Достаточно показать, что инваріантъ Θ обращается въ нуль при одной какой либо системѣ координатъ. Возьмемъ указанный автополярный треугольникъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ за координатный.

Въ разсматриваемомъ случаѣ

$$S = L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2,\ S_1 = 2l\,\beta\gamma + 2m\,\gamma\alpha + 2n\,\alpha\beta = 0$$

$$S - kS_1 = L\alpha^2 - 2kn\,\alpha\beta + M\beta^2 - 2km\,\alpha\gamma - 2kl\,\beta\gamma + N\gamma^2 = 0.$$

Приравнивая дискриминантъ послѣдняго уравненія нулю, получимъ

$$\begin{vmatrix} L, & -kn, & -km \\ -kn, & M, & -kl \\ -km, & -kl, & N \end{vmatrix} = LMN - k^2(Ll^2 + Mm^2 + Nn^2) - k^3\, 2l\,mn = 0. \ (*)$$

Въ этомъ случаѣ

$$\Delta = LMN, \qquad \Theta = 0,$$

$$\Theta_1 = -(Ll^2 + Mm^2 + Nn^2) \qquad \Delta_1 = -2lmn.$$

Итакъ, $\Theta = 0$, что и требовалось доказать.

307. Уравненіе (*) можно получить и безъ помощи опредѣлителей, разлагая, согласно § 246, первую часть уравненія $S - kS_1 = 0$ на сумму квадратовъ и приравнивая коэффиціентъ P нулю.

308. Понятно, что, если мы помѣняемъ ролями коническія сѣченія S и S_1, то получимъ такую теорему:

Если треугольникъ автополяренъ съ S_1 и вписанъ въ S, то равенъ нулю другой инваріантъ Θ_1.

309. Покажемъ теперь другое значеніе условія $\Theta_1 = 0$. Если автополярный по отношенію къ S треугольникъ описанъ около S_1, то $\Theta_1 = 0$. Легко замѣтить, что уравненіе коническаго сѣченія, вписаннаго въ координатный треугольникъ, будетъ имѣть видъ:

$$l^2\alpha^2 - 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 - 2ln\,\alpha\gamma - 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0. \qquad (1),$$

Итакъ, принимая указанный автополярный треугольникъ за координатный мы получимъ:

$$S = L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2,$$

а $S_1 = 0$, по условію задачи, должно совпадать съ уравненіемъ (1). Выражая для уравненія

$$S - kS_1 = 0$$

условіе равенства нулю дискриминанта, мы получимъ уравненіе:

$$LMN - k(l^2 MN + m^2 LN + n^2 LM) + 4l^2m^2n^2k^3 = 0.$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что

$$\Delta = LMN, \quad \Theta = -(l^2 MN + m^2 LN + n^2 LM).$$

$$\Theta_1 = 0, \text{ а } \Delta_1 = 4\, l^2\, m^2\, n^2.$$

Понятно, что, обратно, если треугольникъ, автополярный относительно S_1, будетъ описанъ около S, то $\Theta = 0$.

310. Покажемъ еще, что, если треугольникъ, описанный около S, вписанъ въ S_1, то первые три члена уравненія: $\Delta + \Theta k + \Theta_1 k^2$ образуютъ полный квадратъ, т. е. $4\Delta\Theta_1 - \Theta^2 = 0$ (*). Но выраженіе $4\Delta\Theta_1 - \Theta^2$ есть новый инваріантъ, и потому условіе (*) будетъ имѣть мѣсто при всякихъ координатахъ.

Примемъ разсматриваемый въ задачѣ треугольникъ за координатный, тогда за уравненіе $S = 0$ можно принять (1) (см. § 309). Уравненіе же $S_1 = 0$ напишемъ въ такомъ видѣ: $2\nu\alpha\beta + 2\mu\gamma\alpha + 2\lambda\beta\gamma = 0$.

Выражая условіе равенства нулю дискриминанта, мы получимъ уравненіе:

$$4n^2m^2l^2 + 4kmnl(\lambda l + \mu m + \nu n) + (\lambda l + \mu m + \nu n)^2 k^2 + 2k^3 \lambda\mu\nu = 0.$$

Полученное уравненіе показываетъ справедливость высказанной теоремы, такъ какъ первые три члена полученнаго уравненія представляютъ полный квадратъ двучлена $2lmn + k(\lambda l + \mu m + \nu n)$.

311. Очевидно, что, если описанный около S_1 треугольникъ будетъ вписанъ въ S, то будетъ удовлетворяться равенство

$$4\Delta_1\Theta - \Theta^2{}_1 = 0.$$

312. Приложимъ изложенное къ рѣшенію такой задачи.

Найти геометрическое мѣсто центровъ тяжести вписанныхъ въ эллипсъ и описанныхъ около него равностороннихъ треугольниковъ.

Пусть уравненіе заданнаго эллипса будетъ:

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Называя черезъ R радіусъ круга, вписаннаго въ равносторонній треугольникъ, а координаты центра тяжести черезъ (α, β), получимъ уравненіе круга вписаннаго въ видѣ:

$$U = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0.$$

Уравненіе круга описаннаго будетъ:

$$V = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - 4R^2 = 0.$$

Уравненіе круга, относительно котораго треугольникъ автополяренъ:

$$W = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2R^2 = 0 \text{ (см. § 250).}$$

Займемся сначала разсмотрѣніемъ вписанныхъ въ эллипсъ треугольниковъ.

Треугольникъ автополяренъ относительно $W = 0$ и вписанъ въ $S = 0$. Слѣдовательно, для пучка коническихъ сѣченій $W - kS = 0$ инваріантъ Θ равенъ нулю.

Итакъ, для уравненія

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2R^2 - k\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

равенство нулю дискриминанта даетъ уравненіе:

$$2R^2 - k\left(\frac{\alpha^2 + 2R^2}{a^2} + \frac{\beta^2 + 2R^2}{b^2} - 1\right) +$$

$$+ k^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2R^2 - a^2 - b^2}{a^2 b^2} + k^3 . \frac{1}{a^2 b^2} = 0. \quad (*)$$

Условіе $\Theta = 0$ даетъ: $\dfrac{\alpha^2 + 2R^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2 + 2R^2}{b^2} - 1 = 0.$ (1)

Треугольникъ описанъ около $U = 0$ и вписанъ въ $S = 0$. Уравненіе для пучка $U - kS = 0$ будетъ:

$$-R^2 - k.\left(\frac{\alpha^2 - R^2}{a^2} + \frac{\beta^2 - R^2}{b^2} - 1\right) +$$

$$+ k^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2 - R^2 - a^2 - b^2}{a^2 b^2} + k^3 \frac{1}{a^2 b^2} = 0.$$

Условіе $\Theta^2 - 4\Theta_1 \Delta = 0$ даетъ:

$$[b^2(\alpha^2 - R^2) + a^2(\beta^2 - R^2) - a^2 b^2]^2 - 4a^2 b^2 R^2 (a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2 + R^2) = 0. \quad (2)$$

Исключая R^2 изъ уравненій (1) и (2), получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія (1) получимъ:

$$R^2 = -\frac{H}{2(a^2 + b^2)}, \text{ гдѣ } H = b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2 b^2.$$

Подставляя это выраженіе во (2) и сокращая множителя H, получимъ окончательно

$$b^2\alpha^2(a^2 + 3b^2)^2 + a^2\beta^2(b^2 + 3a^2)^2 - a^2 b^2 c^4 = 0.$$

Геометрическое мѣсто, слѣдовательно, есть эллипсъ, имѣющій тѣ же оси, что и данный.

Займемся теперь описанными треугольниками.

Треугольникъ автополяренъ съ $W=0$ и описанъ около $S=0$. Тогда для пучка $W-kS=0$ будетъ равенъ нулю инваріантъ Θ_1 уравненія (*), что даетъ: $a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2-2R^2=0$, откуда

$$2R^2=a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2. \qquad (1)$$

Треугольникъ описанъ около $S_1=0$ и вписанъ въ V; для $S_1-kV=0$ получимъ уравненіе:

$$-\frac{1}{a^2b^2}-k\frac{\alpha^2+\beta^2-4R^2-a^2-b^2}{a^2b^2}+$$

$$+k^2\left(\frac{\alpha^2-4R^2}{a^2}+\frac{\beta^2-4R^2}{b^2}-1\right)+4R^2k^3=0,$$

гдѣ должно быть $\Theta^2-4\Theta_1\Delta=0$

$$(\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2-4R^2)^2+4\left[b^2(\alpha^2-4R^2)+(\beta^2-4R^2)a^2-a^2b^2\right]=0. \quad (2)$$

Исключимъ R^2 изъ уравненій (1) и (2) и замѣнимъ α и β на x и y—получимъ окончательно уравненіе искомаго геометрическаго мѣста въ слѣдующемъ видѣ:

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)\left[9(x^2+y^2)-a^2-b^2\right]+4(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)=0$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто есть кривая 4-го порядка.

313. Если два коническихъ сѣченія $S=0$ и $S_1=0$ соприкасаются, то два изъ числа корней уравненія $\Delta+\Theta k+\Theta_1k^2+\Delta_1k^3=0$ должны сдѣлаться равными, условіемъ чего, какъ извѣстно изъ алгебры, служитъ уравненіе вида:

$$4(\Theta_1^2-3\Delta_1\Theta)(\Theta^2-3\Delta\Theta_1)=(\Theta\Theta_1-9\Delta\Delta_1)^2. \qquad (*)$$

Приложимъ послѣднее замѣчаніе къ слѣдующей задачѣ:

Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ можно провести три нормали къ эллипсу.

Обозначая черезъ α и β координаты нѣкоторой точки, принадлежащей искомому геометрическому мѣсту, мы получимъ 4 точки встрѣчи нормалей, проведенныхъ къ эллипсу: $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ изъ точки (α,β), рѣшая совмѣстно уравненіе эллипса съ уравненіемъ гиперболы:

$$c^2xy-a^2\alpha y+b^2\beta x=0.$$

Для того, чтобы существовало три нормали, необходимо, чтобы 2 точки пересѣченія эллипса и гиперболы совпадали.

Условіе равенства нулю дискриминанта для пучка, выраженнаго такимъ уравненіемъ:

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2-2k(c^2xy-a^2\alpha y+b^2\beta x)=0$$

будетъ имѣть видъ:

$$a^2 b^2 + k^2 (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^4) - 2k^3 \alpha\beta c^2 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ $\Theta = 0$ и мы получимъ вмѣсто условія (*) слѣдующее:

$$27\Delta\Delta_1{}^2 + 4\Theta_1{}^3 = 0.$$

Но въ настоящемъ случаѣ послѣднее уравненіе приводится къ такому:

$$(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4\alpha^2\beta^2 = 0$$

Получилась кривая 6-го порядка, называемая *эволютой* эллипса и представляющая собою геометрическое мѣсто центровъ кривизны эллипса (см. § 272).

То же самое можно было бы продѣлать и для параболы $y^2 - 2px = 0$, причемъ получилось бы уравненіе эволюты въ слѣдующемъ видѣ:

$$27py^2 = 8(x-p)^3.$$

Теорія взаимныхъ поляръ.

314. Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія, написанное въ самомъ общемъ видѣ:

$$L_1\alpha^2_1 + L_2\alpha^2_2 + \dots + L_n\alpha^2_n + M_1\beta_1\gamma_1 + M_2\beta_2\gamma_2 + \dots + M_m\beta_m\gamma_m +$$
$$+ N_1\delta_1 + N_2\delta_2 + \dots + N_q\delta_q + P = 0, \qquad (1$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_m, \delta_1, \delta_2, \dots \delta_q$ суть нѣкоторыя заданныя функціи первой степени отъ координатъ, вида $ax + by + c$, а $L_1, \dots M_1, \dots N_1, \dots P$ заданные численные коэффиціенты. Очевидно, что уравненіе (1), которое мы для краткости будемъ обозначать такъ:

$$\Sigma L\alpha^2 + \Sigma M\beta\gamma + \Sigma N\delta + P = 0, \quad \text{или} \quad f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,$$

будучи, по раскрытіи скобокъ, второй степени относительно координатъ, опредѣляетъ нѣкоторое коническое сѣченіе. Всѣ разсматривавшіяся до сихъ поръ виды уравненія коническаго сѣченія суть частные виды (1):

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Cy + F = 0, \quad \alpha^2 + \beta = 0, \quad L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0,$$
$$\alpha\beta = k^2, \quad \beta\gamma - \alpha^2 = 0, \; A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0,$$
$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0.$$

315. Возьмемъ на коническомъ сѣченіи точку M_0, имѣющую координаты x_0, y_0 и назовемъ результатъ подстановки чиселъ x_0 и y_0 въ функціи $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ черезъ $\alpha^0_i, \beta^0_i, \gamma^0_i, \delta^0_i$; тогда, очевидно, числа $\alpha^0_i, \beta^0_i \gamma^0_i \delta^0_i$ будутъ удовлетворять уравненію (1), что мы запишемъ такъ

$$f(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \delta^0) = \Sigma L\alpha^{02} + \Sigma M\beta^0\gamma^0 + \Sigma N\delta^0 + P = 0 \qquad (2)$$

Вычитая уравненіе (2) изъ уравненія (1), получимъ

$$\Sigma L\,(\alpha^2-\alpha^{02})+\Sigma M\,(\beta\gamma-\beta^0\gamma^0)+\Sigma N\,(\delta-\delta^0)=0;$$

послѣднее уравненіе можно переписать такъ:

$$\Sigma L\,(\alpha-\alpha^0)\,(\alpha+\alpha^0)+$$

$$+\Sigma M\left[(\beta-\beta^0)\frac{\gamma+\gamma^0}{2}+(\gamma-\gamma^0)\frac{\beta+\beta^0}{2}\right]+\Sigma N(\delta-\delta^0)=0 \qquad (3)$$

Возьмемъ теперь уравненіе сѣкущей въ видѣ

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\ldots+l_n\alpha_n+k_1\beta_1+\ldots k_m\beta_m+t_1\gamma_1+\ldots t_m\gamma_m+s_1\delta_1+\ldots+s_q\delta_q+r=0.$$

Это уравненіе напишемъ для краткости такъ

$$\Sigma l\alpha+\Sigma k\beta+\Sigma t\gamma+\Sigma s\delta+r=0. \qquad (4)$$

Пусть эта сѣкущая проходитъ черезъ точку M_0, тогда будетъ

$$\Sigma\alpha l^0+\Sigma k\beta^0+t\,\Sigma\gamma^0+\Sigma s\delta^0+r=0. \qquad (5)$$

Вычитая изъ уравненія (4) уравненіе (5), получимъ уравненіе прямой, проходящей черезъ точку M_0, въ такомъ видѣ

$$\Sigma l\,(\alpha-\alpha^0)+\Sigma k\,(\beta-\beta^0)+\Sigma t\,(\gamma-\gamma^0)+\Sigma s\,(\delta-\delta^0)=0. \qquad (6)$$

Чтобы найти координаты другой точки пересѣченія хорды (6) съ заданнымъ коническимъ сѣченіемъ, необходимо рѣшить относительно x и y уравненія (3) и (6). Одною парою корней будутъ очевидно, числа x_0, y_0, другая же будетъ зависѣть отъ выбора коэффиціентовъ l_i, k_i, t_i, s_i. Мѣняя эти коэффиціенты, мы будемъ получать безчисленное множество значеній для α_i, β_i, γ_i, δ_i, соотвѣтствующихъ другой точкѣ сѣченія. Отсюда мы заключаемъ о существованіи пропорцій

$$\frac{l_i}{L_i\,(\alpha_i+\alpha^0{}_i)}=\frac{k_i}{M\,\dfrac{\gamma_i+\gamma_i{}^0}{2}}=\frac{t_i}{M\,\dfrac{\beta_i+\beta_i{}^0}{2}}=\frac{s_i}{N}. \qquad (7)$$

Въ послѣдней пропорціи (7) заключается $n+2m+q-1$ уравненій, позволяющихъ, если заданы координаты другой точки сѣченія x_1, y_1, выразить всѣ коэффиціенты l_i, k_i, t_i, s_i, кромѣ одного, черезъ этотъ послѣдній. Слѣдовательно, по сокращеніи уравненія (6) на этотъ послѣдній коэффиціентъ, мы получимъ уравненіе хорды въ окончательномъ видѣ.

Сдѣлаемъ теперь $x_1=x_0$, $y_1=y_0$, тогда сѣкущая обратится въ касательную и уравненія (7) будутъ имѣть видъ

$$\frac{l_i}{2L_i\,\alpha_i{}^0}=\frac{k_i}{M_i\,\gamma_i{}^0}=\frac{t_i}{M_i\,\beta_i{}^0}=\frac{s_i}{N_i}. \qquad (8)$$

Откуда уравненіе касательной въ точкѣ M_0 будетъ имѣть видъ

$$\Sigma 2L\alpha^0(\alpha-\alpha^0)+\Sigma M\,[\gamma^0(\beta-\beta^0)+(\gamma-\gamma^0)\beta^0]+\Sigma N(\delta-\delta^0)=0, \quad (9)$$

или еще такъ

$$\Sigma 2L\alpha\alpha^0+2M(\beta\gamma^0+\gamma\beta^0)+\Sigma N\delta-2\Sigma L\alpha^{02}-2\Sigma M\beta^0\gamma^0-\Sigma N\delta^0=0.$$

Прибавляя къ послѣднему уравненію удвоенное (2), получаемъ

$$\Sigma 2L\alpha\alpha^0+\Sigma M(\beta\gamma^0+\gamma\beta^0)+\Sigma N\delta+\Sigma N\delta^0+2P=0.$$

И окончательно уравненіе касательной будетъ имѣть видъ

$$\Sigma 2L\alpha\alpha^0+\Sigma M(\beta\gamma^0+\gamma\beta^0)+\Sigma N(\delta+\delta^0)+2P=0. \quad (10)$$

316. Если точка M_0 не лежитъ на коническомъ сѣченіи (1), тогда (10) будетъ поляра точки M_0. Въ самомъ дѣлѣ, пусть точка касанія касательной, проведенной черезъ M_0, будетъ M_1 съ координатами x_1, y_1; тогда касательная будетъ имѣть уравненіе

$$\Sigma 2L\alpha\alpha'+\Sigma M(\beta\gamma'+\gamma\beta')+\Sigma N(\delta+\delta')+2P=0, \quad (11)$$

причемъ $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \delta'_i$ суть результаты подстановки чиселъ x_1, y_1 въ функціи $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$. Точка M_1 лежитъ на кривой, слѣдовательно, удовлетворяется уравненіе

$$\Sigma L\alpha'^2+\Sigma M\beta'\gamma'+\Sigma N\delta'+P=0. \quad (12)$$

Для того чтобы касательная проходила черезъ заданную точку M_0, необходимо, чтобы координаты этой послѣдней точки удовлетворяли уравненію (11) этой касательной. Получимъ условіе

$$\Sigma 2L\alpha'\alpha^0+\Sigma M(\beta^0\gamma'+\gamma^0\beta')+\Sigma(\delta^0+\delta')+2P=0. \quad (13)$$

Итакъ мы видимъ, что координаты x_1, y_1 точки касанія найдемъ какъ общія рѣшенія двухъ уравненій: одного второй степени (12), а другого первой (13). Отбросивъ штрихи надъ буквами, мы замѣчаемъ, что уравненіе (12) совпадаетъ съ уравненіемъ (1), а уравненіе (13) съ уравненіемъ (10). Слѣдовательно уравненіе (10) въ данномъ случаѣ опредѣляетъ прямую, на пересѣченіи которой съ кривою (1) лежатъ точки касанія двухъ касательныхъ, проведенныхъ къ коническому сѣченію черезъ точку M_0. Уравненіе (10) имѣетъ мѣсто, гдѣ бы ни была задана точка M_0 и опредѣляетъ, слѣдовательно, всегда нѣкоторую прямую линію, называемую *полярою* точки M_0. Точка же M_0 по отношенію къ полярѣ называется *полюсомъ*. Какъ частный случай получимъ тѣ виды уравненія поляръ, которыя мы уже писали:

1) $\alpha^2+\beta=0$, $\quad 2\alpha\alpha_0+\beta+\beta_1=0$

2) $L\alpha^2+\beta^2+P=0$, $\quad 2L\alpha\alpha_0+2\beta\beta_0+2P=0$

3) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=f(x,y,z)=0,$

$$2Axx_0+2B(xy_0+yx_0)+2Cyy_0+2D(xz_0+x_0z)+2E(yz_0+y_0z)+2Fzz_0=0.$$

Это уравненіе по сокращеніи на 2 можно переписать такъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}x_0+\frac{\partial f}{\partial y}y_0+\frac{\partial z}{\partial z}z_0=0.$$

4) $L\alpha^2+M\beta^0+N\gamma^2=0,\qquad L\alpha\alpha_0+M\beta\beta_0+N\gamma\gamma_0=0$

5) $\beta\gamma-\alpha^2=0,\qquad \beta\gamma_0+\gamma\beta_0-2\alpha\alpha_0=0$

6) $\alpha\beta-k^2=0,\qquad \alpha\beta_0+\alpha_0\beta-2k^2=0.$

317. *Основная теорема.* Поляры всѣхъ точекъ прямой проходятъ черезъ полюсъ этой прямой и обратно, полюсы всѣхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку, находятся на полярѣ этой точки.

Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія въ видѣ:

$$L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2=0.$$

Первая часть нашей теоремы была уже доказана въ § 258, но въ виду важности этой теоремы мы повторимъ доказательство, нѣсколько видоизмѣнивъ его.

Пусть будетъ задана нѣкоторая прямая

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0;$$

полюсъ этой прямой имѣетъ координаты

$$\frac{l}{L},\ \frac{m}{M},\ \frac{n}{N}\ \text{(см. § 258).}$$

Въ этомъ легко убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ искомыя координаты полюса черезъ α_1, β_1, γ_1; получимъ уравненіе поляры этого полюса въ видѣ:

$$L\alpha_1\alpha+M\beta_1\beta+N\gamma_1\gamma=0.$$

Ясно, что эта поляра должна совпадать съ данной прямой; слѣдовательно, должна существовать пропорція

$$\frac{L\alpha_1}{l}=\frac{M\beta_1}{m}=\frac{N\gamma_1}{n};$$

откуда и получаются указанныя выше координаты.

Разсмотримъ теперь нѣкоторую совершенно произвольную точку на заданной прямой съ координатами α_0, β_0, γ_0. Ясно, что должно удовлетворяться условіе

$$l\alpha_0+m\beta_0+n\gamma_0=0. \qquad (*)$$

Поляра точки α_0, β_0, γ_0 имѣетъ уравненіе:

$$L\alpha_0\alpha+M\beta_0\beta+N\gamma_0\gamma=0. \qquad (**)$$

Будемъ теперь брать различныя точки на заданной прямой, другими словами, брать

различныя числа α_0, β_0, γ_0, удовлетворяющія условію (*). Тогда поляра (**) всегда будетъ проходить черезъ точку $\frac{l}{L}$, $\frac{m}{M}$, $\frac{n}{N}$, что слѣдуетъ изъ того, что по подстановкѣ въ уравненіе (**) вмѣсто α, β, γ чиселъ $\frac{l}{L}$, $\frac{m}{M}$, $\frac{n}{N}$, послѣднее обращается въ уравненіе (*).

318. Подобнымъ же образомъ легко доказать и обратное предложеніе.

Пусть точка, черезъ которую проходятъ разсматриваемыя поляры, имѣетъ координаты a_1, b_1, c_1 *). Тогда уравненіе каждой изъ поляръ можетъ быть написано въ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

гдѣ коэффиціенты l, m, n должны удовлетворять условію:

$$la_1 + mb_1 + nc_1 = 0. \tag{*}$$

Поляра заданной точки a_1, b_1, c_1 есть

$$La_1\alpha + Mb_1\beta + Nc_1\gamma = 0. \tag{**}$$

Ясно, что полюсъ $\frac{l}{L}$, $\frac{m}{M}$, $\frac{n}{N}$ всякой прямой $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$, проведенной черезъ заданную точку, будетъ лежать на прямой (**), ибо его координаты по подстановкѣ въ уравненіе (**) обращаютъ его въ уравненіе (*).

Какъ слѣдствіе этой основной теоремы получается слѣдующее замѣчаніе: прямая, соединяющая двѣ точки M и M_1, имѣетъ полюсомъ точку пересѣченія поляръ точекъ M и M_1.

319. Мы видѣли уже (§ 286), что полярою центра является безконечно далекая прямая и наоборотъ, поляра всякой безконечно далекой точки проходитъ черезъ центръ коническаго сѣченія и есть, слѣдовательно, діаметръ его. Что же касается параболы, то, хотя центръ ея лежитъ на безконечно далекой прямой, все же діаметры ея имѣютъ полюсами безконечно далекія точки.

320. Поляра точки a_1, b_1, c_1 параллельна діаметру, сопряженному съ діаметромъ, проходящимъ черезъ эту точку.

Уравненіе діаметра, проходящаго черезъ заданную точку, имѣетъ видъ

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

гдѣ l, m, n суть коэффиціенты, удовлетворяющіе двухъ условіямъ:

$$la_1 + mb_1 + nc_1 = 0 \tag{1}$$

$$l\frac{a}{L} + m\frac{b}{M} + n\frac{c}{N} = 0. \tag{2}$$

---

*) Чтобы не смѣшивать съ обозначеніемъ a, b, c, принятымъ нами для сторонъ координатнаго треугольника.

Поляра точки a_1, b_1, c_1 имѣетъ уравненіе:

$$La_1\alpha + Mb_1\beta + Nc_1\gamma = 0.$$

Проведемъ черезъ центръ прямую, параллельную этой полярѣ, и докажемъ, что эта прямая будетъ діаметромъ, сопряженнымъ съ указаннымъ діаметромъ.

Общее уравненіе прямыхъ параллельныхъ имѣетъ видъ:

$$La_1\alpha + Mb_1\beta + Nc_1c - k(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0.$$

Надо опредѣлить k подъ тѣмъ условіемъ, чтобы это уравненіе удовлетворялось координатами центра: $\frac{a}{L}$, $\frac{b}{M}$, $\frac{c}{N}$. Находимъ:

$$k = \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\frac{a^2}{L} + \frac{b^2}{M} + \frac{c^2}{N}}.$$

Въ случаѣ параболы k равно ∞ и получается безконечно далекая прямая.

Итакъ мы видимъ, что прямая, проведенная черезъ центръ параллельно полярѣ (3), имѣетъ видъ:

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0,$$

гдѣ $$l_1 = La_1 - ka; \quad m_1 = Mb_1 - kb; \quad n_1 = Nc_1 - kc.$$

Умножая первое изъ этихъ равенствъ на $\frac{l}{L}$, второе на $\frac{m}{M}$, третье на $\frac{n}{N}$, получимъ:

$$\frac{ll_1}{L} + \frac{mm_1}{M} + \frac{nn_1}{N} = la_1 + mb_1 + nc_1 - k\left(l\frac{a}{L} + m\frac{b}{M} + n\frac{c}{N}\right).$$

Отсюда, на основаніи равенствъ (1) и (2), получаемъ равенство

$$\frac{ll_1}{L} + \frac{mm_1}{M} + \frac{nn_1}{N} = 0.$$

На основаніи же соображеній § 287 замѣчаемъ, что прямая

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1c = 0$$

есть сопряженный діаметръ, что и требовалось доказать.

Послѣднее замѣчаніе можно короче высказать такъ: полюсъ каждаго діаметра лежитъ на діаметрѣ сопряженномъ.

321. Указанная взаимность поляръ не ограничивается, впрочемъ, приведенными свойствами ихъ, но идетъ гораздо глубже и можетъ быть поставлена въ связь съ общимъ закономъ двойственности координатъ, о которомъ мы уже упоминали.

Задавая координаты полюса, мы тѣмъ самымъ задаемъ уравненіе поляры, а

потому эти же самыя координаты могутъ быть разсматриваемы какъ линейныя координаты поляры.

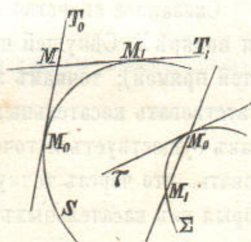
Геометрическимъ теоремамъ относительно точекъ будутъ соотвѣтствовать аналогичныя теоремы, получающіяся черезъ замѣну точекъ ихъ полярами и обратно, прямыхъ линій—полюсами.

Въ § 65 мы доказали, что уравненіе первой степени въ линейныхъ координатахъ опредѣляетъ точку; это теперь слѣдуетъ изъ того, что если возьмемъ декартовы координаты полюса x_1, y_1 и будемъ ихъ считать линейными координатами соотвѣтствующей поляры, то уравненіе

$$lx_1 + my_1 + n = 0 \qquad (1)$$

можемъ считать опредѣляющимъ полюсъ линіи, опредѣляемой этимъ уравненіемъ въ декартовыхъ координатахъ, ибо черезъ этотъ полюсъ проходятъ поляры, опредѣляемыя линейными координатами x_1, y_1, удовлетворяющими уравненію (1).

322. Возьмемъ теперь какую нибудь кривую S и проведемъ въ нѣкоторой точкѣ M_0, принадлежащей этой кривой, касательную M_0T_0; пусть полюсомъ этой касательной относительно нѣкотораго коническаго сѣченія будетъ нѣкоторая точка M_0 (см. черт. 131). Проведемъ теперь касательную M_1T_1 къ S въ сосѣдней, достаточно близкой къ M_0, точкѣ M_1; полюсъ этой касательной будетъ нѣкоторая точка M_1 вблизи точки M_0. Приближая теперь точку M_1 къ точкѣ M_0, мы заставимъ касательную M_1T_1 стремиться къ совпаденію съ касательною M_0T_0 и точку M_1 съ точкою M_0. При сказанномъ перемѣщеніи точка M_1 описываетъ нѣкоторую кривую Σ, которую будемъ называть полярою кривой S.



Черт. 131.

Итакъ мы видимъ, что поляра Σ кривой S есть геометрическое мѣсто полюсовъ разныхъ касательныхъ кривой S.

323. Докажемъ теперь, что, обратно, полярою кривой Σ относительно того же коническаго сѣченія будетъ кривая S.

Возьмемъ двѣ точки M_0 и M_1 на кривой Σ (см. черт. 131); имъ соотвѣтствуютъ двѣ касательныя M_0T_0, M_1T_1 кривой S. Точка пересѣченія M этихъ касательныхъ есть полюсъ хорды $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ (см. § 318). Будемъ теперь приближать точку M_1 къ точкѣ M_0; хорда $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ будетъ стремиться совпасть съ касательною $\mathrm{M}_0\tau$ кривой Σ въ точкѣ M_0. Полюсъ хорды $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$, или точка M, будетъ стремиться къ совпаденію съ точкою M_0, что показываетъ, что полюсъ касательной къ кривой Σ лежитъ на кривой S, что и требовалось доказать.

324. Итакъ мы видимъ, что между двумя кривыми S и Σ существуетъ взаимность, состоящая въ томъ, что каждая изъ нихъ есть поляра другой. Кривыя S и Σ называются *взаимными полярами*.

325. Теорія взаимныхъ поляръ позволяетъ замѣтить законъ двойственности во всей его полнотѣ и общности.

Всякое уравненіе $f(x, y) = 0$ можно разсматривать съ двухъ точекъ зрѣнія: во-первыхъ, какъ опредѣляющее въ декартовыхъ координатахъ нѣкоторую кривую S; во-вторыхъ, какъ опредѣляющее въ линейныхъ координатахъ другую кривую Σ, поляру первой; причемъ координаты x_1, y_1, удовлетворяющія уравненію $f(x, y)$ мы разсматриваемъ какъ координаты нѣкоторой касательной къ кривой Σ; эта касательная есть поляра точки, опредѣляемой въ декартовыхъ координатахъ числами x_1, y_1. Поэтому линейныя координаты иногда называются *касательными* или *тангенціальными координатами*.

326. Кривую Σ называютъ *оберткою* (*огибающею*, enveloppe, Einhüllende Curve) поляръ точекъ, лежащихъ на кривой S.

327. Въ дальнѣйшемъ, разсматривая кривыя линіи, опредѣляемыя уравненіями третьей, четвертой и еще болѣе высокихъ степеней, мы всегда будемъ называть *порядкомъ* линіи степень опредѣляющаго ея уравненія и докажемъ, что кривая n-го порядка пересѣкается прямою въ n дѣйствительныхъ или мнимыхъ точкахъ.

Сказанное свойство линіи n-го порядка S отразится слѣдующимъ образомъ на ея полярѣ Σ. Сѣкущей прямой будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая точка P (полюсъ этой прямой); точкамъ же встрѣчи сѣкущей съ заданною кривою S будутъ соотвѣтствовать касательныя поляры Σ, проходящія, конечно, черезъ точку P. Такъ какъ существуетъ n точекъ встрѣчи сѣкущей съ кривою S, то отсюда будетъ слѣдовать, что черезъ точку P проходятъ n касательныхъ поляры Σ. Конечно, нѣкоторыя изъ касательныхъ могутъ быть мнимыми, а также совпадающими.

Будемъ называть *классомъ* кривой линіи число касательныхъ, которыя можно провести изъ всякой внѣшней точки къ кривой.

Отсюда мы видимъ, что полярою кривой n-го порядка всегда является кривая n-го класса и наоборотъ, полярою кривой n-го класса будетъ кривая n-го порядка

328. Вышеприведенныхъ соображеній достаточно, чтобы убѣдиться, что полярою всякаго коническаго сѣченія будетъ тоже коническое сѣченіе, ибо коническое сѣченіе есть линія второго порядка и класса. Покажемъ это непосредственно.

Пусть уравненіе основного коническаго сѣченія имѣетъ видъ:

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0.$$

Найдемъ уравненіе взаимной поляры коническаго сѣченія

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0. \tag{1}$$

Возьмемъ какую нибудь точку $M_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, лежащую на послѣднемъ коническомъ сѣченіи; такъ что

$$L\alpha_0^2 + M\beta_0^2 + N\gamma_0^2 = 0.$$

Касательная въ точкѣ M_0 линіи (1) имѣетъ уравненіе

$$L\alpha_0\alpha + M\beta_0\beta + N\gamma_0\gamma = 0. \qquad (2)$$

Обозначая координаты полюса этой прямой (конечно, по отношенію къ основному коническому сѣченію) черезъ α_1, β_1, γ_1, мы ихъ получимъ, сравнивая коэффиціенты уравненія (2) и уравненія

$$(A\alpha_1 + B\beta_1 + D\gamma_1)\,\alpha + (B\alpha_1 + C\beta_1 + E\gamma_1)\,\beta + D\alpha_1 + E\beta_1 + F\gamma_1 = 0.$$

Остается выразить α_0, β_0, γ_0 черезъ α_1, β_1, γ_1, подставить полученныя выраженія въ уравненіе $L\alpha_0{}^2 + M\beta_0{}^2 + N\gamma_0{}^2 = 0$ и уничтожить значки при буквахъ α_1, β_1, γ_1. Продѣлавъ сказанное, получаемъ окончательное уравненіе взаимной поляры коническаго сѣченія (1) въ такомъ видѣ:

$$\frac{(A\alpha + B\beta + D\gamma)^2}{L} + \frac{(B\alpha + C\beta + E\gamma)^2}{M} + \frac{(D\alpha + E\beta + F\gamma)^2}{N} = 0. \qquad (3)$$

Въ случаѣ, если одинъ изъ коэффиціентовъ L, M, N равенъ нулю, заданное уравненіе (1) представляетъ двѣ прямыя. Въ этомъ случаѣ полярою будутъ двѣ точки.

Разсматривая уравненіе (3), мы замѣчаемъ, что для поляры автополярнымъ треугольникомъ является слѣдующій:

$$A\alpha + B\beta + D\gamma = 0$$
$$B\alpha + C\beta + E\gamma = 0$$
$$D\alpha + E\beta + F\gamma = 0$$

Этотъ треугольникъ, какъ легко замѣтить, есть взаимный треугольника: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

329. Всякія два коническихъ сѣченія имѣютъ всегда одинъ общій автополярный треугольникъ. Вершинами этого треугольника являются точки встрѣчи трехъ паръ общихъ хордъ (см. §§ 239 и 263).

Двѣ стороны такого автополярнаго треугольника мнимы, если основное коническое сѣченіе и разсматриваемое имѣютъ только двѣ дѣйствительныя точки пересѣченія.

Если мы не будемъ стѣсняться введеніемъ въ разсмотрѣніе мнимыхъ точекъ и прямыхъ, то можемъ упростить вышеприведенное разсмотрѣніе отнесеніемъ основного коническаго сѣченія къ общему автополярному треугольнику съ даннымъ. Тогда его уравненіе будетъ имѣть видъ:

$$L_1\alpha^2 + M_1\beta^2 + N_1\gamma^2 = 0;$$

такъ что

$$A = L_1,\ B = 0,\ C = M_1,\ D = 0,\ E = 0,\ F = N_1.$$

Тогда уравненіе взаимной поляры (3) (см. § 228) будетъ имѣть видъ:

$$\frac{L_1^2}{L}\alpha^2 + \frac{M_1^2}{M}\beta^2 + \frac{N_1^2}{N}\gamma^2 = 0. \qquad (*)$$

Это уравненіе показываетъ, что взаимная поляра имѣетъ тотъ же автополярный треугольникъ.

330. Отсюда легко замѣтить слѣдующее: Если центръ основного коническаго сѣченія лежитъ на заданной линіи:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0, \qquad (1)$$

то взаимная поляра парабола.

Координаты центра основнаго коническаго сѣченія суть: $\frac{a}{L_1}$, $\frac{b}{M_1}$, $\frac{c}{N_1}$.

Подставляя ихъ въ уравненіе (1), получимъ равенство:

$$\frac{a^2}{\frac{L_1^2}{L}} + \frac{b^2}{\frac{M_1^2}{M}} + \frac{c^2}{\frac{N_1^2}{N}} = 0,$$

выражающее (см. § 255) условіе того, что взаимная поляра (*) (см. § 329) — парабола.

Сказанное, впрочемъ, очевидно изъ геометрическихъ соображеній, ибо, если центръ O основной кривой будетъ находиться внѣ заданной кривой S, то изъ этой точки можно будетъ провести двѣ дѣйствительныя касательныя къ кривой S; такъ какъ полюсы этихъ касательныхъ удаляются въ безконечность, то заключаемъ, что кривая Σ имѣетъ безконечныя вѣтви по двумъ различнымъ направленіямъ; слѣдовательно, это есть гипербола. Если центръ O основнаго коническаго сѣченія находится на кривой S, то обѣ касательныя совпадаютъ и, слѣдовательно, двѣ соотвѣтственныя безконечно далекія точки взаимной поляры сливаются въ одну и тогда кривая Σ парабола. Наконецъ, если центръ O лежитъ внутри заданной кривой S, такъ что черезъ него можно провести только двѣ мнимыя касательныя, то кривая Σ—эллипсъ.

331. Итакъ мы видимъ, что способъ взаимныхъ поляръ связываетъ двѣ фигуры такимъ образомъ, что каждой точкѣ одной изъ нихъ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная прямая другой и наоборотъ. Поэтому этотъ способъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ нѣкоторое обобщеніе понятія о гомографіи и инволюціи прямолинейныхъ рядовъ точекъ и пучковъ, изложеннаго въ §§ 66 и 78. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли тамъ, что если заданы два ряда точекъ, расположенныхъ на нѣкоторой прямой линіи, то положеніе точки, принадлежащей одному ряду, можно опредѣлить величиной параметра λ, такъ сказать координатою этой точки. Подобнымъ же образомъ точка, принадлежащая другой системѣ, можетъ быть опредѣлена другой координатной μ. Гомографическая зависимость такихъ двухъ рядовъ точекъ задается

уравненіемъ первой степени относительно обѣихъ координатъ λ и μ:

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0 \text{ (см. § 66).}$$

332. Представимъ теперь себѣ двѣ плоскости, заполненныя точками, причемъ точки одной плоскости пусть опредѣляются координатами x и y, а точки другой координатами X и Y. Между двумя указанными системами точекъ поставимъ зависимость, выражаемую общимъ уравненіемъ первой степени относительно тѣхъ и другихъ координатъ. Общій видъ такого уравненія есть:

$$(l_1 x + m_1 y + n_1) X + (l_2 x + m_2 y + n_2) Y + l_3 x + m_3 y + n_3 = 0. \quad (*)$$

333. Зависимость (Reciprocität), выражаемая уравненіемъ (*) приводится къ тому, что каждой точкѣ x_0, y_0 одной системы соотвѣтствуетъ прямая линія другой плоскости:

$$LX + MY + N = 0,$$

гдѣ $L = l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1$, $M = l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2$, $N = l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3$, и обратно, всякой прямой

$$lx + my + n = 0$$

будетъ соотвѣтствовать въ другой системѣ точка, имѣющая координаты X, Y, опредѣляемыя изъ уравненій:

$$\frac{l_1 X + l_2 Y + l_3}{l} = \frac{m_1 X + m_2 Y + m_3}{m} = \frac{n_1 X + n_2 Y + n_3}{n}.$$

Послѣднія два уравненія даютъ координаты искомой точки X, Y.

Конечно, для того, чтобы прямая

$$LX + MY + N = 0$$

могла совпадать со всякою прямою плоскости, необходимо, чтобы опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix}$$

не равнялся нулю, ибо въ противномъ случаѣ нельзя по коэффиціентамъ L, M, N опредѣлить соотвѣтственныхъ координатъ x_0, y_0; а тогда для прямой одной системы или нѣтъ соотвѣтствующей точки другой, или же этихъ точекъ безчисленное множество. Въ этомъ случаѣ прямой одной системы будетъ соотвѣтствовать прямая другой и получаются два гомографическихъ пучка. Въ самомъ дѣлѣ, если указанный выше опредѣлитель равенъ нулю, тогда въ уравненіи (*), которое можно написать такъ

$$\alpha X + \beta Y + \gamma = 0$$

прямыя $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ или совпадаютъ или пересѣкаются въ одной точкѣ.

Ясно, что перваго случая разсматривать совсѣмъ не надо; что же касается второго, то: $\gamma = k\alpha + q\beta$; отсюда: $\alpha(X+k)+\beta(Y+q)=0$. Обозначая $X+k$ черезъ δ, а $Y+q$ черезъ ε, получимъ два гомографическихъ пучка: $\delta-\lambda\varepsilon=0$ и $\alpha-\mu\beta=0$; причемъ $1+\lambda\mu=0$.

334. Будемъ два соотвѣтственные элемента, т. е. точку одной системы и прямую другой, называть *двойными*, если при наложенiи двухъ плоскостей одна на другую точка ложится на соотвѣтствующую ей прямую.

Покажемъ, какъ найти двойные элементы двухъ совмѣщенныхъ плоскостей.

Пусть плоскости такъ наложены, что совпали прямоугольныя системы x, y и X, Y обѣихъ изъ нихъ. Возьмемъ какую нибудь точку x_0, y_0 одной системы; тогда въ другой системѣ ей соотвѣтствуетъ прямая

$$(l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1) X + (l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2) Y + l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3 = 0.$$

Если заданная точка лежитъ на соотвѣтствующей ей прямой, то координаты x_0, y_0 удовлетворяютъ уравненiю и мы получаемъ:

$$(l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1) x_0 + (l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2) y_0 + l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3 = 0.$$

Послѣднее уравненiе есть уравненiе коническаго сѣченiя

$$l_1 x_0^2 + (m_1 + l_2) x_0 y_0 + m_2 y_0^2 + (n_1 + l_3) x_0 + (n_2 + m_3) y_0 + n_3 = 0. \quad (1)$$

Итакъ мы видимъ, что двойные элементы суть точки на коническомъ сѣченiи и касательныя къ нему; причемъ сказанное имѣетъ мѣсто, считаемъ ли мы координаты x_0, y_0 принадлежащими той или другой системѣ.

335. Будемъ два соотвѣтственныхъ элемента, точку P и прямую L, называть *взаимными*, если точкѣ P, какъ принадлежащей первой системѣ, соотвѣтствуетъ прямая L второй системы и прямой L, разсматриваемой, какъ элементъ первой системы, та же самая точка P, разсматриваемая, какъ принадлежащая другой системѣ.

Мы покажемъ, что существуютъ три пары такихъ взаимныхъ элементовъ, или же всѣ пары сопряженныхъ элементовъ взаимныя; тогда такое соотвѣтствiе называется *инволюцiоннымъ соотвѣтствiемъ* двухъ системъ (Involutorische Lage der Reciprocität).

Обозначимъ координаты точки P первой системы черезъ x_0, y_0. Уравненiе соотвѣтствующей ей прямой L другой системы имѣетъ видъ:

$$(l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1) X + (l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2) Y + l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3 = 0.$$

Разсматривая эту прямую, какъ принадлежащую первой системѣ, получимъ уравненiе:

$$(l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1) x + (l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2) y + l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3 = 0.$$

Соотвѣтствующая ей точка другой системы опредѣлится на основаніи § 333 при помощи уравненій:

$$\frac{l_1 X + l_2 Y + l_3}{l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1} = \frac{m_1 X + m_2 Y + m_3}{l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2} = \frac{n_1 X + n_2 Y + n_3}{l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3} = \rho,$$

гдѣ черезъ ρ означена общая величина этихъ отношеній. Для того, чтобы послѣднія уравненія опредѣлили ту же самую точку P, необходимо подставить въ нихъ вмѣсто X, Y величины x_0, y_0, для опредѣленія которыхъ и числа ρ получимъ три уравненія:

$$\left.\begin{aligned} l_1 x_0 + l_2 y_0 + l_3 &= \rho\,(l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1) \\ m_1 x_0 + m_2 y_0 + m_3 &= \rho\,(l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2) \\ n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 &= \rho\,(l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Исключая изъ этихъ трехъ уравненій x_0, y_0, получимъ слѣдующее кубическое уравненіе для ρ:

$$\begin{vmatrix} l_1(1-\rho), & l_2 - \rho m_1, & l_3 - n_1\rho \\ m_1 - l_2\rho, & m_2(1-\rho), & m_3 - n_2\rho \\ n_1 - l_3\rho, & n_2 - m_3\rho, & n_3(1-\rho) \end{vmatrix} = 0.$$

Послѣднее уравненіе даетъ для ρ три значенія: ρ_1, ρ_2, ρ_3. Каждому изъ этихъ значеній соотвѣтствуетъ своя пара взаимныхъ элементовъ.

Существуетъ одинъ случай, а именно: $m_1 = l_2$, $n_1 = l_3$, $n_2 = m_3$; тогда послѣднее уравненіе даетъ для ρ три корня, равныхъ единицѣ, послѣ подставки которыхъ въ уравненія (1) послѣднія обращаются въ тождества и оставляютъ координаты x_0, y_0 совершенно произвольными. Въ этомъ случаѣ получается сказанная инволюціонная зависимость. Основное коническое сѣченіе въ этомъ случаѣ обращается въ слѣдующее:

$$l_1 x^2{}_0 + 2m_1 x_0 y_0 + m_2 y^2{}_0 + 2n_1 x_0 + 2n_2 y_0 + n_3 = 0$$

(см. уравненіе (1) § 234), а уравненіе, выражающее соотвѣтствіе двухъ плоскостей обращается въ уравненіе поляры послѣдняго коническаго сѣченія:

$$(l_1 x + m_1 y + n_1)\,X + (m_1 x + m_2 y + n_2)\,Y + n_1 x + n_2 y + n_3 = 0.$$

Итакъ мы видимъ, что методъ взаимныхъ поляръ, служащій для преобразованія фигуръ, есть не что иное, какъ инволюціонный случай болѣе общаго однозначнаго соотвѣтствія (Reciprocität) точекъ двухъ плоскостей.

336. Не слѣдуетъ думать, что случай инволюціи есть случай особенный. Оказывается, что при помощи поступательнаго перемѣщенія и нѣкотораго вращенія одной изъ плоскостей, находящихся въ указанномъ соотвѣтствіи, можно привести эту плоскость къ инволюціонному совпаденію съ другой.

Для сказанной цѣли надо будетъ x и y въ уравненіи, выражающемъ законъ со-

отвѣтствія, замѣнить на $a + x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $b + x\sin\varphi + y\cos\varphi$. Тогда новое уравненіе соотвѣтствія будетъ имѣть видъ:

$$(L_1x + M_1y + N_1)\,X + (L_2x + M_2y + N_2)\,Y + L_3x + M_3y + N_3 = 0.$$

Двѣ координаты новаго начала a и b и уголъ φ надо будетъ опредѣлить изъ того условія, чтобы было $M_1 = L_2$, $N_1 = L_3$, $M_3 = N_2$.

337. Возвратимся къ методу взаимныхъ поляръ. Способъ этотъ даетъ возможность изъ одной геометрической теоремы получать другую ей соотвѣтствующую. Подобныя теоремы называются *коррелативными*. Примѣрами такихъ теоремъ могутъ служить слѣдующія:

I. Если двѣ вершины треугольника двигаются по даннымъ прямымъ, а стороны его проходятъ черезъ три точки, лежащія на одной прямой, то третья вершина описываетъ прямую. (См. зад. 6 стр. 56).

I. Если двѣ стороны треугольника вращаются около двухъ данныхъ точекъ, а вершины его перемѣщаются по тремъ прямымъ, проходящимъ черезъ одну точку, то третья сторона вращается около нѣкоторой точки.

II. Двѣ произвольныя точки и четыре точки прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ этихъ точекъ къ данному эллипсу, лежатъ на одной кривой второго порядка. (См. § 291).

II. Двѣ хорды эллипса и четыре касательныя къ нему въ концахъ этихъ хордъ, касаются нѣкоторой линіи второго порядка.

338. Докажемъ теперь двѣ весьма важныя коррелативныя теоремы: Паскаля и Бріаншона, которыя по справедливости можно назвать основными въ теоріи коническихъ сѣченій.

Теорема Паскаля (Hexagrammum mysticum). Противоположныя стороны: 12 и 45; 23 и 56; 34 и 61 (см. черт. 132, 133) шестиугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе, пересѣкаются въ трехъ точкахъ A, B, C, лежащихъ на одной прямой.

Пусть будутъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ уравненія сторонъ 12, 23, 34 и пусть $I = 0$ уравненіе прямой, соединяющей вершины 1 и 4. Кромѣ того, пусть уравненія $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ опредѣляютъ 45, 56, 61. Такъ какъ заданное коническое сѣченіе описано около двухъ четыреугольниковъ $(\alpha\,\beta\,\gamma\,I)$ и $(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,I,)$ то уравненіе его можетъ быть представлено въ двухъ слѣдующихъ видахъ:

$$l\beta I - k\alpha\gamma = 0 \text{ и } l_1\beta_1 I - k_1\alpha_1\gamma_1 = 0.$$

Послѣднія два уравненія тождественны. Вычитая второе уравненіе изъ перваго, получимъ тождество

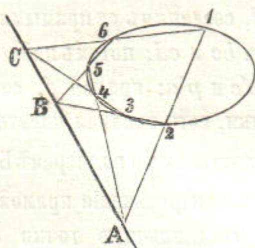
$$l\beta I - l\beta_1 I - (k\alpha\gamma - k_1\alpha_1\gamma_1) = 0.$$

Послѣднее тождество можетъ быть разбито на два равносильныхъ ура вненія

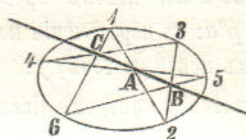
$$l\beta I - l_1\beta_1 I = 0, \tag{1}$$

$$k\alpha\gamma - k_1\alpha_1\gamma_1 = 0. \tag{2}$$

Уравненія (1) и (2) опредѣляютъ одно и то же геометрическое мѣсто. Это мѣсто состоитъ изъ двухъ прямыхъ $I = 0$, $l\beta - l_1\beta_1 = 0$. Тѣ же двѣ прямыя должно, очевидно, опредѣлять и уравненіе (2); но мы знаемъ, что это послѣднее уравненіе, если только оно опредѣляетъ двѣ прямыя, должно давать линіи, соединяющія точки встрѣчи прямыхъ α, γ съ прямыми α_1, γ_1. Но легко видѣть, что сказанныя двѣ



Черт. 132.



Черт. 133.

прямыя суть: $I = 0$ и прямая AC; слѣдовательно, прямая AC опредѣляется уравеніемъ (2), которое показываетъ, что она проходитъ черезъ точку B встрѣчи прямыхъ β и β_1, что и требовалось доказать.

Теоремѣ Паскаля соотвѣтствуетъ, какъ коррелативная,

Теорема Бріаншона. Діагонали шестиугольника, описаннаго около коническаго сѣченія, встрѣчаются въ одной точкѣ.

Здѣсь разумѣются, конечно, діагонали, соединяющія противоположныя вершины шестиугольника 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6.

339. Изъ теоремы Паскаля можетъ быть выведена вся теорія коническихъ сѣченій. Въ особенности замѣчательны ея приложенія къ построенію коническихъ сѣченій по точкамъ и по касательнымъ. Въ наиболѣе интересныхъ задачахъ это построеніе можетъ быть совершено при помощи одной линейки.

340. Если двѣ вершины вписаннаго шестиугольника совпадаютъ, то получается аналогичная теорема для пятиугольника, причемъ надо замѣнить пропавшую при совпаденіи вершинъ сторону касательною.

341. Сказанное въ предыдущемъ параграфѣ, на основаніи закона двойственности, относится къ коррелативной теоремѣ Бріаншона, причемъ шестиугольникъ при совпаденіи двухъ его сторонъ превращается въ описанный пятиугольникъ, за одну изъ вершинъ котораго придется принять точку касанія той стороны, въ которой совпали двѣ стороны шестиугольника.

342. Приведемъ рядъ основныхъ задачъ такого рода, рѣшаемыхъ при помощи одной только линейки.

Задачи на построеніе линій второго порядка по точкамъ и касательнымъ.

1) По даннымъ пяти точкамъ: a, b, c, d, e линіи 2-го порядка найти какую нибудь шестую точку этой линіи и построить касательную въ этой точкѣ.

Рѣш. Чрезъ пересѣченіе p прямыхъ ab и de проведемъ произвольную прямую l; найдемъ пересѣченія p' и p'' этой прямой съ прямыми bc и cd; потомъ проведемъ прямыя $p'e$ и $p''a$: въ пересѣченіи послѣднихъ получимъ искомую точку f.

(Доказательство по теоремѣ Паскаля).

Проведемъ прямую черезъ p' и пересѣченіе q прямыхъ bf и ed; замѣтимъ пересѣченіе r прямыхъ $p'q$ и cd; потомъ проведемъ rf; эта прямая есть касательная въ точкѣ f (см. § 340).

1) По даннымъ пяти касательнымъ: a, b, c, d, e линіи 2-го порядка построить шестую касательную къ этой линіи и найти точку касанія.

Рѣш. На прямой p, соединяющей вершины ab и de, возьмемъ произвольную точку l, соединимъ ее прямыми p' и p'' съ точками bc и cd; потомъ найдемъ пересѣченіе $p'e$ и $p''a$; прямая f, соединяющая эти точки, есть искомая касательная.

(Доказательство по теоремѣ Бріаншона).

Найдемъ пересѣченіе прямой p' съ прямою q, соединяющею точки bf и ed, и проведемъ прямую r черезъ точки $p'q$ и cd; потомъ замѣтимъ точку rf, эта точка есть точка касанія прямой f къ линіи 2-го порядка (см. § 341).

2) По даннымъ четыремъ точкамъ: a, b, c, d линіи 2-го порядка и касательной e въ одной изъ нихъ a, найти пятую точку линіи 2-го порядка и провести въ этой точкѣ касательную.

Рѣш. Опредѣлимъ пересѣченіе p данной касательной e съ прямою bc; проведемъ черезъ p произвольную прямую l; опредѣлимъ пересѣченіе p' прямыхъ l и cd и пересѣченіе p'' прямыхъ l и ad; потомъ проведемъ прямыя $p'a$ и $p''b$: въ пересѣченіи этихъ прямыхъ получимъ искомую точку f.

Замѣтимъ q, пересѣченіе $p'a$ съ bc; проведемъ прямую $p''q$; замѣтимъ пересѣченіе r прямыхъ $p''q$ и cd и проведемъ прямую rf; эта прямая есть касательная въ точкѣ f.

2) По даннымъ четыремъ прямымъ: a, b, c, d касательнымъ къ линіи 2-го порядка и точкѣ касанія e одной изъ нихъ a, найти пятую касательную и опредѣлить ея точку касанія.

Рѣш. Соединимъ прямою p данную точку касанія e стороны a съ точкою bc; возьмемъ на p произвольную точку l; соединимъ прямою p' точку l съ cd и прямою p'' точку l съ ad; потомъ опредѣлимъ точки $p'a$ и $p''b$; прямая, соединяющая эти точки, есть искомая касательная f.

Проведемъ прямую q черезъ точки $p'a$ и bc; замѣтимъ точку $p''q$, соединимъ прямою r точки $p''q$ и cd и замѣтимъ пересѣченіе r съ прямою f: это пересѣченіе есть точка касанія касательной f.

3) По даннымъ тремъ точкамъ a, b, c и двумъ касательнымъ d и e въ точкахъ a и b опредѣлить четвертую точку и касательную въ этой точкѣ.

Рѣш. Опредѣлимъ точку p пересѣченія данныхъ касательныхъ d и e; проведемъ черезъ p произвольную прямую l; замѣтимъ p', пересѣченіе l съ bc и p'', пересѣченіе l съ ac; потомъ проведемъ прямыя $p'a$ и $p''b$ и замѣтимъ ихъ пересѣченіе f: эта точка есть искомая.

Замѣтимъ пересѣченіе q прямыхъ $p'a$ и e и пересѣченіе r прямыхъ $p''b$ и d, проведемъ прямую qr; найдемъ пересѣченіе s прямыхъ qr и ab и проведемъ прямую sf: эта прямая есть касательная въ точкѣ f.

3) По даннымъ тремъ касательнымъ a, b, c и точкамъ d и e касанія прямыхъ a и b опредѣлить четвертую касательную и точку ея касанія.

Рѣш. Проведемъ прямую p черезъ данныя точки d и e; возьмемъ на p произвольную точку l; соединимъ прямою p' точки l и bc и прямою p'' точки l и ac; потомъ замѣтимъ точки $p'a$ и $p''b$ и проведемъ черезъ нихъ прямую f; эта прямая есть искомая касательная.

Соединимъ прямою q точки $p'a$ и e и прямою r точки $p''b$ и d; точку qr соединимъ прямою s съ точкою ab и замѣтимъ пересѣченіе s съ f: эта точка пересѣченія sf есть точка касанія на касательной f.

343. Изъ всего сказаннаго ясно, что съ наибольшимъ удобствомъ по методѣ взаимныхъ поляръ трактуются такъ называемыя проективныя свойства коническихъ сѣченій, выражаемыя теоремами о взаимномъ положеніи элементовъ фигуры, независимо отъ длинъ отрѣзковъ фигуры и величинъ угловъ, входящихъ въ фигуры. Теоремы же, выражающія зависимости между длинами отрѣзковъ или величинами угловъ, входящихъ въ фигуры, или же между тѣми и другими, выражаютъ такъ называемыя метрическія свойства фигуръ.

Примѣромъ проективной теоремы можетъ служить теорема Паскаля; къ метрическимъ же относятся, напримѣръ, теоремы Аполлонія.

344. Дадимъ теперь нѣсколько примѣровъ вывода теоремъ характера метрическаго.

За основное коническое сѣченіе примемъ кругъ:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Уравненіе поляры точки x_0, y_0 есть:

$$xx_0 + yy_0 = a^2.$$

Получается прямая линія, перпендикулярная къ прямой, соединяющей начало координатъ съ заданной точкой. Отсюда мы замѣчаемъ такую теорему:

Уголъ, подъ которымъ видны двѣ заданныя точки M_1, M_2 изъ центра основного круга, равенъ углу между полярами P_1, P_2 этихъ точекъ.

345. Докажемъ слѣдующую теорему, что полярою круга относительно основ-

ного заданнаго круга будетъ коническое сѣченіе, имѣющее директрисою поляру центра заданнаго круга, а фокусомъ—центръ основного круга.

Возьмемъ уравненіе основного круга въ видѣ:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Найдемъ теперь уравненіе поляры круга

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Уравненіе касательной къ этому кругу имѣетъ видъ:

$$(x - \alpha)(x_0 - \alpha) + (y - \beta)(y_0 - \beta) = r^2,$$

гдѣ x_0, y_0—координаты точки касанія.

Обозначимъ координаты полюса послѣдней прямой черезъ ξ и η; нужно будетъ сравнить это послѣднее уравненіе съ уравненіемъ поляры

$$x\xi + y\eta = a^2.$$

Получаемъ пропорцію:

$$\frac{x_0 - \alpha}{\xi} = \frac{y_0 - \beta}{\eta} = \frac{r^2 + \alpha(x_0 - \alpha) + \beta(y_0 - \beta)}{a^2}.$$

Изъ послѣдней пропорціи получаемъ

$$\frac{x_0 - \alpha}{\xi} = \frac{y_0 - \beta}{\eta} = \frac{r^2}{a^2 - \alpha\xi - \beta\eta};$$

опредѣляя отсюда $x_0 - \alpha$ и $y_0 - \beta$ и подставляя въ уравненіе круга: $(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = r^2$, получимъ

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{r^2}(a^2 - \alpha\xi - \beta\eta)^2.$$

Послѣднее уравненіе, на основаніи соображеній § 298, показываетъ, что взаимная кривая для круга есть коническое сѣченіе, имѣющее фокусомъ центръ основного круга, принятый нами за начало координатъ, а директрисой—прямую:

$$\alpha\xi + \beta\eta = a^2,$$

т. е. поляру центра заданнаго круга:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = b^2.$$

Только что доказанная теорема можетъ быть приложена къ выводу ряда коррелативныхъ свойствъ коническихъ сѣченій.

Двѣ касательныя къ кругу составляютъ съ ихъ хордою прикосновенія равные углы.

Линія, соединяющая фокусъ съ точкою пересѣченія двухъ касательныхъ, дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусами векторами точекъ прикосновенія.

Касательная къ кругу перпендикулярна къ линiи, соединяющей центръ съ точкою касанiя.

Точка на коническомъ сѣченiи и точка, въ которой касательная черезъ нее пересѣкаетъ директрису, стягиваетъ прямой уголъ въ фокусѣ.

Какая нибудь прямая перпендикулярна къ прямой, соединяющей ея полюсъ съ центромъ круга.

Какая нибудь точка и пересѣченiе ея поляры съ директрисой стягиваетъ прямой уголъ въ фокусѣ.

Мѣсто пересѣченiя касательныхъ къ кругу, составляющихъ данный уголъ, есть концентрическiй кругъ.

Мѣсто пересѣченiя касательныхъ, коихъ хорда прикосновенiя стягиваетъ данный уголъ въ фокусѣ, есть коническое сѣченiе, имѣющее тотъ же фокусъ и туже директрису.

346. Взаимныя поляры относительно круга даютъ возможность выводить теоремы метрическаго характера также относительно длинъ отрѣзковъ, что основывается на теоремѣ:

Произведенiе разстоянiй центра основного круга, называемаго началомъ, до точки M и до ея поляры P есть величина постоянная, равная квадрату радiуса.

Изъ этой теоремы легко вывести разнообразныя коррелативныя теоремы:

Сумма или разность перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ начала на пару параллельныхъ касательныхъ къ кругу, постоянно равна дiаметру круга.

Сумма обратныхъ величинъ отрѣзковъ фокусной хорды есть величина постоянная.

Прямоугольникъ изъ отрѣзковъ какой нибудь хорды въ кругѣ, проведенной черезъ начало, есть величина постоянная.

Прямоугольникъ изъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокуса на двѣ параллельныя касательныя есть величина постоянная.

Проективныя свойства коническихъ сѣченiй.

347. Мы видѣли уже, что само названiе коническихъ сѣченiй получаютъ линiи второго порядка вслѣдствiе того, что онѣ являются въ сѣченiи плоскости нѣкоторымъ прямымъ круговымъ конусомъ; такъ что линiи второго порядка можно разсматривать, какъ перспективу круга на плоскости. Въ этомъ случаѣ глазъ наблюдателя помѣщается въ точку S (см. черт. 94, 95, 96); плоскость P есть плоскость перспективы, а разсматриваемый конусъ есть такъ называемый проектирующiй конусъ заданнаго круга, служащаго этому конусу основанiемъ.

Если точка глаза S уходитъ въ безконечность, то конусъ обращается въ цилиндръ, коническое сѣченiе въ плоскости P, служащее перспективою круга ab

(см. чертежи 95, 96), обращается въ коническое сѣченіе, которое называется проекціею круга на плоскости P. Проектирующій конусъ обращается въ прямой круговой цилиндръ и коническое сѣченіе будетъ эллипсомъ, лежащимъ въ плоскости P, пересѣкающей этотъ круговой цилиндръ.

348. Возьмемъ нѣкоторую кривую линію S въ пространствѣ. Черезъ каждую изъ ея точекъ проведемъ прямую, параллельную нѣкоторому данному направленію. Совокупность этихъ прямыхъ представитъ нѣкоторую цилиндрическую поверхность, проходящую черезъ заданную кривую S. Пересѣчемъ затѣмъ полученную цилиндрическую поверхность нѣкоторою плоскостью P; тогда въ этой послѣдней плоскости, въ сѣченіи, образуется нѣкоторая кривая линія Σ, называемая *проекціею* кривой S на плоскости P. Разсматриваемый цилиндръ называется *проектирующимъ цилиндромъ*, а плоскость P называется *плоскостью проекцій*.

Если плоскость проекцій перпендикулярна къ направленію образующихъ проектирующаго цилиндра, т. е. перпендикулярна къ такъ называемому *направленію проектированія*, то проекція называется *прямоугольною*. Въ остальныхъ же случаяхъ проекція называется *косоугольною*.

349. Указанный способъ проектированія кривыхъ на плоскость есть частный случай болѣе общаго способа проектированія, называемаго *перспективою*. Возьмемъ кривую S и каждую изъ ея точекъ соединимъ съ нѣкоторою точкою M, называемою *точкою глаза* (Point d'oeil). Всѣ такія прямыя образуютъ конусъ, имѣющій вершину въ точкѣ M и проходящій черезъ точки кривой S. Если полученный конусъ мы пересѣчемъ нѣкоторою плоскостью P, то въ сѣченіи получимъ кривую Σ, называемую *перспективою* кривой S. Разсматриваемый конусъ называется *проектирующимъ конусомъ*.

350. Всякую линію второго порядка (исключая случай двухъ прямыхъ) можно помѣстить на круговой конусъ, т. е. разсматривать, какъ пересѣченіе этого конуса нѣкоторою плоскостью.

Это замѣчаніе есть теорема обратная той, которую мы доказывали въ §§ 231, 232, 233. Тамъ мы доказывали, что въ сѣченіи кругового конуса какою нибудь плоскостью получается кривая второго порядка. Теперь же надо доказать, что всякая кривая второго порядка можетъ быть такъ получена.

Разсматривая внимательно черт. 95 и 94 мы замѣчаемъ, что для того, чтобы получить эллипсъ или гиперболу съ даннымъ эксцентриситетомъ, нужно пересѣчь конусъ плоскостью подъ извѣстнымъ, опредѣленнымъ вполнѣ для каждаго эксцентриситета, угломъ, ибо разстояніе между фокусами FF_1 равняется разстоянію OO_1 центровъ вписанныхъ шаровъ, умноженному на *cos* остраго угла, образованнаго осью конуса съ сѣкущею плоскостью.

Если мы будемъ передвигать сѣкущую плоскость параллельно самой себѣ, то эксцентриситетъ сѣченія не будетъ мѣняться, ибо всегда разстояніе центровъ шаровъ OO_1 будетъ измѣняться пропорціонально большой оси AA_1.

Чтобы опредѣлить при заданномъ эксцентриситетѣ вполнѣ коническое сѣченіе необходимо указать еще большую ось. Остается, слѣдовательно, рѣшить задачу уже вполнѣ элементарную: провести сѣкущую плоскость на такомъ разстояніи отъ вершины конуса, чтобы величина большой оси AA_1 получаемаго сѣченія вышла заданной длины.

Что касается параболы, то параметръ ея зависитъ отъ разстоянія вершины ея A до вершины конуса S (см. черт. 96).

351. Итакъ мы видимъ, что двѣ выбранныя произвольно кривыя второго порядка могутъ быть помѣщены на одномъ и томъ же прямомъ круговомъ конусѣ и, слѣдовательно, каждая изъ нихъ можетъ быть разсматриваема, какъ перспектива другой.

Проективными свойствами коническихъ сѣченій будутъ называться свойства, общія всѣмъ коническимъ сѣченіямъ, выводимымъ изъ какого нибудь одного, напримѣръ, круга, проектированіемъ при помощи перспективы. Къ такимъ теоремамъ принадлежатъ, напримѣръ, теоремы Паскаля и Бріаншона, которыя можно бы было доказать предварительно для круга, а затѣмъ ясно, что онѣ распространяются и на всякое другое коническое сѣченіе, какъ перспективу круга, ибо въ перспективѣ всякая вершина шестиугольника, вписаннаго въ кругъ, даетъ вершину новаго шестиугольника, представляющаго перспективу перваго и вписаннаго въ коническое сѣченіе—перспективу круга. Каждая касательная къ кругу въ теоремѣ Бріаншона обращается въ касательную въ соотвѣтствующей точкѣ перспективнаго коническаго сѣченія.

Если три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ M, то и три перспективныя прямыя пересѣкутся въ точкѣ M_1, представляющей перспективу точки M. Изъ всего сказаннаго явствуетъ, что разъ теоремы Паскаля и Бріаншона доказаны для круга, или, все равно, для какого нибудь опредѣленнаго коническаго сѣченія, они будутъ справедливы и въ перспективѣ, дающей всякое другое коническое сѣченіе.

352. Способность сохраняться при проектированіи при помощи перспективы отличаетъ проективныя свойства коническихъ сѣченій отъ ихъ такъ называемыхъ метрическихъ свойствъ.

Возьмемъ въ пространствѣ двѣ плоскости, все равно, параллельныя или пересѣкающіяся, и гдѣ нибудь внѣ ихъ точку S. Пусть одна изъ плоскостей будетъ плоскостью заданной фигуры, образованной при помощи или конечнаго числа точекъ или безчисленнаго множества такихъ точекъ, образующихъ цѣлыя линіи. При помощи точки S, какъ точки глаза, для заданной фигуры найдемъ перспективу на другой плоскости. Тогда каждой точкѣ заданной фигуры будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленная точка перспективы и наоборотъ, каждой точкѣ перспективы будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленная точка заданной фигуры. Точно также каждой прямой одной фигуры будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленная прямая другой.

353. Указанное соотвѣтствіе между точками двухъ перспективныхъ фигуръ есть частный случай болѣе общей такъ называемой *гомографической зависимости* между точками двухъ плоскостей (Figures projectives ou homografiques. Collineare Verwandschaft).

354. Назовемъ черезъ x, y координаты точки, лежащей на одной плоскости, а X, Y координаты нѣкоторой точки на другой плоскости; тогда, если бы мы захотѣли, чтобы каждой точкѣ одной плоскости соотвѣтствовала вполнѣ опредѣленная точка другой, и обратно, то необходимо координаты X, Y считать нѣкоторыми однозначными функціями отъ координатъ x, y и обратно, координаты x, y должны однозначно выражаться черезъ X, Y.

Двѣ плоскости мы будемъ называть *гомографическими*, если каждой прямой одной изъ нихъ будетъ соотвѣтствовать прямая, составленная изъ соотвѣтственныхъ точекъ.

Аналитически вопросъ указанія гомографической зависимости двухъ плоскостей приводится къ слѣдующей задачѣ:

Найти двѣ функціи X, Y независимыхъ перемѣнныхъ, независимыя другъ отъ друга подъ тѣмъ условіемъ, чтобы всякому линейному уравненію $lx+my+n=0$ между x, y соотвѣтствовало линейное же уравненіе $LX+MY+N=0$*).

Рѣшеніемъ послѣдней задачи оказываются слѣдующія формулы, выражающія гомографическую зависимость между двумя плоскостями:

$$X=\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma},\quad Y=\frac{Ax+By+C}{\alpha x+\beta y+\gamma}, \qquad (*)$$

гдѣ коэффиціенты совершенно произвольны.

Одинъ изъ коэффиціентовъ, напримѣръ γ, можно положить равнымъ единицѣ, ибо на него можно раздѣлить всѣ коэффиціенты. Получается такимъ образомъ восемь произвольныхъ коэффиціентовъ, заданіемъ которыхъ указывается гомографическая зависимость двухъ плоскостей.

Отсюда мы замѣчаемъ, что для заданія гомографіи достаточно указать четыре пары соотвѣтственныхъ точекъ. Можно указать четыре совершенно произвольныя точки на одной плоскости и заставить имъ соотвѣтствовать четыре произвольныя точки другой плоскости. Получимъ восемь уравненій, достаточныхъ для опредѣленія восьми коэффиціентовъ.

355. Относительно двухъ гомографическихъ плоскостей можно доказать такую общую теорему:

Всякія двѣ гомографическія плоскости перемѣщеніемъ въ пространствѣ могутъ быть приведены въ перспективное положеніе, причемъ каждая точка одной плоскости будетъ перспективою соотвѣтственной точки другой.

---

*) Эта задача рѣшена академикомъ А. Марковымъ въ статьѣ: «Къ вопросу о черченіи картъ». С.-Петербургъ. 1888 г., а также: *Chatenet*. Nouvelles Annales, 1886.

356. Прежде чѣмъ разсматривать общую высказанную нами теорему, докажемъ, что двѣ гомографическія плоскости наложеніемъ одна на другую могутъ быть приведены въ такъ называемое *гомологическое положеніе* (Figures homologiques. Collineare Lage).

357. Гомологическая зависимость двухъ плоскостей выражается уравненіями

$$\Xi = \frac{\xi}{p\xi + q\eta + r}, \quad \Upsilon = \frac{\eta}{p\xi + q\eta + r}, \qquad (^*)$$

гдѣ ξ и η суть координаты нѣкоторой точки относительно нѣкоторой прямоугольной системы координатъ, а Ξ и Υ координаты точки, принадлежащей другой плоскости, совмѣщенной съ плоскостью $\xi\eta$, причемъ онѣ взяты относительно той же системы координатъ, что и ξ, η.

358. Точки съ координатами (Ξ, Υ) и (ξ, η) въ двухъ гомологическихъ системахъ будемъ называть *соотвѣтственными*.

Покажемъ, что всякая пара соотвѣтственныхъ точекъ лежитъ на прямой проходящей черезъ начало координатъ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ условій (*), выражающихъ гомологическую зависимость, можетъ быть выведено уравненіе, доказывающее справедливость сказаннаго:

$$\frac{\Upsilon}{\Xi} = \frac{\eta}{\xi}.$$

Начало координатъ является точкой, въ которой сходятся прямыя, соединяющія соотвѣтственные элементы двухъ гомологическихъ фигуръ, а потому начало координатъ называется *центромъ гомологіи*.

359. Гомологическія фигуры обращаются въ гомотетическія при $p = q = 0$ и начало координатъ въ этомъ случаѣ называется *центромъ подобія* (см. § 276).

360. *Осью гомологіи* называется геометрическое мѣсто точекъ, совпадающихъ съ имъ соотвѣтственными, а потому мы получимъ ея уравненіе, если положимъ $\Xi = \xi$, $\Upsilon = \eta$ въ уравненіяхъ (*). Искомое уравненіе оси гомологіи будетъ:

$$p\xi + q\eta + r - 1 = 0.$$

Оказывается, что ось гомологіи параллельна прямой $p\xi + q\eta + r = 0$, для которой соотвѣтственная прямая другой системы лежитъ на безконечности.

361. Каждой прямой одной изъ двухъ гомологическихъ системъ соотвѣтствуетъ опредѣленная прямая другой. Покажемъ, что каждая пара соотвѣтственныхъ прямыхъ встрѣчается въ точкѣ, лежащей на оси гомологіи.

Возьмемъ уравненіе какой нибудь прямой

$$a\xi + b\eta + c = 0. \qquad (1)$$

Уравненіе соотвѣтственной прямой будетъ

$$a\Xi + b\Upsilon + c = 0. \qquad (2)$$

Уравненіе (2) можетъ быть, на основаніи условій гомологіи (*), переписано въ видѣ:

$$a\xi + b\eta + c(p\xi + q\eta + r) = 0. \qquad (2')$$

Вычитая изъ уравненія (2′) уравненіе (1), получимъ:

$$c(p\xi + q\eta + r - 1) = 0.$$

362. Гомотетическія фигуры суть частные случаи фигуръ гомологическихъ, коихъ ось гомологіи лежитъ на безконечности, ибо въ этомъ случаѣ $p = q = 0$. (Подобіе. Aenlichkeit).

363. Покажемъ теперь, что всякія двѣ гомографическія плоскости могутъ быть, передвиженіемъ другъ по другу, приведены въ гомологическое положеніе. Для этой цѣли преобразуемъ координатныя системы въ одной и другой плоскости, перенеся въ одной изъ нихъ начало координатъ въ точку (λ, μ), а въ другой въ точку (l, m) и кромѣ того, во второй плоскости повернемъ систему на нѣкоторый уголъ θ. Тогда формулы, выражающія гомографическую зависимость,

$$X = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad Y = \frac{Ax + By + C}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

преобразуются по формуламъ:

$$X = \lambda + \Xi, \quad Y = \mu + \Upsilon,$$

$$x = l + \xi \cos\theta - \eta \sin\theta, \quad y = m + \xi \sin\theta + \eta \cos\theta.$$

Подставляя, получимъ:

$$\Xi = \frac{\Pi\xi + \mathrm{K}\eta + \mathrm{P}}{p\xi + q\eta + r}, \quad \Upsilon = \frac{P\xi + Q\eta + R}{p\xi + q\eta + r},$$

гдѣ $\Pi = (a - \lambda\alpha)\cos\theta + (b - \lambda\beta)\sin\theta$;

$\mathrm{K} = -(a - \lambda\alpha)\sin\theta + (b - \lambda\beta)\cos\theta$;

$\mathrm{P} = (a - \lambda\alpha)\,l + (b - \lambda\beta)\,m + c - \lambda\gamma$.

$P = (A - \mu\alpha)\cos\theta + (B - \mu\beta)\sin\theta$;

$Q = -(A - \mu\alpha)\sin\theta + (B - \mu\beta)\cos\theta$;

$R = (A - \mu\alpha)\,l + (B - \mu\beta)\,m + C - \mu\gamma$.

Чтобы получалась гомологія, необходимо положить $\Pi = Q$, $\mathrm{K} = 0$, $\mathrm{P} = 0$, $P = 0$, $R = 0$, что даетъ пять уравненій для опредѣленія пяти величинъ; $\lambda, \mu, l, m, \theta$.

Сказанныя уравненія могутъ быть представлены въ такомъ видѣ:

$$tg\,\theta = \frac{b - \lambda\beta}{a - \lambda\alpha} = -\frac{A - \mu\alpha}{B - \mu\beta} = \frac{B - \mu\beta - (a - \lambda\alpha)}{b - \lambda\beta + (A - \mu\alpha)} = k.$$

Отсюда получаемъ:

$$b - \lambda\beta = k(a - \lambda\alpha); \quad \lambda = \frac{b - ka}{\beta - k\alpha}. \tag{1}$$

$$-A + \mu\alpha = k(B - \mu\beta); \quad \mu = \frac{A + kB}{\alpha + k\beta}. \tag{2}$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$B - \mu\beta - (a - \lambda\alpha) = k(b - \lambda\beta) + k(A - \mu\alpha),$$

но принимая во вниманіе (1) и (2), получимъ:

$$B - \mu\beta - (a - \lambda\alpha) = k^2(a - \lambda\alpha) - k^2(B - \mu\beta),$$

$$(1 + k^2)(B - \mu\beta) - (1 + k^2)(a - \lambda\alpha) = 0,$$

но $1 + k^2$ не равно нулю, слѣдовательно,

$$B - \mu\beta - a + \lambda\alpha = 0.$$

Подставляя, получимъ:

$$B - \beta\frac{A + kB}{\alpha + k\beta} - a + \alpha\frac{b - ka}{\beta - k\alpha} = 0,$$

откуда

$$k = \frac{(B\alpha - A\beta)\beta + (\alpha b - \beta a)\alpha}{\alpha(B\alpha - A\beta) - \beta(\alpha b - \beta a)}.$$

Подставляя полученную величину k въ (1) и (2), получимъ для λ и μ выраженія

$$\lambda = \frac{A\beta - B\alpha + b\beta + a\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \mu = \frac{A\alpha + B\beta + \alpha b - \beta a}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

По этимъ выраженіямъ можно опредѣлить l и m при помощи уравненія $P = 0$ и $R = 0$, если только эти послѣднія можно рѣшить относительно l и m. Въ этомъ случаѣ не должно обращаться въ нуль выраженіе:

$$(a - \lambda\alpha)(B - \mu\beta) - (b - \lambda\beta)(A - \mu\alpha),$$

которое можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$\frac{\alpha^2(b^2 + B^2) - 2\alpha\beta(ab + AB) + \beta^2(a^2 + A^2)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Числитель послѣдняго выраженія можетъ быть представленъ въ такомъ видѣ:

$$\frac{[\alpha(b^2 + B^2) - \beta(ab + AB)]^2 + (aB - bA)^2\beta^2}{b^2 + B^2}.$$

Послѣднее выраженіе всегда положительное и можетъ обратиться въ нуль, если $aB - bA = 0$, $\alpha b - \beta a = 0$. Этотъ случай отбрасываемъ, какъ недающій гомографической зависимости.

Уголъ θ опредѣляется изъ уравненія: $tg\theta = k$.

Кромѣ указаннаго исключительнаго случая придется исключить также случай $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

364. При $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ гомографическая зависимость выражается уравненіями:

$$X = ax + by + c, \qquad Y = Ax + By + C.$$

Если мы въ обѣихъ гомографическихъ системахъ сдѣлаемъ преобразованіе координатъ, то условія гомографической зависимости останутся тѣ же самыя, только коэффиціенты будутъ другіе.

Если коэффиціенты удовлетворяютъ условіямъ:

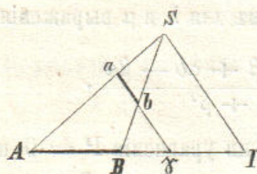
$$\frac{a-1}{A} = \frac{b}{B-1} = \frac{c}{C},$$

то гомографія обращается въ частный случай гомологіи (Affinität), когда центръ ея лежитъ на безконечности, а ось имѣетъ уравненіе:

$$(a-1)\,x + by + c = 0.$$

Въ этомъ случаѣ прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки плоскости, параллельны между собою.

Итакъ мы видимъ, что справедливо высказанное въ § 356 замѣчаніе о возможности приведенія двухъ гомографическихъ плоскостей въ гомологическое положеніе наложеніемъ одной плоскости на другую.



Черт. 134.

365. Покажемъ теперь, что двѣ гомологическія фигуры поворотомъ плоскости одной изъ нихъ на нѣкоторый произвольный уголъ около оси гомологіи могутъ быть приведены въ перспективное положеніе.

Докажемъ предварительно такую лемму:

Лемма. Если взять на одной прямой двѣ точки A, B, на другой двѣ точки a, b (см. черт. 134), провести прямыя Aa, Bb, пересѣкающіяся въ точкѣ S, и вращать вторую прямую ab около ея точки пересѣченія γ съ первой AB, то точка S мѣняетъ свое положеніе и тогда:

1) прямая, проведенная черезъ точку S параллельно прямой ab, встрѣчаетъ во всякомъ своемъ положеніи прямую AB въ одной и той же точкѣ I;

2) точка S описываетъ кругъ, центръ котораго есть точка I.

Въ самомъ дѣлѣ, не смотря на то, что линія ab вращается около точки γ, разстоянія a, b отъ γ не мѣняются и точку S можно разсматривать въ каждомъ ея положеніи какъ вершину пучка, которымъ прямыя AB, ab дѣлятся гомографически, причемъ A соотвѣтствуетъ a, B—b и γ самой себѣ. Мы видѣли уже въ § 66, что заданіе трехъ паръ соотвѣтственныхъ элементовъ опредѣляетъ гомографическую зависимость двухъ рядовъ точекъ вполнѣ; отсюда ясно, что точка I, какъ соотвѣт-

ствующая безконечно далекой точкѣ прямой ab, должна занимать на прямой AB вполнѣ опредѣленное положеніе по отношенію къ точкамъ A, B, γ и, слѣдовательно, она не должна мѣнять своего положенія при вращеніи прямой ab.

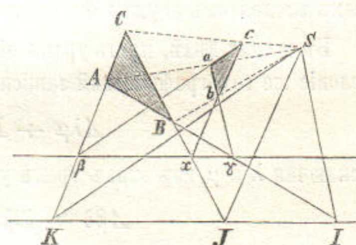
Что же касается второй части леммы, то изъ подобныхъ треугольниковъ имѣемъ:

$$SI = \frac{BI.\, b\gamma}{B\gamma}.$$

Это значеніе SI постоянное, слѣдовательно, точка S описываетъ кругъ, имѣющій центромъ точку I.

366. Доказанную лемму можно обобщить, разсматривая случай, когда прямая ab, вращаясь вокругъ точки γ, проходитъ въ разныхъ плоскостяхъ. Фигура, разсматриваемая въ предыдущемъ параграфѣ можетъ быть построена въ каждой изъ этихъ плоскостей, а потому SI сохранитъ постоянно свою величину и точка S опишетъ шаръ, имѣющій центромъ точку I.

367. Если повернуть плоскость одного изъ двухъ гомологическихъ треугольниковъ около оси гомологіи, то прямыя, соединяющія попарно ихъ соотвѣтственныя вершины, пересѣкаются въ одной точкѣ и эта точка, мѣняя свое положеніе, описываетъ кругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ оси гомологіи (см. черт. 135).



Черт. 135.

Въ самомъ дѣлѣ, при вращеніи треугольника acb около прямой $\alpha\beta$ прямыя AB, ab, пересѣкающіяся въ γ, находятся въ одной плоскости и слѣдовательно прямыя Aa, Bb пересѣкаются, ибо онѣ лежатъ въ этой плоскости. Равнымъ образомъ прямая Aa встрѣчаетъ прямую Cc, а Cc прямую Bb. Эти три прямыя не лежатъ въ одной плоскости, слѣдовательно онѣ пересѣкаются въ одной точкѣ S.

Проведемъ черезъ эту точку прямыя, параллельныя тремъ сторонамъ треугольника abc; эти прямыя, находящіяся въ плоскости, параллельной плоскости треугольника, встрѣтятъ стороны другого треугольника ABC, неподвижнаго, въ точкахъ I, J, K, лежащихъ на прямой, параллельной оси гомологіи $\alpha\beta\gamma$, ибо эта ось есть линія пересѣченія плоскости треугольника ABC съ плоскостью треугольника abc, параллельной плоскости, проходящей черезъ точку S. На основаніи доказанной леммы эти три точки останутся неподвижными и будутъ центрами трехъ шаровъ, по которымъ будетъ двигаться точка S. Слѣдовательно эта точка опишетъ кругъ — общую линію пересѣченія этихъ трехъ шаровъ; кромѣ того, такъ какъ ихъ центры лежатъ на прямой IJK, то на этой же прямой будетъ находиться центръ этого круга, плоскость котораго будетъ перпендикулярна къ IJK, равно какъ и къ параллельной ей $\alpha\beta\gamma$.

Если три прямыя Aa, Bb, Cc пересѣкаются при всякомъ положеніи въ одной точкѣ S пространства, то оба треугольника всегда представляютъ перспективу одинъ другою, причемъ точка S есть точка глаза.

Итакъ мы видимъ, что двѣ гомографическія плоскости могутъ быть на безчисленное множество маneровъ приведены въ такъ называемое перспективное положеніе.

368. Представимъ себѣ, что у насъ двѣ гомографическія плоскости наложены одна на другую какъ нибудь (не въ гомологическомъ положеніи). Тогда каждому прямолинейному ряду точекъ одной плоскости соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленный прямолинейный рядъ точекъ другой плоскости, а также каждому пучку лучей первой плоскости, имѣющему центромъ нѣкоторую точку первой плоскости, будетъ соотвѣтствовать опредѣленный пучекъ другой плоскости. Такіе ряды точекъ и пучки будемъ называть *соотвѣтственными*.

Легко убѣдиться, что соотвѣтственные ряды точекъ и пучки двухъ гомографическихъ плоскостей находятся въ гомографической зависимости въ томъ смыслѣ, какъ мы это опредѣляли въ § 66.

369. Покажемъ теперь, что геометрическое мѣсто точекъ встрѣчи соотвѣтственныхъ элементовъ двухъ гомографическихъ пучковъ есть коническое сѣченіе.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть уравненія двухъ пучковъ будутъ: $\beta-\lambda\alpha=0$, $\delta-\mu\gamma=0$; условіе же гомографической зависимости пусть будетъ:

$$A\lambda\mu+B\lambda+C\mu+D=0.$$

Исключая λ и μ изъ этихъ трехъ уравненій, получимъ уравненіе:

$$A\beta\delta+B\beta\gamma+C\delta\alpha+D\alpha\gamma=0. \tag{1}$$

α, β, γ, δ суть линейныя функціи x и y, а потому послѣднее уравненіе (1) опредѣляетъ нѣкоторое коническое сѣченіе, которое и есть искомое геометрическое мѣсто точекъ встрѣчи соотвѣтственныхъ элементовъ.

Уравненіе (1) показываетъ, что коническое сѣченіе, имъ опредѣляемое, проходитъ черезъ точки ($\alpha=0$, $\beta=0$), ($\gamma=0$, $\delta=0$), т. е. черезъ центры заданныхъ пучковъ.

370. Легко убѣдиться въ справедливости теоремы коррелативной:

Коническое сѣченіе можно разсматривать какъ обертку прямыхъ линій, соединяющихъ соотвѣтственные элементы двухъ гомографическихъ рядовъ точекъ.

371. Прежде чѣмъ доказать эту теорему, надо замѣтить, какимъ образомъ по уравненію кривой въ касательныхъ координатахъ написать уравненіе этой кривой въ декартовыхъ.

Кривая линія, опредѣляемая уравненіемъ: $f(a, b)=0$, касается прямыхъ: $y=ax+b$, линейныя координаты которыхъ a и b удовлетворяютъ этому уравненію и, слѣдовательно, какъ мы видѣли, кривая есть такъ называемая *обертка* или *огибающая* прямыхъ: $y=ax+b$.

Общій способъ нахожденія огибающихъ излагается въ дифференціальномъ исчисленіи, здѣсь же мы ограничимся случаемъ уравненій второго порядка, который можетъ быть трактованъ элементарно.

Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія въ трилинейныхъ координатахъ α, β, γ въ такомъ видѣ: $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$. Точку, лежащую на этомъ коническомъ сѣченіи, можно опредѣлять частнымъ значеніемъ нѣкотораго независимаго перемѣннаго μ. Въ самомъ дѣлѣ, трилинейныя координаты: $\alpha = \mu$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{1}{\mu}$ удовлетворяютъ заданному уравненію коническаго сѣченія. Двѣ прямыя $\alpha = \mu\beta$ и $\gamma = \frac{1}{\mu}\beta$ встрѣчаются, слѣдовательно, на коническомъ сѣченіи. Возьмемъ двѣ точки: μ_0 и μ_1; составимъ уравненіе прямой линіи, проходящей черезъ эти двѣ точки. Пусть уравненіе искомой прямой въ трилинейныхъ координатахъ будетъ:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0;$$

выражая условія того, что эта прямая проходитъ черезъ точки μ_0, μ_1, получимъ:

$$l\mu_0 + m + \frac{n}{\mu_0} = 0, \qquad l\mu_1 + m + \frac{n}{\mu_1} = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{l}{1} = \frac{m}{-(\mu_0 + \mu_1)} = \frac{n}{\mu_0\,\mu_1}.$$

Уравненіе хорды, слѣдовательно, будетъ:

$$\alpha - (\mu_0 + \mu_1)\,\beta + \mu_0\mu_1\,\gamma = 0.$$

Сближая точки, т. е. полагая: $\mu_0 = \mu_1 = \mu$, получимъ касательную:

$$\alpha - 2\mu\beta + \mu^2\gamma = 0,$$

соотвѣтствующую точкѣ μ.

Итакъ мы видимъ, что обертка прямыхъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ:

$$\alpha - 2\mu\beta + \mu^2\gamma = 0,$$

есть коническое сѣченіе: $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$.

Покажемъ, что линія, выраженная уравненіемъ:

$$L - 2\mu M + \mu^2 N = 0,$$

всегда касается кривой: $LN - M^2 = 0$, даже въ томъ случаѣ, когда L, M, N не суть линейныя функціи x, y. Уравненіе: $L - (\mu_0 + \mu_1) M + \mu_0\mu_1 N = 0$, удовлетворяясь координатами точекъ: $(L - M\mu_0 = 0,\quad M\mu_0 - N = 0)$, $(L - M\mu_1 = 0, M\mu_1 - N = 0)$, будетъ уравненіемъ кривой, проходящей черезъ точки, въ которыхъ кривыя: $L - M\mu_0 = 0$, $L - M\mu_1 = 0$ пересѣкаютъ кривую $LN - M^2 = 0$.

Если $\mu_0 = \mu_1 = \mu$, то очевидно, что кривая

$$L - 2\mu M + \mu^2 N = 0$$

касается кривой $LN - M^2 = 0$ въ точкахъ, въ которыхъ $L - \mu M = 0$ ее пересѣкаетъ.

372. Обращаемся теперь къ доказательству теоремы, высказанной въ § 370. На основаніи закона двойственности мы замѣчаемъ, что для вывода уравненія искомой обертки въ линейныхъ координатахъ необходимо произвести разсужденія аналогичныя тѣмъ, которыя приведены въ § 369 и сдѣлать выкладки буквально тождественныя. Въ результатѣ получится уравненіе между линейными координатами касательной къ искомой оберткѣ. Это уравненіе будетъ второй степени, вида:

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F = 0,$$

гдѣ a и b суть коэффиціенты уравненія прямой: $y = ax + b$.

373. Исключая b, получаемъ уравненіе:

$$a^2 (A - 2Bx + Cx^2) + 2a (D - Ex + By - Cyx) + Cy^2 + 2Ey + F = 0.$$

Искомая обертка, согласно § 371, имѣетъ уравненіе:

$$(A - 2Bx + Cx^2)(Cy^2 + 2Ey + F) - (D - Ex + By - Cxy)^2 = 0.$$

Раскрывая въ этомъ уравненіи скобки, мы замѣчаемъ, что члены третьей и четвертой степени пропадаютъ и остается уравненіе второй степени, что мы уже видѣли въ § 328. Итакъ мы видимъ, что, дѣйствительно, коническое сѣченіе есть обертка прямыхъ, соединяющихъ соотвѣтственные элементы двухъ гомографическихъ рядовъ точекъ, что и требовалось доказать.

Легко показать, что два заданныхъ гомографическихъ прямолинейныхъ ряда точекъ касаются полученнаго огибающаго коническаго сѣченія.

374. Изъ доказанныхъ только что общихъ теоремъ слѣдуютъ, какъ непосредственныя, слѣдствія извѣстные способы образованія коническихъ сѣченій: Ньютона и Маклорена (Брэкенриджа).

375. *Теорема Ньютона.* Два угла постоянной величины вращаются около вершинъ A и B (см. черт. 136), причемъ точка пересѣченія ихъ двухъ сторонъ остается постоянно на прямой $m_1\ m_2\ m_3$. Мѣсто точки пересѣченія ихъ другихъ сторонъ будетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки A и B.

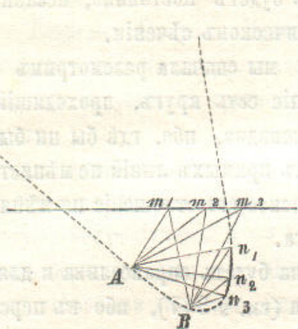
Пучки A и B, соотвѣтственные элементы которыхъ встрѣчаются на прямой, суть гомографическіе (см. § 72); отсюда также пучки (A, n_1, n_2, n_3) и (B, n_1, n_2, n_3) суть гомографическіе, а потому геометрическое мѣсто точекъ ихъ пересѣченія есть коническое сѣченіе.

376. *Теорема Маклорена.* Даны три точки и двѣ прямыя; если двигать по двумъ прямымъ двѣ вершины измѣняющаго свою форму треугольника, три сто-

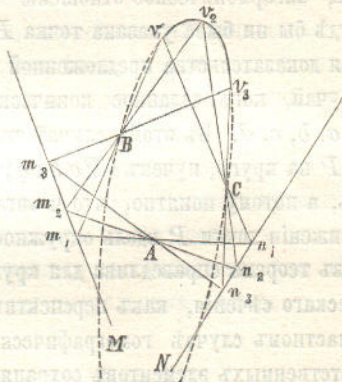
роны котораго проходятъ черезъ три данныя точки, то третья вершина опишетъ коническое сѣченіе.

Пусть заданныя точки будутъ A, B, C, а заданныя прямыя M и N. Различныя положенія стороны треугольника, проходящей черезъ точку A, составляютъ пучекъ, образующій на прямыхъ M и N два гомографическихъ ряда (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3) (см. черт. 137). Пучки (B, m_1, m_2, m_3) и (C, n_1, n_2, n_3) гомографическіе, слѣдовательно ихъ соотвѣтственные элементы пересѣкаются въ точкахъ r_1, r_2, r_3, лежащихъ на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ точки B и C.

377. Шаль *) обобщилъ методы образованія коническихъ сѣченій Ньютона и Маклорена тѣмъ, что въ теоремѣ Ньютона можно прямую линію $m_1\ m_2\ m_3$ замѣнить коническимъ сѣченіемъ, проходящимъ черезъ точки A и B, а въ теоремѣ Маклорена одну изъ сторонъ треугольника заставить касаться нѣкотораго коническаго сѣченія, касающагося двухъ неподвижныхъ прямыхъ M и N. Кромѣ того Шаль обобщилъ способъ Маклорена слѣдующимъ образомъ. Если стороны n-угольника вращаются около неподвижныхъ точекъ, а всѣ вершины кромѣ одной скользятъ по даннымъ неподвижнымъ прямымъ, то послѣдняя вершина опишетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ двѣ неподвижныя точки, около которыхъ вращаются стороны, прилежащіе къ этой вершинѣ.



Черт. 136.



Черт. 137.

Въ этой теоремѣ Шаля имѣется n пучковъ, расположенныхъ около неподвижныхъ точекъ, около которыхъ вращаются стороны n—угольника. Неподвижныя же прямыя, по которымъ скользятъ вершины, передаютъ гомографичность отъ пучка къ пучку.

378. Изъ приведенныхъ теоремъ могутъ быть, на основаніи закона двойствен-

---

*) См. *Chasles*. Traité des sections coniques.

ности, выведены теоремы коррелативныя. Укажемъ еще на одну теорему, приводимую Шалемъ въ его Traité des sections coniques.

Если провести между двумя данными неподвижными прямыми хорды, которыя были бы видимы изъ неподвижной точки подъ равными углами при вращеніи ихъ въ одномъ и томъ же направленіи, то эти хорды будутъ обертывать коническое сѣченіе, касающееся двухъ данныхъ прямыхъ.

379. *Теорема Шаля.* Шаль въ основаніе своей теоріи коническихъ сѣченій положилъ слѣдующую теорему:

На коническомъ сѣченіи заданы четыре точки a, b, c, d; возьмемъ какую нибудь пятую точку P на коническомъ сѣченіи, не указывая которую именно; тогда, если соединимъ точку P съ точками a, b, c, d прямыми, то при точкѣ P получится пучекъ, ангармоническое отношеніе котораго будетъ постоянно, независимо отъ того, гдѣ бы ни была указана точка P на коническомъ сѣченіи.

Для доказательства предложенной теоремы мы сначала разсмотримъ простѣйшій случай, когда заданное коническое сѣченіе есть кругъ, проходящій черезъ точки a, b, c, d. Въ этомъ случаѣ теорема очевидна, ибо, гдѣ бы ни была взята точка P на кругѣ, пучекъ $(P\,a\,b\,c\,d)$ четырехъ прямыхъ линій не мѣняетъ своихъ угловъ, а потому понятно, что и ангармоническое его отношеніе не мѣняется при передвиженіи точки P вдоль окружности круга.

Разъ теорема справедлива для круга, то она будетъ справедлива и для всякаго коническаго сѣченія, какъ перспективы круга (см. § 347), ибо въ перспективѣ, какъ частномъ случаѣ гомографической зависимости, ангармоническія отношенія соотвѣтственныхъ элементовъ сохраняются.

380. *Теорема Паппуса.* Четыреугольникъ вписанъ въ коническое сѣченіе; произведеніе разстояній каждой точки кривой до двухъ противоположныхъ сторонъ находится въ постоянномъ отношеніи къ произведенію разстояній той же точки до двухъ другихъ сторонъ.

Разсмотримъ сначала случай круга. Пусть вершины четыреугольника будутъ a, b, c, d. Возьмемъ какую нибудь точку P на кругѣ, не указывая какую именно, обозначимъ длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки P на стороны ab, bc, cd, da черезъ α, β, γ, δ. Соединяя точку P съ вершинами четыреугольника прямыми Pa, Pb, Pc, Pd, получимъ при точкѣ P четыре угла u, v, w, r, стягиваемые сторонами даннаго четыреугольника ab, bc, cd, da. Получаемъ:

$$ab.\,\alpha = Pa.\,Pb\sin u,\quad cd.\,\gamma = Pc.\,Pd\sin w,$$

перемножая, получимъ

$$\alpha.\,\gamma = Pa.\,Pb.\,Pc.\,Pd.\,\frac{\sin u.\,\sin w}{ab.\,cd}.$$

Подобнымъ образомъ

$$\beta.\,\delta = Pa.\,Pb.\,Pc.\,Pd.\,\frac{\sin v.\,\sin r}{bc.\,ad}.$$

Раздѣляя послѣднія равенства одно на другое, получимъ:

$$\frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta} = \frac{\sin u.\ \sin w}{\sin v.\ \sin r}\ \frac{bc.\ ad}{ab.\ cd},$$

но такъ какъ стороны четыреугольника, равно какъ и углы u, v, w, r не мѣняются, то получаемъ, что отношеніе $\frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta}$ равняется нѣкоторому постоянному числу λ.

Теорема Паппуса, будучи доказана для круга, обобщается и на коническія сѣченія, какъ перспективу круга. Въ случаѣ коническаго сѣченія углы u, v, w, r мѣняются, но, на основаніи теоремы Шаля, величина λ остается безъ перемѣны. Теорема Паппуса есть непосредственное слѣдствіе того, что уравненіе коническаго сѣченія, описаннаго около четыреугольника $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, имѣетъ видъ: $\alpha\gamma - \lambda\beta\delta = 0$.

381. *Теорема Дезарга.* Прямая линія, пересѣкающая коническое сѣченіе съ вписаннымъ въ него четыреугольникомъ, встрѣчаетъ коническое сѣченіе и противоположныя стороны въ трехъ парахъ точекъ, находящихся въ инволюціонной зависимости.

Возьмемъ коническое сѣченіе, опредѣляемое уравненіемъ $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$ и укажемъ на немъ четыре точки: μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 (см. § 371). Примемъ прямую $\gamma = 0$ за сѣкущую. Тогда пучекъ: $\beta - \lambda\alpha = 0$ укажетъ на сѣкущей рядъ точекъ. Проведемъ изъ вершины угла $\alpha = 0$, $\beta = 0$ прямыя къ точкамъ встрѣчи сѣкущей $\gamma = 0$ со сторонами заданнаго вписаннаго четыреугольника; на основаніи соображеній § 371, имѣютъ мѣсто уравненія:

$$\mu_1\mu_2.\ \alpha - (\mu_1 + \mu_2).\ \gamma + \beta = 0,$$
$$\mu_2\mu_3.\ \alpha - (\mu_2 + \mu_3).\ \gamma + \beta = 0,$$
$$\mu_3\mu_4.\ \alpha - (\mu_3 + \mu_4).\ \gamma + \beta = 0,$$
$$\mu_4\mu_1.\ \alpha - (\mu_4 + \mu_1).\ \gamma + \beta = 0.$$

Эти четыре прямыя встрѣчаютъ сѣкущую $\gamma = 0$ въ точкахъ встрѣчи этой прямой съ элементами пучка:

$$\mu_1\mu_2.\ \alpha + \beta = 0,\ \mu_2\mu_3.\ \alpha + \beta = 0,\ \mu_3\mu_4.\ \alpha + \beta = 0,\ \mu_4\mu_1.\ \alpha + \beta = 0.$$

Шесть прямыхъ

$$\alpha = 0,\quad \beta + \mu_1\mu_2.\ \alpha = 0,\quad \beta + \mu_2\mu_3.\ \alpha = 0,$$
$$\beta = 0,\quad \beta + \mu_3\mu_4.\ \alpha = 0,\quad \beta + \mu_4\mu_1.\ \alpha = 0,$$

на основаніи соображеній § 78, составляютъ инволюцію, ибо

$$(\mu_1.\mu_2).(\mu_3.\mu_4) = (\mu_2.\mu_3).(\mu_4.\mu_1).$$

382. *Теорема Карно* *). Если коническое сѣченіе пересѣкаетъ стороны AB,

*) *Carnot*. Géometrie de position, p. 437.

BC, CA треугольника ABC въ трехъ парахъ точекъ c, c_1, a, a' и b, b', то между отрѣзками, образуемыми этими точками на сторонахъ, существуетъ слѣдующая зависимость

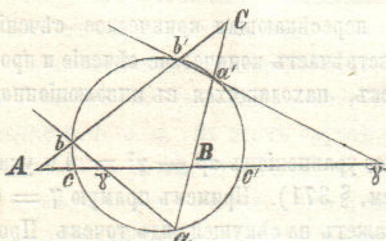
$$\frac{Ab.\ Ab'}{Cb.\ Cb'} \cdot \frac{Ca.\ Ca'}{Ba.\ Ba'} \cdot \frac{Bc.\ Bc'}{Ac.\ Ac'} = 1.$$

На основаніи теоремы Менелая (см. § 37) можемъ написать

$$\frac{Ab}{Cb} \cdot \frac{Ca}{Ba} \cdot \frac{B\gamma}{A\gamma} = 1, \quad \frac{Ab'}{Cb'} \cdot \frac{Ca'}{Ba'} \cdot \frac{B\gamma'}{A\gamma'} = 1. \text{ (см. черт. 138).}$$

Перемножая почленно, получаемъ

$$\frac{Ab.\ Ab'}{Cb.\ Cb'} \cdot \frac{Ca.\ Ca'}{Ba.\ Ba'} \cdot \frac{B\gamma.\ B\gamma'}{A\gamma,\ A\gamma'} = 1;$$



Черт. 138.

но, на основаніи теоремы Дезарга, имѣемъ

$$\frac{B\gamma.\ B\gamma'}{A\gamma.\ A\gamma'} = \frac{Bc.\ Bc'}{Ac.\ Ac'}.$$

Отсюда видна справедливость высказаннаго въ теоремѣ утвержденія.

Задачи.

1) Построить коническое сѣченіе по четыремъ его точкамъ и касательной.

Отв. Пусть будутъ a, b, c, d данныя точки; обозначимъ точку касанія къ заданной касательной черезъ e. Можно будетъ примѣнить теорему Дезарга, принимая касательную за сѣкущую. Пусть будутъ α, α' и β, β' точки, въ которыхъ она встрѣчаетъ противоположныя стороны четыреугольника $abcd$. Эти четыре точки опредѣлятъ на касательной инволюцію, двойнымъ элементомъ которой будетъ искомая точка e, а потому, если задача возможна, то существуетъ два рѣшенія, причемъ задача сводится на построеніе коническаго сѣченія по пяти точкамъ.

2) Построить коническое сѣченіе по четыремъ касательнымъ и одной точкѣ его.

Отв. Коррелативное рѣшеніе на основаніи закона двойственности.

3) Построить коническое сѣченіе по тремъ его точкамъ и двумъ касательнымъ.

Отв. Пусть будутъ a, b, c данныя точки и ot, ot' данныя касательныя, на которыхъ надо указать точки касанія d, e. Прямая de, на которой каждая изъ точекъ d, e представляетъ двѣ точки безконечно близкія, замѣняетъ противоположныя стороны четыреугольника вписаннаго, у котораго данныя касательныя суть двѣ другія стороны. Проведемъ прямую bc; пусть эта прямая пересѣкаетъ касательныя въ точкахъ t и t'. Точка ε, въ которой сѣкущая bc встрѣчаетъ хорду соприкосновенія de, должна быть, по теоремѣ Дезарга, двойною точкою инволюціи, въ которой

другія попарно сопряженныя точки будутъ bc и tt'. Такимъ образомъ получаемъ двѣ двойныя точки ε и ε' инволюціи на bc. Подобнымъ же образомъ на прямой ab получаются двѣ двойныя точки δ и δ', то даетъ четыре прямыхъ $\varepsilon\delta$, $\varepsilon\delta'$, $\varepsilon'\delta$, $\varepsilon'\delta'$; каждой изъ этихъ прямыхъ соотвѣтствуетъ рѣшеніе задачи, причемъ точки касанія d и e получаются въ пересѣченіи прямой $\varepsilon\delta$ съ данными касательными. Легко убѣдиться, на основаніи свойствъ полнаго четыреугольника, что двойныя точки инволюціи на сторонѣ ac лежатъ на четырехъ указанныхъ прямыхъ линіяхъ и потому задача можетъ имѣть не болѣе четырехъ рѣшеній.

4) Построить коническое сѣченіе по тремъ касательнымъ и двумъ его точкамъ.

Отв. Коррелативное рѣшеніе по закону двойственности.

5) Даны три гомотетическихъ эллипса; провести четвертый гомотетическій эллипсъ, касающійся трехъ заданныхъ.

Отв. Рѣшеніе основано на проектированія рѣшенія аналогичной задачи о кругахъ.

6) Вписать многоугольникъ въ коническое сѣченіе такъ, чтобы его стороны проходили черезъ данныя точки.

Отв. Если примемъ произвольную точку a на коническомъ сѣченіи за вершину многоугольника и составимъ другой, коего бы стороны проходили черезъ данныя точки, то точка z, въ которой послѣдняя сторона пересѣкаетъ коническое сѣченіе, вообще не совпадетъ съ a. Если мы сдѣлаемъ четыре такихъ попытки, то должны имѣть $(a\,a'\,a''\,a''') = (z\,z'\,z''\,z''')$ (гдѣ подъ этитъ символомъ разумѣемъ ангармоническое отношеніе). Теперь, если послѣдняя попытка была успѣшна, то точка a''' совпала съ точкой z''' и задача приводится къ слѣдующей:

«Даны три пары точекъ $aa'a''$, $zz'z''$; найти такую точку k, чтобы $(kaa'a'') = (kzz'z'')$».

Теперь, если сдѣлаемъ a, z'', a', z, a'', z' вершинами вписаннаго шестиугольника (въ данномъ здѣсь порядкѣ, взявъ a и z попеременно такъ, чтобы az, $a'z'$, $a''z''$ могли быть противоположными вершинами), то одна изъ точекъ, въ которыхъ линія, соединяющая точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ съ коническимъ сѣченіемъ, можетъ быть принята за точку k.

Объ алгебраическихъ кривыхъ высшихъ порядковъ.

383. Кривая линія называется *алгебраической* n-аго порядка, если она опредѣляется уравненіемъ

$$f(x, y) = 0,$$

гдѣ f есть цѣлая функція (полиномъ) n-ой степени относительно координатъ x и y. Общій видъ такого уравненія есть:

$$a_0x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_{n-1} xy^{n-1} + a_n y^n +$$
$$+ b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} y + b_2 x^{n-3} y^2 + \ldots + b_{n-1} y^{n-1} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ g_0 x^3 + g_1 x^2y + g_2 xy^2 + g_3y^3 +$$
$$+ h_0 x^2 + h_1 xy + h_2y^2 + k_0x + k_1y + l_0 = 0.$$

Какъ частные случаи алгебраическихъ линій мы видѣли уже прямую линію, или линію перваго порядка, и коническое сѣченіе, или линію второго порядка.

384. Всякій разъ, когда уравненіе кривой линіи не можетъ быть приведено къ виду, указанному выше, кривая линія называется *трансцендентною*. Напр., линіи $y = sin\ x$, $y = log\ x$.

385. Итакъ, мы получаемъ, какъ обобщеніе всего вышеизложеннаго, теорему, что всякое уравненіе

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

опредѣляетъ нѣкоторую кривую линію и обратно, всякая кривая линія опредѣляется нѣкоторымъ уравненіемъ.

Рѣшая уравненіе (1) относительно y, мы получимъ уравненіе слѣдующаго вида:

$$y = F(x). \tag{2}$$

386. Покажемъ еще болѣе общій и весьма важный способъ заданія кривой линіи.

Координаты точки M кривой, опредѣляемой уравненіемъ (1) или, что тоже, (2) можно на безчисленное число маперовъ выразить въ видѣ функцій отъ нѣкотораго независимаго перемѣннаго t; такъ что различнымъ значеніямъ этого перемѣннаго t будутъ соотвѣтствовать различныя точки кривой. Въ самомъ дѣлѣ, примемъ абсциссу x за совершенно произвольную функцію $\varphi(t)$; такъ что будетъ: $x = \varphi(t)$. Подставляя эту функцію вмѣсто x въ уравненіе (2), мы получимъ: $y = F[\varphi(t)]$. Функцію $F[\varphi(t)]$ обозначимъ для краткости черезъ $\psi(t)$ и тогда кривая линія опредѣлится системою двухъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Какъ примѣръ опредѣленія линіи по послѣднему способу представляется изложенное въ § 173 опредѣленіе точекъ эллипса при помощи эксцентрическаго угла φ.

387. Покажемъ еще одинъ примѣръ. Возьмемъ линію третьяго порядка, опредѣляемую уравненіемъ:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0. \tag{1}$$

Положимъ $y = tx$; тогда, подставляя это выраженіе y въ уравненіе (1), выразимъ x черезъ t; получается $x = \dfrac{3t}{1 + t^3}$. Отсюда ясно, что $y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}$.

Давая различныя значенія перемѣнному t отъ $-\infty$ до $+\infty$ получимъ

$$\begin{array}{llllll} t \ldots & -\infty, & -1-\varepsilon, & -1+\varepsilon, & 0, +1, & +\infty \\ x \ldots & 0, & +\infty, & -\infty, & 0, +\frac{3}{2}, & 0 \\ y \ldots & 0, & -\infty, & +\infty, & 0, +\frac{3}{2}, & 0 \end{array}$$

(ε — положительная безконечно-малая величина).

Кривая имѣетъ видъ, показанный на чертежѣ 139 и называется Декартовымъ листомъ (Folium Decarti). При измѣненіи t отъ 0 до $+\infty$ черезъ положительныя возрастающія значенія, соотвѣтственная точка описываетъ листообразную вѣтвь $OHCKO$ кривой въ направленіи, обратномъ движенію часовой стрѣлки, причемъ $t=+1$ соотвѣтствуетъ вершина листка C; половинѣ этого листка соотвѣтствуютъ значенія t, меньшія единицы, другой половинѣ — большія. Кривая имѣетъ кромѣ того двѣ удаляющіяся въ безконечность вѣтви OLM и OPN, асимптотически приближающіяся къ прямой AB, имѣющей уравненіе: $x+y+1=0$, причемъ при движеніи точки L по одной вѣтви, начиная отъ начала координатъ и удаляясь по направленію M, соотвѣтственныя значенія для t будутъ отрицательныя, по численной величинѣ большія 1 и измѣняющіяся отъ $-\infty$ до -1, причемъ значенію -1 соотвѣтствуетъ безконечно далекая точка. При движеніи же точки P отъ начала координатъ въ направленіи N по другой безконечной вѣтви, t мѣняется отъ 0 до -1.

Черт. 139.

388. Изъ послѣдняго примѣра видно, съ какимъ удобствомъ изучаются кривыя линіи, если онѣ заданы системой уравненій $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Въ особенности, если функціи φ и ψ однозначныя; тогда каждому значенію t соотвѣтствуетъ одна опредѣленная точка кривой. Folium Decarti даетъ примѣръ кривой линіи послѣдняго вида, ибо координаты точки на немъ выражаются помощью дробныхъ раціональныхъ функцій отъ t. Кривыя линіи, опредѣляемыя уравненіями, въ которыхъ функціи φ и ψ раціональныя, называются *уникурсальными*.

389. Посмотримъ теперь, сколько нужно задать точекъ для опредѣленія кривой n-аго порядка. Всѣхъ членовъ въ общемъ уравненіи линіи n-аго порядка

$$\frac{(n+1).(n+2)}{1.2}=N,$$

ибо это число есть сумма натуральныхъ чиселъ $n+1, n, n-1, \ldots 2, 1$, такъ

какъ въ этомъ общемъ уравненіи членовъ n-ой степени $n+1$, $n-1$ степени n и т. д. Слѣдовательно, всего коэффиціентовъ $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$. Черезъ раздѣленіе на одинъ изъ коэффиціентовъ уравненія кривой мы приведемъ уравненіе къ виду, заключающему $N-1$ параметровъ. Слѣдовательно, для опредѣленія кривой линіи n-аго порядка необходимо задать $N-1$ точекъ, черезъ которыя должна проходить эта кривая; такъ что говорятъ, что кривая линія n-аго порядка опредѣляется

$$N-1=\frac{n(n+3)}{1.2}$$

точками.

390. На основаніи теоремы Безу *), гласящей, что въ результатѣ исключенія y изъ двухъ общихъ уравненій двухъ алгебраическихъ кривыхъ m-аго и n-аго порядка получается одно алгебраическое уравненіе $\Omega(x)=0$ для опредѣленія x, степень котораго будетъ равна произведенію mn степеней заданныхъ уравненій, слѣдуетъ, что въ пересѣченіи двухъ алгебраическихъ кривыхъ, вообще говоря, получается число точекъ, равное произведенію порядковъ. Абсциссы этихъ точекъ, конечно, опредѣляются изъ уравненія $\Omega(x)=0$. Понятно, что нѣкоторыя изъ этихъ точекъ могутъ быть совпадающими, мнимыми или безконечно далекими.

Какъ частный случай сказаннаго является теорема, что прямая линія пересѣкаетъ линію n-аго порядка въ n точкахъ. Порядокъ кривой линіи есть признакъ существенный и не измѣняется ни отъ преобразованія координатъ, ни отъ проектированія, что слѣдуетъ изъ того, что формулы преобразованія координатъ, а также формулы, выражающія гомографическую зависимость, не мѣняютъ степени уравненія алгебраической кривой, въ чемъ не трудно убѣдиться.

391. *Парадоксъ Крамера.* Линіи третьяго порядка могутъ пересѣкаться въ девяти точкахъ; и въ то же время девять точекъ вполнѣ опредѣляютъ линію третьяго порядка.

Чтобы разъяснить этотъ кажущійся парадоксъ, будемъ разсуждать такъ. Возьмемъ какія нибудь восемь изъ девяти точекъ, общихъ двумъ линіямъ третьяго порядка: $S=0$ и $S_1=0$. Ясно, что черезъ эти восемь точекъ можно провести безчисленное множество линій третьяго порядка, составляющихъ пучекъ: $S-k\,S_1=0$. Если мы захотимъ провести ту кривую третьяго порядка изъ принадлежащихъ пучку, которая бы проходила черезъ нѣкоторую девятую точку x_0, y_0, то для этой цѣли придется подставить координаты x_0, y_0 въ уравненіе пучка и опредѣлить изъ него соотвѣтствующія значенія коэффиціента k. Получаемъ: $k=\frac{S^0}{S_1{}^0}$, гдѣ S^0 и $S_1{}^0$, представляютъ результаты подстановки x_0 и y_0 въ функціи S и S_1. Среди точекъ пересѣченія остается еще одна, девятая, точка, которую мы не разсматривали. Пусть

*) Théorie générale des equations algébriques par Bézout. 1779.

координаты ея будутъ x_1, y_1. Всякій разъ, когда мы за девятую точку принимаемъ какую нибудь точку x_0, y_0, отличную отъ точки x_1, y_1, мы получаемъ для k вполнѣ опредѣленное значеніе и кривая третьяго порядка опредѣляется такими девятью точками вполнѣ. Если же за девятую точку примемъ x_1, y_1, тогда $S^0 = 0$ и $S_1{}^0 = 0$ и число k остается неопредѣленнымъ. Черезъ подобныя девять точекъ проходитъ множество линій третьяго порядка—всѣ линіи заданнаго пучка.

Итакъ мы видимъ, что уравненіе $S - k\,S_1 = 0$ представляетъ пучекъ линій третьяго порядка, проходящихъ черезъ девять точекъ, общихъ двумъ линіямъ $S = 0$ и $S_1 = 0$.

Произвольная система девяти точекъ опредѣляетъ, вообще говоря, одну только линію третьяго порядка, но между положеніемъ заданныхъ девяти точекъ можетъ существовать такая зависимость, что черезъ эти 9 точекъ можно провести не одну только линію, а цѣлый пучекъ. Двѣ произвольныя линіи третьяго порядка всегда даютъ въ пересѣченіи систему девяти точекъ, обладающихъ послѣднимъ свойствомъ. Разсужденія, при помощи которыхъ мы объяснили парадоксъ Крамера, прилагаются также къ кривымъ порядковъ болѣе высокихъ.

392. Построеніе кривой линіи, опредѣленной уравненіемъ $f(x, y) = 0$, есть не что иное, какъ графическое изображеніе закона измѣненія вещественной функціи y независимаго перемѣннаго x при непрерывномъ измѣненіи независимаго перемѣннаго, а потому, будетъ ли функція y задана уравненіемъ кривой неявнымъ образомъ, или же явно, черезъ рѣшеніе уравненія относительно y, мы можемъ, задавая разныя значенія x, получать соотвѣтственныя значенія y и такимъ образомъ строить сколько угодно точекъ кривой. Чѣмъ больше точекъ будетъ построено, тѣмъ лучше выяснится фигура кривой линіи, опредѣляемой уравненіемъ.

Такой способъ изученія кривой линіи совершенно недостаточенъ. Прежде всего тутъ приходится считаться съ затрудненіями характера алгебраическаго; такъ, напримѣръ, въ случаѣ высокой степени уравненія, а въ особенности при кривыхъ трансцендентныхъ, когда вычисленіе каждой ординаты представляется затруднительнымъ, а потому вычислять большое число ихъ является требованіемъ весьма неудобнымъ.

Мало того, мы можемъ вычислить рядъ достаточно близкихъ ординатъ и все-таки для промежуточныхъ значеній x кривая можетъ имѣть безконечныя вѣтви, которыя мы при такомъ способѣ можемъ совсѣмъ упустить изъ вида. А потому является вопросомъ первостепенной важности—прежде вычисленія отдѣльныхъ ординатъ ознакомиться вообще съ видомъ кривой линіи, причемъ не пропустить никакихъ особенностей фигуры, напр., въ родѣ безконечныхъ вѣтвей фигуры, если онѣ существуютъ.

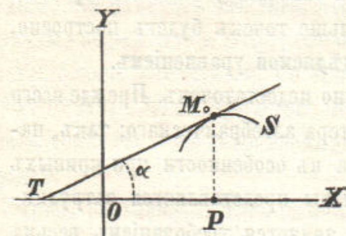
При такомъ изученіи кривой линіи нужно искать пріемы, дающіе возможность замѣтить общій характеръ кривой изъ наименьшаго числа выкладокъ и тогда является важнымъ, если нельзя обойтись безъ вычисленія ординатъ, то ходъ раз-

сужденія вести такъ, чтобы понадобилось вычислить возможно меньше такихъ ординатъ, т. е. другими словами, вычислить положеніе точекъ, наиболѣе характеризующихъ видъ кривой.

393. Общіе пріемы, дающіе возможность изучать видъ кривыхъ линій, связаны съ пріемами изученія общихъ свойствъ функцій, т. е. съ дифференціальнымъ исчисленіемъ.

Прежде всего является необходимымъ убѣдиться, возрастаетъ или убываетъ ордината y при увеличеніи x въ промежуткѣ отъ a до b, гдѣ a и b нѣкоторыя числа. Этотъ вопросъ получаетъ отвѣтъ въ дифференціальномъ исчисленіи, причемъ разсматривается производная $F'(x)$, гдѣ $y = F(x)$ и все дѣло зависитъ отъ знака этой производной: если производная сохраняетъ для этого промежутка знакъ $+$, то $F(x)$ возрастаетъ въ этомъ промежуткѣ, а если знакъ $-$, то она убываетъ. Если производная мѣняетъ знакъ, напримѣръ, изъ положительной становится отрицательной, то ордината перестаетъ возрастать и начинаетъ убывать, слѣдовательно, она проходитъ черезъ наибольшую (изъ сосѣднихъ) величину. Если, наоборотъ, производная изъ отрицательной дѣлается положительной при переходѣ x черезъ значеніе x_0 (отъ меньшихъ къ большимъ), то ордината при $x = x_0$ перестаетъ уменьшаться и начинаетъ увеличиваться; слѣдовательно, проходитъ черезъ наименьшую величину (изъ сосѣднихъ).

Вообще, если производная, оставаясь конечною и непрерывною, мѣняетъ знакъ, переходя черезъ нуль, то касательныя, проведенныя въ точкахъ, ординаты которыхъ наибольшія или наименьшія, параллельны оси x.



Черт. 140.

394. Замѣтимъ, что не всякое значеніе x, обращающее производную въ нуль, опредѣляетъ наименьшія или наибольшія ординаты.

Нужно изслѣдовать, мѣняетъ ли дѣйствительно производная свой знакъ; но во всякомъ случаѣ касательная будетъ параллельна оси x.

Что касается точекъ M_0, соотвѣтствующихъ абсциссѣ x_0, для которой $F'(x_0) = a$, гдѣ a нѣкоторое число, отличное отъ нуля, то это число a, какъ показывается въ дифференціальномъ исчисленіи, есть не что иное, какъ tg угла α, составляемаго касательною MT съ осью x-овъ; такъ что, когда $F'(x_0) = \infty$, то касательная параллельна оси y-овъ.

395. Вотъ тѣ свѣдѣнія, которыя мы будемъ считать извѣстными изъ дифференціальнаго исчисленія. Что касается изученія кривизны линіи въ различныхъ точкахъ и направленія выпуклости и вогнутости около разныхъ точекъ, то эти вопросы мы оставимъ при нашемъ изученіи кривыхъ въ сторонѣ, отсылая читателя къ курсамъ дифференціальнаго исчисленія.

Затѣмъ весьма важно замѣтить, не обращается ли для какихъ нибудь значеній x ордината y въ безконечность, или не становится ли эта ордината мнимою.

Вотъ тѣ основныя задачи, которыя прежде всего являются при разсмотрѣніи графическаго изображенія функцій.

396. Изъ всего сказаннаго ясно, какую роль при изученіи кривыхъ линій играетъ производная. Если функція y дана не явно уравненіемъ

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

то, чтобы найти производную $\frac{dy}{dx}$, нужно дифференцировать уравненіе (1). Дифференцируя получаемъ:

$$f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy = 0,$$

гдѣ $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x, y)$ суть частныя производныя отъ $f(x, y)$, взятыя по x и по y.

Отсюда получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)};$$

такъ что, если возьмемъ какую нибудь точку M_0 (x_0, y_0) на кривой, заданной уравненіемъ (1), такъ что будетъ:

$$f(x_0, y_0) = 0 \tag{2}$$

то мы получимъ для tg угла, который составляетъ касательная съ осью x-овъ, выраженіе:

$$-\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Итакъ мы видимъ, что подставляя числа x_0, y_0 въ частныя производныя и производя дѣленіе, мы получимъ нѣкоторое опредѣленное число, которое и будетъ tg-омъ угла искомой касательной.

Такъ будетъ опредѣляться касательная вообще для всѣхъ точекъ кривой линіи.

397. Существуютъ у нѣкоторыхъ кривыхъ линій такъ называемыя *особенныя точки*, когда сказанная процедура не приводитъ къ результату.

Имѣется въ виду указать на случай, когда въ результатѣ подстановки чиселъ x_0, y_0 въ частныя производныя $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ получаются нули, т. е. когда обѣ производныя заразъ уничтожаются для значеній x_0, y_0.

Итакъ мы видимъ, что координаты особенныхъ точекъ опредѣляются тремя уравненіями:

$$f(x, y) = 0, \quad f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Такъ какъ, вообще говоря, систему трехъ уравненій нельзя рѣшить относительно двухъ неизвѣстныхъ, то и не всякая кривая линія имѣетъ особенныя точки.

Для того, чтобы кривая имѣла особенныя точки, необходимо, чтобы указанныя

три уравненія были совмѣстны, другими словами, необходимо, чтобы значенія x_0, y_0, опредѣленныя изъ двухъ изъ числа ихъ, удовлетворяли также третьему.

Мы имѣли уже примѣръ особенной точки въ декартовомъ листѣ. Для этой кривой начало координатъ представляетъ особенную точку. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ всѣ три уравненія

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad f'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay = 0,$$

$$f'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax = 0$$

удовлетворяются значеніями:

$$x = 0, \; y = 0.$$

Особенныя точки представляютъ весьма важный элементъ при изученіи вида кривыхъ линій, такъ что можно выразиться, что одной изъ главнѣйшихъ задачъ при изученіи кривыхъ является разсмотрѣніе такихъ точекъ и безконечныхъ вѣтвей.

398. Особенныя точки имѣютъ слѣдующіе характерные виды.

1. *Кратныя точки* (см. черт. 141). Точки, въ которыхъ встрѣчаются нѣсколько вѣтвей кривой линіи. Напр. точка M двойная, а точка N тройная. Въ



Черт. 141.



Черт. 142.



Черт. 143.



Черт. 144.

кратныхъ точкахъ каждая изъ вѣтвей можетъ имѣть особенную касательную. Такъ напримѣръ, декартовъ листъ имѣетъ въ началѣ координатъ касательными двѣ оси координатъ.

Иногда касательныя кратныхъ точекъ могутъ совпадать, какъ это показано на черт. 142.

2. *Точки возврата.* Такъ называются точки, въ которыхъ двѣ вѣтви кривой имѣютъ общую касательную, причемъ обѣ вѣтви лежатъ по одну сторону точки касанія, по другую же сторону не существуетъ дѣйствительныхъ точекъ кривой. Въ виду этого характера расположенія вѣтвей точки возврата называются иногда *точками заостренія.*

Эти точки раздѣляются на два рода: точки возврата 1-го рода, въ которыхъ вѣтви кривой вблизи точки касанія лежатъ по разныя стороны касательной (см. черт. 143) и точки возврата 2-го рода (rébroussement en bec), въ которыхъ вѣтви кривой вблизи точки касанія лежатъ по одну сторону касательной (см. черт. 144).

3. *Уединенныя точки.* (Points isolés). Такъ называется дѣйствительная точка кривой, не имѣющая дѣйствительныхъ безконечно близкихъ точекъ лежащихъ на кривой. (См. черт. 145).

399. Трансцендентныя кривыя имѣютъ особенныя точки еще двухъ видовъ:

4. *Точки угловыя.* (См. черт. 146).

5. *Точки перерыва.* (См. черт. 147).

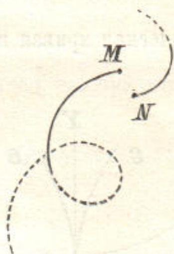
400. Что касается безконечныхъ вѣтвей, то мы ихъ будемъ раздѣлять на *гиперболическія* (см. черт. 148), имѣющія прямолинейныя асимптоты, и *параболическія*, не имѣющія оныхъ (см. черт. 149).



Черт. 145.



Черт. 146.



Черт. 147.

401. Кромѣ указанныхъ выше особенностей, кривыя линіи, называемыя *спиралями*, могутъ имѣть еще слѣдующія особенности:

1. *Асимптотическая точка.* (См. черт. 150).

2. *Асимптотическая замкнутая кривая* (см. черт. 151).

Примѣры этихъ послѣднихъ особенностей увидимъ ниже.

402. При разсмотрѣніи кривыхъ линій около особенныхъ точекъ, а также безконечныхъ вѣтвей намъ придется сравнивать кривыя линіи съ такъ называемыми параболами и гиперболами высшихъ порядковъ, къ изученію которыхъ мы теперь переходимъ.


Черт. 148.


Черт. 149.


Черт. 150.


Черт. 151.

Начнемъ съ параболическихъ кривыхъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ: $y^m = ax^n$, гдѣ m и n цѣлыя и положительныя числа.

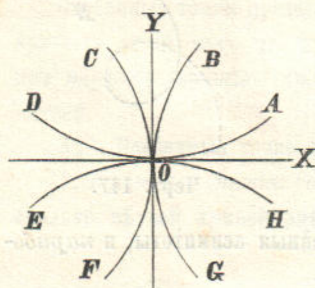
Замѣтимъ прежде всего слѣдующее:

$$y = \sqrt[m]{a} . x^{\frac{n}{m}} .$$

Дифференцируя, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{m} \sqrt[m]{a}\, x^{\frac{n-m}{m}}.$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что, если $n > m$, то, при $x = 0$ и $\frac{dy}{dx} = 0$ и, слѣдовательно, касательная совпадаетъ съ осью x-овъ; если же $n < m$, то, при $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = \infty$ и касательная совпадаетъ съ осью y-овъ. Отсюда мы видимъ, что параболическая кривая касается оси x-овъ при $n > m$, и оси y-овъ при $n < m$.



Черт. 152.

I. m—четное, n—четное.

1) $n > m$ $\quad a > o$.

Кривая состоитъ изъ вѣтвей OA, OD, OE, OH. (см. черт. 152).

2) $n < m$ $\quad a > o$.

Кривая состоитъ изъ вѣтвей OB, OC, OF, OG.

II. m—четное, n—нечетное.

1) $n > m$.

Кривая, при $a > o$, имѣетъ дѣйствительныя точки только при положительныхъ x; слѣдовательно, состоитъ изъ вѣтвей: OA и OH. Въ началѣ координатъ имѣетъ точку возврата. Подобнымъ же образомъ, при $a < o$, состоитъ изъ вѣтвей OD, OE. Въ началѣ координатъ также точка возврата.

2) $n < m$.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей OB, OG; при $a < o$, изъ вѣтвей OC, OF.

III. m—нечетное, n—четное.

1) $n > m$.

Кривая, при $a > o$, имѣетъ вѣтви OA, OD; при $a < o$, вѣтви OE, OH.

2) $n < m$.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей OB и OC, а при $a < o$, изъ вѣтвей OF, OG. Въ обоихъ случаяхъ начало координатъ есть точка возврата.

IV. m—нечетное, n—нечетное.

1) $n > m$.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей OA и OE; при $a < o$, изъ вѣтвей OH и OD.

2) $n < m$.

Кривая, при $a > o$, имѣетъ вѣтви OB и OF, а при $a < o$, вѣтви OC и OG. Въ послѣднихъ четырехъ случаяхъ начало координатъ есть такъ называемая *точка перегиба*.

Что касается безконечныхъ вѣтвей этихъ кривыхъ, то положеніе ихъ относительно осей координатъ указывается наглядно чертежомъ.

403. Обращаемся теперь къ кривымъ гиперболическимъ, опредѣляемымъ уравненіемъ:

$$y^m \cdot x^n = a,$$

гдѣ m и n числа цѣлыя и положительныя.

Рѣшая это уравненіе относительно y, получаемъ:

$$y = \sqrt[m]{a}\, x^{-\frac{n}{m}}.$$

По мѣрѣ увеличенія численной величины x, y убываетъ, такъ что при $x = \infty$, $y = 0$—и ось x-овъ есть не что иное, какъ асимптота кривой.

Подобнымъ же образомъ, при увеличеніи y, x убываетъ и при $y = \infty$, $x = 0$, такъ что ось y-овъ есть тоже асимптота кривой.

1) m—четное, n—четное.

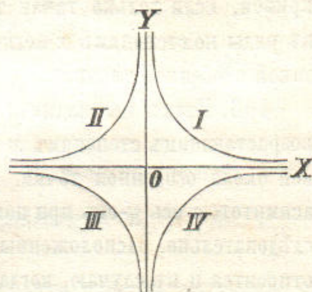
Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ четырехъ вѣтвей I, II, III, IV (см. черт. 153); при $a < o$ гипербола мнимая.

2) m—четное, n—нечетное.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей I и IV; а при $a < o$, изъ вѣтвей II и III.

3) m—нечетное, n—четное.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей I и II, а при $a < o$, изъ вѣтвей III и IV.



Черт. 153.

4) m—нечетное, n—нечетное.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей I и III; при $a < o$, изъ вѣтвей II и IV.

Параллелограммъ Ньютона.

404. Въ знаменитомъ своемъ трудѣ: Methodus fluxionum et serierum infinitarum cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam Ньютонъ далъ замѣчатальное правило, извѣстное подъ названіемъ аналитическаго параллелограмма, дающее возможность изслѣдовать алгебраическія кривыя при помощи разложенія функціи y, удовлетворяющей уравненію алгебраической кривой, въ рядъ по степенямъ x.

Уже въ 50-мъ году прошлаго столѣтія правило Ньютона послужило основаніемъ прекрасной теоріи алгебраическихъ кривыхъ, изложенной Крамеромъ въ сочиненіи: Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques (Genève, 1750).

Правило это затѣмъ представлено Лагранжемъ въ замѣчательно простомъ и изящномъ аналитическомъ видѣ и примѣнено къ разложенію въ непрерывныя дроби рѣшеній нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій. Тоже правило лежитъ въ основаніи классической работы Puiseux объ алгебраическихъ функціяхъ.

405. Итакъ, возьмемъ уравненіе алгебраической линіи

$$f(x, y) = 0.$$

Мы покажемъ, какъ разлагать функцію y въ ряды по раціональнымъ степенямъ x, при чемъ для малыхъ значеній x разложеніе должно быть произведено по возрастающимъ степенямъ x, при большихъ же значеніяхъ x по степенямъ убывающимъ.

Если при $x=0$ также будетъ равняться нулю и y, то тогда начало координатъ лежитъ въ нѣкоторой точкѣ на заданной алгебраической кривой и тогда разложеніе y по возрастающимъ степенямъ x дастъ возможность вычислять y при малыхъ значеніяхъ x и, слѣдовательно, полученный рядъ опредѣлитъ вѣтвь кривой вблизи начала координатъ.

Понятно, что лучше всего помѣстить начало координатъ въ особенную точку кривой, если только такая точка существуетъ. Тогда при помощи разложенія y въ ряды по степенямъ x легко разсмотрѣть, какъ расположены вѣтви кривой около такой особенной точки.

406. Итакъ мы видимъ, что разложеніе алгебраической функціи въ ряды по возрастающимъ степенямъ x даетъ возможность изучать видъ алгебраической кривой около особенной точки. Подобнымъ же образомъ изучаются вѣтви, имѣющія асимптотою ось y-овъ при помощи рядовъ, справедливыхъ для малыхъ значеній x, слѣдовательно, расположенныхъ по восходящимъ степенямъ x. Конечно, тоже самое относится и къ случаю, когда асимптота параллельна оси y-овъ. Во всѣхъ другихъ случаяхъ при изученіи безконечныхъ вѣтвей приходится разлагать алгебраическую функцію y въ ряды, имѣющіе мѣсто для большихъ значеній x, т. е. въ ряды расположенные по отрицательнымъ степенямъ x, возрастающимъ, впрочемъ, по абсолютной величинѣ.

407. Легко видѣть, что разсмотрѣніе разложеній, имѣющихъ мѣсто для большихъ значеній x, приводится къ разсмотрѣнію разложеній по возрастающимъ степенямъ x, имѣющихъ, слѣдовательно, мѣсто для малыхъ значеній x, если мы замѣнимъ въ алгебраическомъ уравненіи заданной кривой x на $\frac{1}{x}$; тогда по уничтоженіи дробныхъ членовъ умноженіемъ всего выраженія на нѣкоторую степень x, мы получимъ новое алгебраическое уравненіе, корень котораго y придется разлагать по возрастающимъ степенямъ x.

Чтобы перейти отъ полученнаго такимъ образомъ разложенія по возрастающимъ степенямъ x къ требуемому разложенію по убывающимъ степенямъ корня первоначальнаго уравненія, достаточно замѣнить x на $\frac{1}{x}$.

408. Итакъ мы видимъ, что, какъ разсмотрѣніе особенныхъ точекъ, такъ и разсмотрѣніе безконечныхъ вѣтвей можно свести на разложеніе алгебраическихъ функцій въ ряды по возрастающимъ степенямъ x. Пусть начало координатъ пере-

несено въ особенную точку, имѣющую координаты

$$x = h,\ y = k.$$

Преобразованіе координатъ мы сдѣлаемъ по формуламъ:

$$x = h + \xi,\ y = k + \eta.$$

Подставляя эти значенія x и y въ уравненіе алгебраической кривой, получимъ

$$f(h + \xi,\ k + \eta) = 0.$$

Раскрывая скобки и дѣлая приведеніе, мы приведемъ уравненіе окончательно къ виду:

$$f_1(\xi, \eta) = 0,$$

гдѣ f_1 есть цѣлая функція отъ ξ, η (полиномъ), не заключающая члена, независящаго отъ координатъ ξ и η, ибо при $\xi = 0$ и η должна равняться нулю.

409. Итакъ, мы привели вопросъ къ разсмотрѣнію уравненія

$$f(x, y) = 0,$$

гдѣ $f(x, y)$ есть функція такого вида:

$$f(x,y) = \Sigma\, a x^m y^n = a_0 x^{m_0} y^{n_0} + a_1 x^{m_1} y^{n_1} + a_2 x^{m_2} y^{n_2} + \ldots \qquad (1)$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ суть нѣкоторые численные коэффиціенты, а $m_0, n_0, m_1, n_1, \ldots$ числа цѣлыя и положительныя.

Заразъ оба показателя надъ x и y ни въ одномъ изъ членовъ уравненія не должны быть равны нулю, ибо къ такимъ уравненіямъ, гдѣ это имѣетъ мѣсто, мы и привели разсмотрѣніе вопроса.

410. Ясно, что для $x = 0$, y долженъ тоже равняться нулю. Будемъ теперь искать разложеніе функціи y въ рядъ слѣдующаго вида:

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots,$$

гдѣ $A, B, C, D, \ldots$ нѣкоторыя алгебраическія числа, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ суть нѣкоторыя раціональныя числа, причемъ $o < \alpha < \beta < \gamma < \delta < \ldots$

Главнѣйшею задачей при отысканіи такихъ разложеній является нахожденіе перваго показателя α.

Посмотримъ, къ чему такая задача приведется. Введемъ обозначеніе:

$$y = x^\alpha S, \qquad (2)$$

гдѣ

$$S = A + Bx^{\beta_1} + Cx^{\gamma_1} + Dx^{\delta_1} + \ldots,$$

гдѣ

$$\beta_1 = \beta - \alpha,\ \gamma_1 = \gamma - \alpha,\ \delta_1 = \delta - \alpha \ldots$$

причемъ всѣ числа $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots$ положительныя.

Подставляемъ выраженіе (2) въ уравненіе (1). Получимъ

$$a_0\, S^{n_0} x^{\mu_0} + a_1\, S^{n_1} x^{\mu_1} + a_2\, S^{n_2} x^{\mu_2} + \ldots = 0,$$

гдѣ

$$\mu_0 = m_0 + \alpha n_0,\ \mu_1 = m_1 + \alpha n_1,\ \mu_2 = m_2 + \alpha n_2 \ldots$$

Положимъ, что число α выбрано какъ нибудь, причемъ такъ, что вышло $\mu_0 < \mu_1$; $\mu_0 < \mu_2$,—то есть μ_0 меньше всѣхъ остальныхъ μ. Тогда, дѣля все уравненіе на x^{μ_0}, получимъ:

$$a_0\, S^{n_0} + a_1\, S^{n_1} x^{\mu_1 - \mu_0} + a_2\, S^{n_2} x^{\mu_2 - \mu_0} + \ldots = 0. \tag{3}$$

Послѣднее уравненіе должно быть тождествомъ, если рядъ для y найденъ правильно. Въ тождествѣ же мы имѣемъ право вставлять вмѣсто входящихъ въ него буквъ любыя численныя значенія, въ результатѣ получимъ опять тождество.

Подставляя въ послѣднее тождество вмѣсто x нуль, мы получимъ, замѣчая, что S обращается въ A при $x = 0$,

$$a_0\, A^{n_0} = 0,$$

но такъ какъ a_0 не $= 0$, то получаемъ: $A = 0$.

Итакъ мы видимъ, что члена съ показателемъ α такимъ, какимъ мы его предположили, не существуетъ.

Показатель α долженъ быть таковъ, что по крайней мѣрѣ два изъ выраженій μ должны выходить одинаковыми и меньшими всѣхъ остальныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что эти равныя и меньшія μ суть μ_0 и μ_1. Тогда

$$m_0 + \alpha n_0 = m_1 + \alpha n_1,$$

откуда получаемъ для α значеніе

$$\alpha = \frac{m_0 - m_1}{n_1 - n_0}.$$

Въ этомъ случаѣ тождество (3) по раздѣленіи на x^{μ_0} обращается въ такое:

$$a_0\, S^{n_0} + a_1\, S^{n_1} + a_2\, S^{n_2} x^{\mu_2 - \mu_0} + a_3\, S^{n_3} x^{\mu_3 - \mu_0} + \ldots = 0.$$

Полагая въ послѣднемъ тождествѣ $x = 0$, получаемъ:

$$a_0\, A^{n_0} + a_1\, A^{n_1} = 0,$$

откуда находимъ:

$$A = \sqrt[n_1 - n_0]{-\frac{a_0}{a_1}}$$

и, слѣдовательно, опредѣлился коэффиціентъ A перваго члена нашего разложенія.

411. Итакъ мы видимъ, что вопросъ опредѣленія перваго показателя ряда сводится къ слѣдующему аналитическому вопросу:

Данъ рядъ линейныхъ выраженій:

$$\mu_0 = m_0 + \alpha n_0$$
$$\mu_1 = m_1 + \alpha n_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu_k = m_k + \alpha n_k;$$

требуется опредѣлить положительное число α такъ, чтобы нѣкоторые изъ нихъ выходили равными и меньшими остальныхъ.

Ясно, что эта задача по существу своему элементарная и что ее можно рѣшить при помощи конечнаго числа пробъ. Такъ напримѣръ, сравнимъ первые два: μ_0 и μ_1. Сравненіе это дастъ намъ нѣкоторую величину α. Подставляя полученную величину въ значенія μ, мы получимъ одно изъ двухъ: 1) которое нибудь изъ остальныхъ μ выйдетъ меньше $\mu_0 = \mu_1$; тогда откидываемъ найденную величину α, ибо она не рѣшаетъ вопросъ; 2) среди остальныхъ величинъ μ нѣтъ μ меньшаго $\mu_0 = \mu_1$; тогда такая величина α годится и будетъ однимъ изъ рѣшеній нашего вопроса. Далѣе придется сравнить первую величину μ_0 съ третьею μ_2 и посмотрѣть, получится ли рѣшеніе. Однимъ словомъ, нужно перепробовать всѣ комбинаціи $k+1$ величинъ μ по двѣ. Такимъ путемъ, очевидно, найдемъ всѣ такія значенія для числа α, которыя рѣшаютъ вопросъ. Сколько будетъ такихъ значеній для α, столько же будетъ разложеній въ рядъ алгебраической функціи y, ибо каждое изъ чиселъ α можетъ быть принято за показатель x въ первомъ членѣ ряда.

Для того, чтобы найти значенія α, рѣшающія вопросъ, при помощи наименьшаго числа пробъ, и предложенъ былъ Ньютономъ способъ за которымъ слѣдуетъ по праву сохранить употреблявшееся въ прошломъ столѣтіи названіе: «параллелограмъ Ньютона» (triangle analitique).

412. Хотя многіе предпочитаютъ употреблять Ньютоновское правило въ томъ аналитическомъ видѣ, какъ его высказалъ Лагранжъ, находя послѣдній способъ болѣе простымъ, но за геометрической формулировкой сохраняется большая наглядность, а потому мы и изложимъ его въ томъ геометрическомъ видѣ, въ которомъ излагалось это правило Эйлеромъ.

Для каждаго члена $ax^m y^n$ алгебраическаго уравненія мы можемъ на нѣкоторой плоскости координатъ указать соотвѣтственную точку, имѣющую координатами показатели m и n, такъ что абсциссою этой точки будетъ цѣлое число m, а ординатою цѣлое число n. Сколько въ заданномъ уравненіи членовъ, столько получится на плоскости точекъ, причемъ, очевидно, всѣ такія точки лежатъ въ углахъ сѣтки, образованной прямыми линіями, параллельными осямъ координатъ и расположенными на разстояніи, равномъ единицѣ, другъ отъ друга.

Полученная такимъ образомъ сѣтка съ рядомъ точекъ даетъ возможность сразу видѣть рѣшеніе нашего вопроса.

413. Назовемъ черезъ m, n показателей котораго нибудь изъ членовъ ряда,

не указывая, котораго именно, а через μ соотвѣтствующее изъ выраженій μ_0, μ_1, μ_2,...; имѣемъ

$$m + \alpha n = \mu.$$

Будемъ обозначать показателей m, откладываемыхъ по оси x-овъ, черезъ x, а показателей n черезъ y. Тогда получается прямая

$$x + \alpha y = \mu. \tag{1}$$

Задавъ α и мѣняя μ, мы будемъ получать различныя прямыя, параллельныя между собою. Если подберемъ μ такъ, что прямая (1) будетъ проходить черезъ точку m_0, n_0, соотвѣтствующую первому члену ряда, то μ обратится въ μ_0.

414. Разстояніе прямой (1) до начала координатъ равно

$$\frac{\mu}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

и, слѣдовательно, при заданномъ α, пропорціонально μ. Отсюда задача аналитическая, подобрать число α такъ, чтобы, подставивъ его въ выраженія μ, получить нѣсколько, по крайней мѣрѣ два, изъ выраженій одинаковыхъ и меньшихъ всѣхъ остальныхъ, геометрически приведется къ слѣдующей: провести на чертежѣ Ньютоновскаго построенія черезъ всѣ точки, соотвѣтствующія членамъ даннаго уравненія, прямыя линіи, параллельныя между собою, изъ которыхъ бы нѣсколько, по крайней мѣрѣ двѣ, были на одинаковомъ разстояніи отъ начала координатъ, другими словами, сливались въ одну и были ближе къ этому началу координатъ, чѣмъ всѣ остальныя.

Отсюда получается такое правило: надо обвести непрерывнымъ контуромъ, состоящимъ изъ прямыхъ линій, группу точекъ Ньютоновскаго построенія, соотвѣтствующую членамъ заданнаго алгебраическаго уравненія, причемъ такъ, чтобы внѣ контура не было ни одной точки, и кромѣ того, чтобы контуръ былъ многоугольникомъ безъ входящихъ угловъ и вершинами своими имѣлъ точки, принадлежащія группѣ. Тогда стороны контура, обращенныя къ началу координатъ, даютъ рѣшеніе вопроса. Подъ сторонами, обращенными къ началу координатъ, разумѣются стороны, не параллельныя осямъ координатъ, и относительно которыхъ весь контуръ лежитъ по другую сторону относительно начала.

415. *Примѣръ*. Кривая линія задана уравненіемъ:

$$x^5y^7 - 3\,x^6y^6 - 4\,y^5\,(1 - x) + x^2y^4\,(1 + x^2) + 2\,xy^3\,(1 - x^4) +$$
$$+ x^4y^2\,(1 + x^2) - 3\,x^3y + x^4 = 0.$$

Найти касательныя къ вѣтвямъ ея, проходящимъ черезъ начало координатъ *).

*) См. *Euler*. Opera posthuma. Institutionum calculi differentialis Cap. IV. Ex. 2. (pag. 391).

Для рѣшенія задачи надо найти всѣ возможныя разложенія функціи y въ рядъ по возрастающимъ степенямъ x съ вещественными коэффиціентами. Употребляя Ньютоново построеніе, мы получаемъ (см. черт. 1 въ концѣ книги) двѣ стороны контура, обращенныя къ началу координатъ; одна изъ этихъ сторонъ соотвѣтствуетъ тремъ членамъ уравненія:

$$2\,xy^3, -3\,x^3y, +x^4,$$

другая же членамъ:

$$2\,xy^3, -4\,y^5.$$

Разсмотримъ сначала первую сторону. Этой сторонѣ соотвѣтствуетъ разложеніе въ рядъ, начинающееся съ члена вида Ax. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $y = Ax^\alpha$ и подставляя вмѣсто y въ три члена, соотвѣтствующіе указанной сторонѣ, получимъ:

$$2\,A^3x^{1+3\alpha}, -3\,Ax^{3+\alpha}, x^4.$$

Сравнивая показатели, получимъ: $1+3\alpha = 3+\alpha = 4$, откуда $\alpha = 1$.

Что касается вычисленія коэффиціента A, то всѣ другіе члены уравненія, кромѣ вышенаписанныхъ трехъ, при $\alpha = 1$ будутъ порядка высшаго и не будутъ вліять на опредѣленіе коэффиціента A, а потому заданное уравненіе можемъ написать такъ:

$$2\,xy^3 - 3\,x^3y + x^4 + \Sigma = 0,$$

гдѣ Σ сумма остальныхъ членовъ. Подставляемъ $y = Sx$; получимъ:

$$2\,S^3x^4 - 3\,Sx^4 + x^4 + \Sigma_0 = 0,$$

гдѣ Σ_0 представляетъ сумму членовъ степеней выше четвертой. Сокращая уравненіе на x^4, получаемъ:

$$2\,S^3 - 3\,S + 1 + \Sigma'_0 = 0,$$

гдѣ Σ'_0 сумма членовъ съ положительными степенями x. Полагая въ послѣднемъ равенствѣ $x = 0$, получимъ:

$$2\,A^3 - 3\,A + 1 = 0;$$

послѣднее уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$(A-1)\left(A^2 + A - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

откуда для A получаемъ три вещественныхъ значенія:

$$A_0 = 1,\; A_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2},\; A_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Получаются три разложенія въ рядъ

$$y = x + \;.\;.\;.\;.$$

$$y = A_1x + \;.\;.\;.$$

$$y = A_2x + \;.\;.\;.$$

Такъ какъ ряды эти расположены по возрастающимъ степенямъ x, то въ слѣдующихъ членахъ степень x больше первой, а потому эти члены безконечно малы въ сравненіи съ первымъ членомъ ряда. Если мы въ трехъ послѣднихъ рядахъ оставимъ только первые члены, то получимъ три прямыя, проходящія черезъ начало координатъ:

$$y = x, \qquad y = A_1 x, \qquad y = A_2 x.$$

Эти три прямыя суть касательныя къ тремъ вѣтвямъ кривой, проходящимъ черезъ начало координатъ.

Разсмотримъ теперь вторую сторону Ньютоновскаго построенія. Члены, ей соотвѣтствующіе, суть:

$$2\,xy^3, -4\,y^5.$$

Возьмемъ опять

$$y = Ax^\alpha;$$

подставляя, получимъ:

$$2\,A^3 x^{1+3\alpha}, -4\,A^5 x^{5\alpha}.$$

Сравнивая показатели, получаемъ:

$$1 + 3\alpha = 5\alpha,$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

и, слѣдовательно, разложеніе, соотвѣтствующее этой сторонѣ, начнется съ члена вида $Ax^{\frac{1}{2}}$. Подставимъ въ уравненіе $y = Sx^{\frac{1}{2}}$; получаемъ:

$$2\,S^3 x^{\frac{5}{2}} - 4\,S^5 x^{\frac{5}{2}} + \Sigma_0 = 0.$$

Сокращая уравненіе на $x^{\frac{5}{2}}$ и полагая $x = 0$, получимъ:

$$2\,A^3 - 4\,A^5 = 0,$$

откуда

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и слѣдовательно разложеніе въ рядъ будетъ имѣть видъ:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,x^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

Если надо написать только первый членъ разложенія, то на практикѣ надо поступать такъ: оставить изъ уравненія только тѣ члены, которые соотвѣтствуютъ точкамъ нѣкоторой стороны Ньютоновскаго построенія, остальные отбросить, упрощенное такимъ образомъ уравненіе дастъ черезъ рѣшеніе относительно y первый

членъ разложенія. Напр., соотвѣтственно второй изъ разсмотрѣнныхъ нами сторонъ, мы могли бы написать уравненіе

$$2\,xy^3 - 4\,y^5 = 0,$$

откуда

$$y^2 = \frac{1}{2}\,x$$

или

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,x^{\frac{1}{2}}.$$

416. На указанномъ примѣрѣ мы видѣли, что въ началѣ координатъ встрѣчаются четыре вѣтви кривой, такъ что въ ихъ пересѣченіи получается четверная точка. Касательныя къ четыремъ вѣтвямъ образуютъ съ осью x—овъ углы, тангенсы которыхъ равны 1, A_1, A_2, ∞.

417. Для построенія кривой линіи вблизи кратной точки мало знанія направленія касательныхъ различныхъ вѣтвей. Необходимо кромѣ того указать, какъ вблизи этой точки каждая изъ вѣтвей расположена по отношенію къ своей касательной, въ которую сторону она направлена, или въ этой точкѣ имѣется перегибъ. Самымъ простымъ способомъ можно увидѣть, какой изъ этихъ случаевъ имѣетъ мѣсто, продолживъ наше разложеніе въ рядъ далѣе. Войдемъ въ нѣкоторыя подробности по этому поводу.

418. Въ § 410 мы искали первый членъ разложенія

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \ldots,$$

причемъ обозначали черезъ S выраженіе

$$A + Bx^{\beta_1} + Cx^{\gamma_1} + Dx^{\delta_1} + \ldots, \tag{*}$$

гдѣ

$$\beta_1 = \beta - \alpha,\ \gamma_1 = \gamma - \alpha,\ \delta_1 = \delta - \alpha,\ \ldots$$

Предположимъ, что первый членъ разложенія, по пріемамъ уже указаннымъ, мы нашли, такъ что числа A и α намъ извѣстны. Покажемъ теперь, какъ найти другіе показатели $\beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots$ (ясно, что, зная эти показатели, мы найдемъ и показатели $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ нашего ряда).

419. Подставимъ вмѣсто y въ заданное уравненіе Sx^{α}; получаемъ (см. § 410):

$$a_0\,S^{n_0}\,x^{\mu_0} + a_1\,S^{n_1}\,x^{\mu_1} + a_2\,S^{n_2}\,x^{\mu_2} + \ldots = 0.$$

Положимъ, что у насъ вышло:

$$\mu_0 = \mu_1,\ \ \mu_1 < \mu_2, < \ldots;$$

обозначая разности

$$\mu_2 - \mu_0,\ \mu_3 - \mu_0,\ \mu_4 - \mu_0, \ldots$$

черезъ

$$\tau, \tau', \tau'', \ldots$$

получимъ, сокращая уравненіе на μ_0

$$a_0 S^{n_0} + a_1 S^{n_1} + a_2 S^{n_2} x^{\tau} + a_3 S^{n_3} x^{\tau'} + a_4 S^{n_4} x^{\tau''} + \ldots = 0.$$

Числа $\tau, \tau' \tau'', \ldots$ согласно нашему предположенію, расположены въ возрастающемъ порядкѣ и между ними нѣтъ равныхъ. Подставляя въ послѣднее уравненіе вмѣсто S его выраженіе (*) (см. § 418), получимъ, принимая во вниманіе уравненіе

$$a_0 A^{n_0} + a_1 A^{n_1} = 0 \text{ (см. § 410)},$$

слѣдующее уравненіе

$$(a_0 n_0 A^{n_0-1} + a_1 n_1 A^{n_1-1}) (Bx^{\beta^1} + Cx^{\gamma^1} + Dx^{\delta^1} + \ldots) +$$
$$+ \left(a_0 \frac{n_0 (n_0-1)}{1.2} A^{n_0-2} + a_1 \frac{n_1 (n_1-1)}{1.2} A^{n_1-2}\right)(Bx^{\beta^1} + Cx^{\gamma^1} + Dx^{\delta^1} + \ldots)^2 +$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots +$$
$$+ x^{\tau} a_2 [A + (Bx^{\beta_1} + Cx^{\gamma_1} + Dx^{\delta_1} + \ldots)]^{n_2} +$$
$$+ x^{\tau'} a_3 [A + (Bx^{\beta_1} + Cx^{\gamma_1} + Dx^{\delta_1} + \ldots)]^{n_3} +$$
$$+ x^{\tau''} a_4 [A + (Bx^{\beta_1} + Cx^{\gamma_1} + Dx^{\delta_1} + \ldots)]^{n_4} +$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots = 0.$$

Если коэффиціенты $B, C, D, \ldots$, а также показатели $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots$ правильно указаны, то послѣднее уравненіе должно обращаться въ тождество, а потому коэффиціенты при всѣхъ степеняхъ x должны тождественно пропадать. Отсюда мы замѣчаемъ, что непремѣнно меньшій изъ показателей β_1 долженъ равняться τ, меньшему изъ чиселъ $\tau, \tau', \tau'', \ldots$, ибо если мы возьмемъ $\beta_1 < \tau$, то никакимъ подборомъ коэффиціентовъ $B, C, D, \ldots$, кромѣ положенія $B = 0$, нельзя будетъ заставить членъ x^{β_1} пропасть. Подобнымъ же образомъ, если β_1 мы выберемъ $> \tau$, то, наоборотъ, членъ $x^{\tau} \,.\, a_2 A^{n_2}$ не будетъ имѣть себѣ подобныхъ и потому не пропадетъ изъ уравненія, которое поэтому и не будетъ тождествомъ. Отсюда ясно, что β_1 должно равняться τ. Коэффиціентъ B будетъ

$$-\frac{a_2 A^{n_2}}{a_0 n_0 A^{n_0-1} + a_1 n_1 A^{n_1-1}}.$$

Что касается другихъ показателей $\gamma_1, \delta_1, \ldots$, то очевидно, что они получатся такъ:

Возьмемъ всѣ возможныя значенія выраженія

$$\lambda\tau + \lambda'\tau' + \lambda''\tau'' + \ldots + \lambda^{(k)} \tau^{(k)}$$

при различныхъ λ, цѣлыхъ положительныхъ, или равныхъ нулю, расположимъ за-

тѣмъ полученныя числа въ возрастающемъ порядкѣ; получится рядъ чиселъ, который долженъ быть принятъ за показатели $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots$ *).

Коэффиціенты $B, C, D, \ldots$, разъ показатели указаны, опредѣлятся по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

420. Указанное выше правило разложенія алгебраическихъ функцій въ ряды не всегда можетъ быть приложено. Въ самомъ дѣлѣ, въ томъ способѣ, который изложенъ въ § 419, показатель α надъ x въ первомъ членѣ опредѣляетъ весь рядъ показателей надъ x въ слѣдующихъ членахъ; послѣднее же не всегда имѣетъ мѣсто, ибо иногда существуетъ нѣсколько разложеній функціи, начинающихся съ одного и того же члена. Послѣднее обстоятельство встрѣчается, когда коэффиціентъ A опредѣляется какъ кратный корень уравненія, а также въ случаѣ, если въ ряду чиселъ $\tau, \tau', \tau'', \ldots$ находятся равныя между собою. Чтобы избѣжать оговорокъ, мы и разсматривали только тотъ случай, когда указанныя обстоятельства не имѣютъ мѣста.

421. Для геометрическихъ приложеній важно знать только второй членъ разложенія, а потому можно не слѣдовать приведеннымъ выше общимъ соображеніямъ. Достаточно поступать слѣдующимъ образомъ.

Если первый членъ разложенія Ax^α найденъ, полагаемъ $y = Ax^\alpha + t$ и подставляемъ послѣднее выраженіе въ заданное уравненіе. Тогда, послѣ раскрытія скобокъ и сокращенія подобныхъ членовъ, получаемъ новое алгебраическое уравненіе между x и t; причемъ при $x = 0$ будетъ также $t = 0$. Вопросъ приведется къ разложенію t въ рядъ по степенямъ x, причемъ надо будетъ указать въ этомъ разложеніи одинъ только первый членъ.

Для новаго уравненія дѣлаемъ то же самое Ньютоновское построеніе, которое дастъ намъ одно или нѣсколько разложеній функціи t:

$$t = B_1 x^{\beta^1} + \ldots, \quad t = B_2 x^{\beta^2} + \ldots, \quad t = B_3 x^{\beta^3} + \ldots$$

Изъ указанныхъ разложеній годиться будутъ для насъ только тѣ, показатель въ первомъ членѣ которыхъ больше найденнаго нами раньше α, ибо первый членъ въ разложеніи t есть второй членъ въ разложеніи y, которое, согласно нашему предположенію, есть разложеніе по возрастающимъ степенямъ x.

422. Прилагая наши соображенія къ примѣру, приведенному въ § 415, мы замѣчаемъ, что разложеніе въ ряды для четырехъ вѣтвей кривой имѣютъ видъ:

$$\text{I.} \quad y = x + \frac{4}{3} x^2 + \ldots$$

$$\text{II.} \quad y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} x - \frac{(\sqrt{3} - 1)^4}{24} x^2 + \ldots$$

---

*) См. *Schoubert*. De la solution des équations implicites à deux variables въ Memoires posthumes de Euler, Schoubert et Fuss (Supplement). 1830 г.

III. $y = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}x - \frac{(1+\sqrt{3})^4}{24}x^2 + \ldots$

IV. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}} + \ldots$

Изъ этихъ разложенiй мы видимъ ясно, какъ расположены вѣтви кривой вблизи начала координатъ.

Что касается разложенiя IV, то мы не искали для него второго члена, ибо очевидно, что малая часть соотвѣтствующей вѣтви кривой расположена также, какъ малая часть дуги параболы $y^2 = \frac{1}{2}x$ вблизи ея вершины. На чертежѣ 2 (см. табл. въ концѣ книги) видно расположенiе вѣтвей кривой вокругъ четверной точки.

423. Показавъ, какъ разсматривать кривую вблизи особенной точки, остается прибавить уже немного для указанiя правилъ для разсмотрѣнiя безконечныхъ вѣтвей кривой.

Въ § 400 мы указали на два рода безконечныхъ вѣтвей, которыя имѣютъ мѣсто въ алгебраическихъ кривыхъ, такъ называемыя *параболическiя* и *гиперболическiя* вѣтви.

Параллелограммъ Ньютона даетъ простой способъ разсмотрѣнiя этихъ вѣтвей. Оказывается, что при разсмотрѣнiи безконечныхъ вѣтвей играютъ роль другiя стороны Ньютоновскаго построенiя, подобно тому, какъ для разсмотрѣнiя кривой вблизи начала координатъ стороны, обращенныя къ началу координатъ параллелограмма.

При разсмотрѣнiи безконечныхъ вѣтвей приходится разлагать въ ряды или y, разсматриваемую какъ функцiю x, по степенямъ x, или, обратно, x по степенямъ y, причемъ разложенiя должны имѣтъ мѣсто при большихъ значенiяхъ независимаго перемѣннаго, а потому должны быть расположены по убывающимъ степенямъ этого послѣдняго.

424. Для гиперболическихъ вѣтвей должно получаться разложенiе вида:

$$y = Ax + B + \frac{C}{x^{\gamma}} + \frac{D}{x^{\delta}} + \ldots,$$

гдѣ $0 < \gamma < \delta < \ldots$

Если въ разложенiе будетъ входить членъ съ положительною степенью x, отличною отъ единицы, то вѣтвь будетъ параболическая.

Асимптотою вѣтви, опредѣляемой вышенаписаннымъ рядомъ, будетъ прямая

$$y = Ax + B.$$

Если A случится равнымъ нулю, то асимптота будетъ параллельна оси x-овъ, а потому ей будетъ соотвѣтствовать разложенiе вида:

$$y = B + \frac{C}{x^{\gamma}} + \frac{D}{x^{\delta}} + \ldots$$

Если же также и B будетъ равняться нулю, такъ что разложеніе начнется съ отрицательной степени x;

$$y = \frac{C}{x^{\gamma}} + \frac{D}{x^{\delta}} + \ldots,$$

то асимптота будетъ совпадать съ осью x-овъ, такъ что при x большихъ y получаетъ малыя значенія.

Что касается ассимптотъ, параллельныхъ оси y-овъ, или совпадающихъ съ осью y-овъ, то для нихъ мы получаемъ разложеніе

$$x = B_1 + \frac{C_1}{y^{\gamma_1}} + \frac{D_1}{y^{\delta_1}} + \ldots,$$

гдѣ $0 < \gamma_1 < \delta_1 < \ldots$

425. Разматривая различныя возможныя положенія сторонъ контура въ Ньютоновскомъ построеніи, мы можемъ разбить стороны на слѣдующія восемь типовъ.

На черт. 3 (см. табл. въ концѣ книги) всѣ восемь типовъ сторонъ указаны.

Стороны типа 2, 6, 7, 3 параллельны сторонамъ параллелограмма, кромѣ того еще могутъ быть стороны четырехъ типовъ 1, 4, 8, 5 наклонныя къ сторонамъ параллелограмма.

Стороны типа 1 даютъ вѣтви, проходящія черезъ начало координатъ, какъ мы это уже видѣли на примѣрѣ § 415.

Сторона типа 2 даетъ точки встрѣчи кривой съ осью y-овъ.

Сторона типа 3 дастъ точки встрѣчи кривой съ осью x-овъ.

Стороны типа 4 даютъ разложенія по возрастающимъ степенямъ x, начинающіяся съ отрицательной степени. Первый членъ подобныхъ разложеній имѣетъ видъ:

$$A \frac{1}{x^{\alpha}}, \text{ гдѣ } \alpha > 0.$$

Получается гиперболическая вѣтвь, имѣющая асимптотою ось y-овъ, ибо малымъ значеніямъ x соотвѣтствуютъ большія значенія y.

Стороны типа 5 даютъ разложенія по убывающимъ степенямъ x, начинающіяся съ члена съ отрицательною степенью x. Получается гиперболическая вѣтвь, имѣющая асимптотою ось x-овъ.

Сторона типа 6 даетъ гиперболическія вѣтви, имѣющія асимптоты параллельныя оси x-овъ, причемъ абсциссы, соотвѣтствующія асимптотамъ, получаются изъ уравненія, которое получится, удерживая изъ уравненія члены, соотвѣтствующіе этой сторонѣ. Первая часть полученнаго такимъ образомъ уравненія есть цѣлая функція отъ x, которая служитъ коэффиціентомъ въ уравненіи при высшей степени y.

Сторона типа 7 даетъ гиперболическія вѣтви, имѣющія ассимптоты, параллельныя оси y-овъ.

Стороны типа 8 даютъ безконечныя вѣтви кривой линіи, удаляющіяся какъ отъ оси x-овъ, такъ и отъ оси y-овъ, причемъ, вѣтви будутъ параболическія, если уголъ, составляемый стороною этого типа со сторонами параллелограмма, отличенъ отъ 45°, и лишь въ случаѣ, когда этотъ уголъ = 45°, сторона можетъ опредѣлять гиперболическую вѣтвь, имѣющую асимптоту, непараллельную ни одной изъ осей координатъ.

426. При разсмотрѣніи безконечныхъ вѣтвей, также какъ и въ случаѣ разсмотрѣнія вѣтви кривой вблизи начала координатъ, дѣло сводится главнымъ образомъ къ опредѣленію перваго члена. Этотъ первый членъ мы найдемъ, если сохранимъ изъ уравненія только члены, соотвѣтствующіе разсматриваемой сторонѣ контура. Показатель въ этомъ первомъ членѣ получается непосредственно, для опредѣленія же коэффиціента получается нѣкоторое алгебраическое уравненіе. Въ случаѣ мнимости корней послѣдняго уравненія, соотвѣтственной вѣтви кривой нѣтъ.

427. Пояснимъ изложенную теорію на примѣрѣ § 415.

Кромѣ разсмотрѣнныхъ двухъ сторонъ типа 1, въ контурѣ мы замѣчаемъ еще четыре стороны типовъ 4, 8, 7, 5. Обратимъ сначала вниманіе на сторону типа 4.

Удерживая въ уравненіи соотвѣтствующіе этой сторонѣ члены, получаемъ уравненіе

$$x^5 y^7 - 4y^5 = 0,$$

откуда получимъ

$$y^2 = 4 . \frac{1}{x^5} .$$

Получаются двѣ вѣтви, приближающіяся асимптотически къ оси y-овъ со стороны положительныхъ x-овъ (см. черт. 4 въ концѣ книги).

428. Сторона типа 8 даетъ уравненіе

$$x^5 y^7 - 3x^6 y^6 = 0,$$

откуда

$$y = 3x.$$

Получается асимптота, образующая съ осью x-овъ уголъ, тангенсъ котораго равенъ 3. (см. черт. въ концѣ книги).

429. Сторона типа 7 даетъ уравненіе:

$$y^2 x^6 - 3x^6 y^6 = 0,$$

откуда получаемъ:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}} .$$

Получаются двѣ гиперболическія вѣтви, асимптоты которыхъ параллельны оси x-овъ

и опредѣляются уравненіями:

$$y = +\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

430. Наконецъ, остается послѣдняя сторона типа 5, не дающая дѣйствительныхъ безконечныхъ вѣтвей, ибо ей соотвѣтствуетъ уравненіе:

$$x^6y^2 + x^4 = 0,$$

или, что одно и то же:

$$x^2y^2 + 1 = 0.$$

431. Для ближайшаго указанія расположенія безконечныхъ вѣтвей относительно асимптотъ, а также и указанія положенія самой асимптоты, въ случаѣ если она не параллельна координатнымъ осямъ, необходимо вычислить второй членъ разложенія, что можетъ быть совершено для вѣтвей безконечно далекихъ точно также, какъ это было указано для точекъ, близкихъ къ началу координатъ (см. § 421).

432. Пояснивъ Ньютоновскую теорію примѣромъ, мы укажемъ на случаи исключительные. Въ § 421 мы упоминали о случаѣ, когда первый членъ разложенія не опредѣляетъ еще всего разложенія и когда первому члену могутъ соотвѣтствовать нѣсколько разложеній съ различными вторыми членами. Подобное обстоятельство встрѣчается, напр., у кривыхъ линій, имѣющихъ въ началѣ координатъ точку возврата второго рода.

Пусть напримѣръ, дано уравненіе:

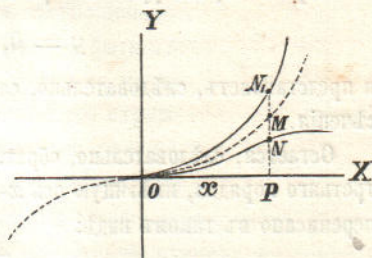
$$y^2(1 - x^3) - 2yx^3 + x^6 = 0.$$

Это уравненіе можно переписать такъ:

$$(y - x^3)^2 = x^3y^2,$$

откуда

$$y - x^3 = \pm yx^{\frac{3}{2}}.$$



Черт. 154.

Отсюда

$$y = \frac{x^3}{1 \pm x^{\frac{3}{2}}} = x^3 \pm x^{\frac{9}{2}} + x^6 \pm x^{\frac{15}{2}} + \ldots$$

Послѣднее разложеніе показываетъ (см. черт. 154), что, полагая $OP = x$, мы получаемъ точку M на параболѣ: $y = x^3$, отъ которой обѣ вѣтви заданной кривой

$$PN_1 = y = \frac{x^3}{1 - x^{\frac{3}{2}}}, \quad PN = y = \frac{x^3}{1 + x^{\frac{3}{2}}}$$

вблизи начала координатъ отличаются мало. Кромѣ того, для отрицательныхъ x не существуетъ точекъ, принадлежащихъ заданной кривой. Получается при началѣ координатъ точка возврата второго рода.

433. Предложимъ себѣ задачу найти линіи третьяго порядка, имѣющія оси симметріи. Для этого возьмемъ общее уравненіе третьей степени:

$$P_0 y^3 + P_1 y^2 + P_2 y + P_3 = 0,$$

гдѣ P_0, P_1, P_2, P_3 суть функціи x, коихъ степени соотвѣтственно равны каждому изъ значковъ 0, 1, 2, 3. Если линія третьяго порядка имѣетъ ось симметріи, то эту ось можно принять за ось абсциссъ и уравненіе должно быть такой формы, чтобы каждому значенію абсциссы x соотвѣтствовали два значенія y, отличающіяся только знакомъ. Для этой цѣли необходимо, чтобы удовлетворялись два уравненія при однихъ и тѣхъ же значеніяхъ x и y:

$$P_0 y^3 + P_1 y^2 + P_2 y + P_3 = 0$$
$$- P_0 y^3 + P_1 y^2 - P_2 y + P_3 = 0.$$

Складывая и вычитая, мы получаемъ два уравненія:

$$P_1 y^2 + P_3 = 0,$$
$$P_0 y^3 + P_2 y = 0.$$

Во второмъ случаѣ уравненіе распадается на два:

$$y = 0, \;\; P_0 y^2 + P_2 = 0$$

и представляетъ, слѣдовательно, совокупность оси x-овъ и нѣкотораго коническаго сѣченія.

Остается, слѣдовательно, обратить вниманіе на первый случай, дающій линію третьяго порядка, имѣющую ось x-овъ осью симметріи. Это уравненіе можетъ быть переписано въ такомъ видѣ:

$$y = \sqrt{\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{\alpha x + \beta}}.$$

434. Разсмотримъ главнѣйшіе частные случаи подобныхъ линій третьяго порядка, которые получатся, задавая различныя частныя значенія коэффиціентамъ a, b, c, d, α, β.

435. *Полукубическая парабола*:

$$b = c = d = \alpha = 0, \; \frac{a}{\beta} = A^2.$$

Получаемъ уравненіе

$$y = Ax^{\frac{3}{2}}.$$

Эта кривая имѣетъ въ началѣ координатъ точку возврата перваго рода, причемъ касательная въ этой точкѣ совпадаетъ съ осью x-овъ, и состоитъ изъ двухъ параболическихъ вѣтвей, симметрично расположенныхъ относительно оси x-овъ. Для отрицательныхъ x нѣтъ вещественныхъ значеній y.

436. *Декартовъ листъ*:

$$c = d = 0, \ \beta = b, \ a = -1, \ \alpha = 3.$$

Получается уравненіе

$$y = x\sqrt{\frac{b-x}{b+3x}}.$$

Это уравненіе поворотомъ прямоугольныхъ осей на 45^0 можетъ быть приведено къ виду:

$$x^3 + y^3 - 3Axy = 0,$$

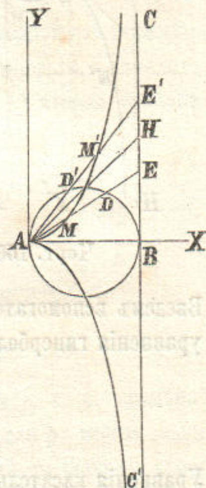
гдѣ $A = \frac{b.\sqrt{2}}{3}$. Эту кривую мы уже разсматривали въ § 387.

437. *Циссоида Діоклеса*:

$$b = c = d = 0, \ -\alpha = a > 0, \ \frac{\beta}{\alpha} = -k.$$

Получается уравненіе

$$y = x\sqrt{\frac{x}{k-x}}.$$



Черт. 155.

Циссоида была придумана греческимъ геометромъ Діоклесомъ для рѣшенія задачи построенія двухъ среднихъ пропорціональныхъ между двумя заданными отрѣзками. Она можетъ быть построена на основаніи слѣдующаго ея свойства. Возьмемъ кругъ діаметра k (см. черт. 155). Помѣстимъ въ точку A его окружности начало координатъ, ось x-овъ расположимъ по діаметру AB, а ось y-овъ направимъ по касательной AY. Кромѣ того проведемъ касательную въ точкѣ B, діаметрально противоположной точкѣ A. Если вокругъ A заставимъ вращаться сѣкущую AE, на которой, начиная отъ точки A отложимъ длину AM, равную части DE между кругомъ и неподвижной касательной, то геометрическимъ мѣстомъ этихъ точекъ M будетъ циссоида. Эта кривая имѣетъ въ началѣ координата точку возврата и существенно отличается отъ полукубической параболы тѣмъ, что вѣтви ея имѣютъ асимптотою неподвижную касательную $x = k$. Прямая AH, соединяющая точку A съ точкой пересѣченія циссоиды съ кругомъ, составляетъ съ осью x-овъ уголъ въ 45°.

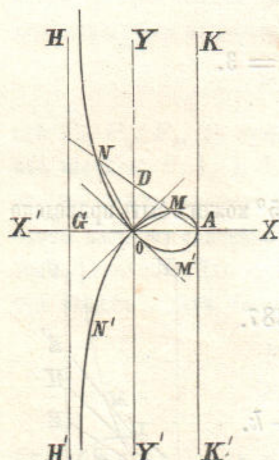
438. *Строфоида*:

$$b = \beta > 0, \ \alpha = 1, \ a = -1, \ c = d = 0.$$

Уравненіе ея имѣетъ видъ:

$$y = x\sqrt{\frac{b-x}{b+x}}.$$

Строфоида можетъ быть построена на основаніи слѣдующаго ея свойства. Возьмемъ прямой уголъ XOY и точку A (см. черт. 156) на одной изъ его сторонъ въ разстояніи b отъ вершины. Черезъ неподвижную точку A проведемъ какую нибудь прямую AD, которая встрѣчаетъ сторону YO въ точкѣ D, и на этой прямой въ обѣ стороны отъ точки D отложимъ длины DM и DN, равныя OD. Геометрическимъ мѣстомъ точекъ M и N будетъ разсматриваемая строфоида. Эта кривая имѣетъ въ началѣ координатъ двойную точку и асимптотою прямую $b + x = 0$.



Черт. 156.

439. Разсмотримъ теперь нѣкоторыя изъ наиболѣе интересныхъ кривыхъ порядка выше третьяго.

Лемниската Бернулли. Возьмемъ задачу: найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра гиперболы на различныя ея касательныя.—Пусть уравненіе гиперболы будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Введемъ вспомогательный уголъ φ, при помощи котораго можно будетъ написать уравненія гиперболы въ такомъ видѣ:

$$x = a.\sec\varphi,$$

$$y = b.\operatorname{tang}\varphi.$$

Уравненія касательной и перпендикуляра, опущеннаго на касательную изъ начала координатъ, могутъ быть написаны въ такомъ видѣ:

$$\sec\varphi\,\frac{\xi}{a} - \operatorname{tang}\varphi.\frac{\eta}{b} = 1,$$

$$\operatorname{tang}\varphi\,\frac{\xi}{b} + \sec\varphi.\frac{\eta}{a} = 0.$$

Исключая изъ этихъ уравненій уголъ φ, получимъ уравненіе искомой кривой въ слѣдующемъ видѣ:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = a^2\xi^2 - b^2\eta^2.$$

Когда задана гипербола равносторонняя: $b^2 = a^2$, получается кривая линія, которую Яковъ Бернулли назвалъ *лемнискатой* (см. черт. 157). Лемниската есть, очевидно, кривая 4-го порядка и опредѣляется уравненіемъ:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Въ началѣ координатъ лемниската имѣетъ двойную точку, въ которой двѣ вѣтви пересѣкаются подъ прямымъ угломъ и имѣютъ касательныя, опредѣляемыя уравненіемъ

$$x^2 - y^2 = 0.$$

440. *Кривыя Кассини.* Подъ этимъ названіемъ извѣстно геометрическое мѣсто точекъ такихъ, что произведеніе разстояній ихъ отъ двухъ заданныхъ неподвижныхъ точекъ F и F_1 равно данному числу.

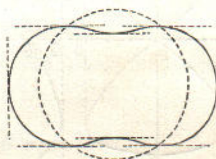
Примемъ за начало координатъ средину 0 прямой FF_1, а саму прямую за ось x-овъ. Оси предположимъ прямоугольными. Назовемъ черезъ $2c$ разстояніе FF_1, а черезъ a^2 заданное произведеніе. Уравненіе геометрическаго мѣста будетъ имѣть видъ:

$$y^4 + 2y^2 (x^2 + c^2) + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0. \quad (1)$$

Это уравненіе заключаетъ въ себѣ только четныя степени каждой изъ перемѣнныхъ. Каждая изъ осей координатъ есть, слѣдовательно, ось симметріи, а начало—центръ кривой. Разсматривая y^2 какъ неизвѣстное, уравненіе (1) второй степени.



Черт. 157.



Черт. 158.

Двучленъ $B^2 - 4AC$ въ данномъ случаѣ равенъ $4(4c^2x^2 + a^4)$, т. е. величинѣ завѣдомо положительной и, слѣдовательно, корни уравненія для y^2 всегда вещественные. Если послѣдній членъ $(x^2 - c^2)^2 - a^4$ положительный, то значенія для y^2 имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ и такъ какъ ихъ сумма $-2(x^2 + c^2)$ всегда отрицательна, то оба значенія y^2 отрицательныя и четыре значенія для y мнимыя. Для того же, чтобы уравненіе (1) допускало вещественные корни, необходимо, чтобы было

$$(x^2 - c^2)^2 - a^4 < 0,$$

что равносильно

$$(x^2 - c^2 - a^2)(x^2 - c^2 + a^2) < 0$$

и, слѣдовательно

$$x^2 < a^2 + c^2 \text{ и } x^2 > c^2 - a^2.$$

Тогда одно изъ значеній y^2 положительно, а другое отрицательно. Приходится разсматривать нѣсколько случаевъ. Если $a < c$, то кривая состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ оваловъ, лежащихъ вокругъ точекъ F и F_1. Если $a = c$, то кривая обращается въ лемнискату Бернулли; если же $a > c$, то кривая состоитъ изъ одной замкнутой вѣтви, которая при $a < c\sqrt{2}$ имѣетъ видъ, указанный на черт. 158,

ибо наибольшія значенія y^2 соотвѣтствуютъ точкамъ встрѣчи кривой съ кругомъ:

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

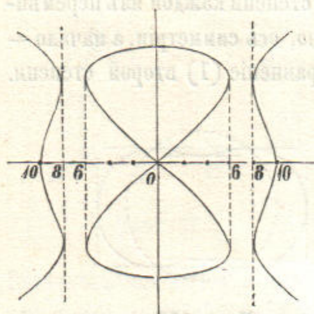
такъ какъ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(x^2 + y^2 - c^2)}{y(x^2 + y^2 + c^2)}.$$

Послѣдній же кругъ встрѣчаетъ кривую въ 4 точкахъ только при условіи $a < c\sqrt{2}$. Если же a равно или больше $c\sqrt{2}$, то указанный кругъ касается или же весь лежитъ внутри кривой, такъ что наибольшее значеніе y^2 соотвѣтствуетъ $x = 0$ и кривая называется *оваломъ Кассини* и имѣетъ видъ, подобный эллипсу.

441. *Courbe du diable.* Подъ этимъ оригинальнымъ названіемъ извѣстна кривая, опредѣляемая уравненіемъ

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0.$$



Черт. 159.

Рѣшая это уравненіе относительно y^2, получаемъ:

$$y^2 = 48a^2 \pm \sqrt{[x^2 - (8a)^2][x^2 - (6a)^2]}.$$

При $x^2 < 36a^2$ кривая образуетъ замкнутую вѣтвь, имѣющую видъ лемнискаты, перекрещивающуюся въ началѣ координатъ (см. черт. 159), причемъ касательныя въ этой точкѣ получаются изъ уравненія:

$$-96a^2y^2 + 100a^2x^2 = 0.$$

При $x^2 > 36a^2$ и $x^2 < 64a^2$ дѣйствительныхъ y не существуетъ. При

$$64a^2 \leqq x^2 \leqq 100a^2,$$

существуютъ четыре вещественныхъ значенія для y, такъ же какъ и при $x^2 < 36a^2$.

При $x > 100a^2$ существуютъ только два вещественныхъ значенія y. Кривая кромѣ указанной замкнутой вѣтви имѣетъ еще двѣ гиперболическія вѣтви, имѣющія своими асимптотами прямыя, опредѣляемыя уравненіемъ:

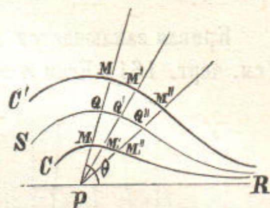
$$y^4 - x^4 = 0.$$

442. *Конхоиды.* Такъ называются кривыя линіи, получаемыя слѣдующимъ образомъ при помощи другихъ кривыхъ, совершенно произвольныхъ.

Возьмемъ какую нибудь кривую S, отнесенную къ полярной системы координатъ, причемъ за полюсъ взята точка P плоскости, а за полярную ось нѣкоторая прямая PR (см. черт. 160) и будемъ откладывать на всѣхъ радіусахъ векторахъ точекъ Q, Q', Q'' заданной кривой S, въ ту и другую сторону отъ точекъ Q, отрѣзки QM и QM_1, равные по длинѣ заданному отрѣзку a. Тогда геометри-

ческое мѣсто точекъ M, M', M''...., M_1, M'_1 M''_1.... есть не что иное, какъ кривая линія, называемая конхоидою, построенная на заданной кривой S. Полярное уравненіе конхоиды получается весьма просто. Пусть уравненіе заданной кривой S въ полярныхъ координатахъ имѣетъ видъ:

$$\rho = f(\theta).$$



Черт. 160.

Очевидно, что уравненіе конхоиды будетъ имѣть видъ

$$\rho = f(\theta) \pm a,$$

что можно написать въ такомъ видѣ

$$[\rho - f(\theta)]^2 = a^2.$$

Подставляя выраженія полярныхъ координатъ въ декартовыхъ, получаемъ общее уравненіе конхоиды въ декартовыхъ координатахъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left[\sqrt{x^2 + y^2} - f\left(arc\,tang\,\frac{y}{x}\right)\right]^2 = a^2.$$

Обозначая $\varphi(u) = -f(arctg\,u)$, получимъ общее уравненіе конхоидъ въ такомъ видѣ:

$$\left[\sqrt{x^2 + y^2} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right]^2 = a^2.$$

Разсмотримъ двѣ наиболѣе извѣстныя конхоиды, получающіяся при

$$\varphi(u) = -b\sqrt{1 + u^2} \quad \text{и при} \quad \varphi(u) = \frac{-b}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

443. *Конхоида Никомеда.*

$$\varphi(u) = -b\sqrt{1 + u^2}.$$

Эта конхоида получается, если возьмемъ за полюсъ начало координатъ, а за основную кривую S прямую $x = b$. Уравненіе такой конхоиды имѣетъ видъ:

$$\left[\sqrt{x^2 + y^2} - b\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right]^2 = a^2,$$

или

$$(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2x^2.$$

Рѣшая это уравненіе относительно y, получимъ:

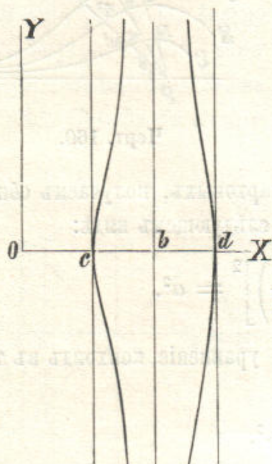
$$y = \frac{x}{x - b}\sqrt{(a - b + x)(a + b - x)}.$$

Прямая $x = b$ есть, очевидно, асимптота конхоиды, двѣ вѣтви которой при-

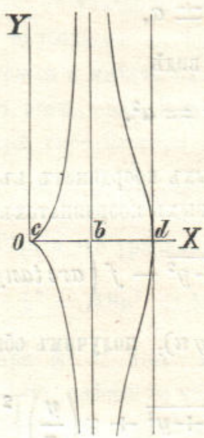
ближаются къ асимптотѣ съ разныхъ сторонъ. Надо различать три случая: $a < b$, $a = b$, $a > b$. Если $a < b$, то, обозначая $b - a = c$, $b + a = d$, получимъ:

$$y = \frac{x}{x - b} \sqrt{(x - c)(d - x)}.$$

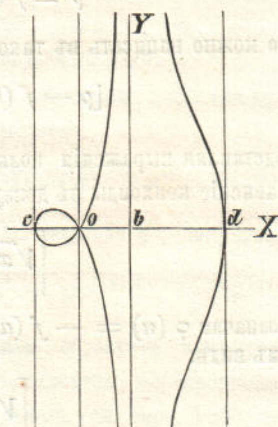
Кривая заключается между двумя параллельными прямыми: $x = c$, $x = d$ (см. черт. 161). Если $a = b$, то конхоида имѣетъ видъ, указанный на чертежѣ 162,



Черт. 161.



Черт. 162.



Черт. 163.

ибо тогда $c = 0$. Наконецъ, въ третьемъ случаѣ, если $a > b$, то c отрицательно и кривая имѣетъ видъ, указанный на черт. 163.

444. *Паскалева улитка.* Полюсъ взятъ въ началѣ координатъ; за основную кривую примемъ кругъ:

$$x^2 - bx + y^2 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ

$$\varphi(u) = -\frac{b}{\sqrt{1 + u^2}}$$

и кривая опредѣляется уравненіемъ:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{bx}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = a^2,$$

откуда

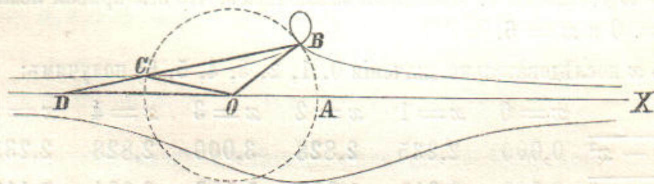
$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2 (x^2 + y^2).$$

445. Конхоида была введена Никомедомъ въ разсмотрѣніе для рѣшенія задачи о дѣленіи угла на три части. Относительно этой задачи было извѣстно уже въ древности правило для дѣленія угла въ 90° на три равныя части. Ясно, слѣдова-

тельно, что, разъ мы умѣемъ дѣлить уголъ въ 90°, мы можемъ дѣлить и уголъ въ 45°, ибо третья часть угла въ 45° есть половина третьей части угла въ 90°. Является вопросъ, какъ раздѣлить произвольно взятый уголъ на три равныя части. Wantzel въ своемъ сочиненіи: Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se resoudre avec la règle et le compas въ Journal de Mathématiques pures et appliquées за 1837 годъ (1 série II tome)—показываетъ, что задача трисекціи угла не возможна, за исключеніемъ вышеуказанныхъ двухъ и нѣкоторыхъ другихъ частныхъ случаевъ, если мы требуемъ, чтобы построеніе было сдѣлано только при помощи циркуля и линейки. Такъ напримѣръ, въ частности, невозможна трисекція угла въ 60°.

Если мы въ число приборовъ построенія кромѣ циркуля и линейки включимъ еще механическій приборъ построенія конхоиды Никомеда, то задача трисекціи угла сдѣлается возможною и будетъ рѣшаться слѣдующимъ образомъ.

Данъ уголъ AOB (см. черт. 164). Радіусомъ равнымъ r, описываемъ изъ вершины угла кругъ, который встрѣчаетъ стороны угла въ точкахъ A и B. При по-



Черт. 164.

мощи точки O, какъ полюса, вычерчиваемъ конхоиду Никомеда, для которой вспомогательная кривая S есть прямая OA, а соотвѣтственный отрѣзокъ a, откладываемый для образованія конхоиды на радіусахъ векторахъ, равенъ r. Эта конхоида пересѣчетъ проведенный кругъ въ точкѣ C, такъ что прямая BC образуетъ между кругомъ и прямою OA отрѣзокъ CD, равный r. Уголъ BDA есть искомая треть заданнаго угла BOA. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая уголъ BDA черезъ α, мы получимъ:

$$DC = CO = r;\ \angle COD = \alpha;\ \angle OCB = \angle CDO + \angle COD = 2\alpha;$$

$$CO = OB = r,\ \angle OBC = \angle OCB = 2\alpha;\ \angle AOB = \angle OBD + \angle ODB =$$

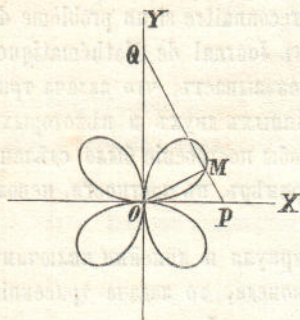
$$= 2\alpha + \alpha = 3\alpha,$$

что и требовалось доказать.

446. Въ 444 мы вывели уравненіе Паскалевой улитки. При $a = b$ изъ этого уравненія получается уравненіе *Кардіоиды*, съ которой мы еще встрѣтимся далѣе при разсмотрѣніи рулетъ.

447. *Четырехлепестный вѣнчикъ*. Даны двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя OX и OY, по которымъ двигаются концы прямой OQ, постоянной по

величинѣ; изъ точки O опускаемъ перпендикуляръ OM на эту прямую; найти геометрическое мѣсто точки M.



Черт. 165.

Въ прямолинейныхъ координатахъ эта кривая выражается уравненіемъ шестой степени

$$(x^2+y^2)^3-a^2x^2y^2=0$$

и имѣетъ видъ указанный на черт. 165.

448. Разсмотримъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$2y=\pm\sqrt{6x-x^2}\pm\sqrt{6x+x^2}\pm\sqrt{36-x^2}.$$

Предложенная кривая, очевидно, восьмого порядка, ибо каждому значенію x соотвѣтствуютъ восемь значеній для y, получаемыя при разныхъ комбинаціяхъ знаковъ при корняхъ. Очевидно, что если абсцисса x отрицательна, то ордината мнимая, подобнымъ же образомъ ордината мнимая при x большемъ 6. Отсюда мы заключаемъ, что вся кривая лежитъ въ границахъ $x=0$ и $x=6$.

Дадимъ x послѣдовательно значенія 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; получимъ:

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
$\sqrt{6x-x^2}$	0,000	2,235	2,828	3,000	2,828	2,235	0,000
$\sqrt{6x+x^2}$	0,000	2,645	4,000	5,196	6,324	7,416	8,484
$\sqrt{36-x^2}$	6,000	5,916	5,656	5,196	4,470	3,316	0,000
y при $(+++)$	3,000	5,398	6,242	6,696	6,811	6,483	4,242
y » $(-++)$	3,000	3,163	3,414	3,696	3,983	4,248	4,242
y » $(+-+)$	3,000	2,753	2,242	1,500	0,487	—0,933	—4,242
y » $(++-)$	—3,000	—0,518	0,586	1,500	2,341	3,167	4,242

Результаты четырехъ другихъ перестановокъ будутъ отличаться только знаками. Кривая имѣетъ видъ, представленный на чертежѣ 166.

449. *Параболы высшихъ порядковъ*. Такъ называются кривыя, опредѣляемыя уравненіемъ

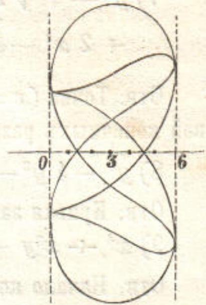
$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots.+a_{n-1}x+a_n.$$

Каждому x соотвѣтствуетъ одинъ опредѣленный вещественный y, причемъ для большихъ по численной величинѣ значеніяхъ x знакъ y будетъ совпадать со знакомъ перваго члена a_0x^n, а потому, если n четное, то, при большихъ по численной величинѣ x, знакъ y совпадаетъ со знакомъ a_0, такъ что, если уравненіе

$$0=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots.+a_{n-1}x+a_n$$

не имѣетъ вещественныхъ корней, то вся кривая лежитъ по одну сторону оси,

судя по знаку a_0. Если же n число не четное, то при большихъ по численной величинѣ положительныхъ и отрицательныхъ x, знакъ y будетъ различный и кривая пересѣчетъ ось x-овъ по крайней мѣрѣ въ одной точкѣ, что совпадаетъ съ извѣстной теоремой алгебры, что всякое уравненіе нечетной степени имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень.



Черт. 166.

Параболу n-го порядка можно заставить проходить черезъ $n+1$ точекъ, указанныхъ на $n+1$ различныхъ ординатахъ. Пусть заданныя $n+1$ точекъ будутъ имѣть координаты: x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; ... x_n, y_n. По сказанному условію между числами x_0, x_1, ... x_n нѣтъ равныхъ. Для того, чтобы провести параболу черезъ указанныя $n+1$ точекъ, необходимо опредѣлить $n+1$ коэффиціентовъ при помощи ряда линейныхъ уравненій:

$$y_0 = a_0 x_0^{\,n} + a_1 x_0^{\,n-1} + a_2 x_0^{\,n-2} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n$$

$$y_1 = a_0 x_1^{\,n} + a_1 x_1^{\,n-1} + a_2 x_1^{\,n-2} + \dots + a_{n-1} x_1 + a_n$$

. . . .

$$y_n = a_0 x^n_{\,n} + a_1 x_n^{\,n-1} + a_2 x_n^{\,n-2} + \dots + a_{n-1} x_n + a_n.$$

При поставленномъ условіи послѣдняя система для коэффиціентовъ a_0, a_1, ... a_n даетъ вполнѣ опредѣленную систему рѣшеній (см. прибавленіе).

На этомъ свойствѣ параболъ высшаго порядка основаны пріемы интерполированія.

Задачи.

Построить кривыя, опредѣляемыя слѣдующими уравненіями:

1) $x = by + cy^2 + y^4$. (Параболы 4-го порядка).

2) $y^4 + 2x^2 y^2 + x^4 + 6axy^2 - 2ax^3 + a^2 x^2 = 0$.

Отв. Кривая имѣетъ видъ буквы *в*. Начало координатъ и точка $(x = a,\ y = 0)$ двойныя.

3) $y^2 - 2x^2 y - 3x^4 - 4x^3 = 0$.

Отв. Начало координатъ точка возврата перваго рода. Кривая состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ параболическихъ вѣтвей.

4) $x^4 - x^2 y^2 + a^4 = 0$.

Отв. Кривая состоитъ изъ четырехъ гиперболическихъ вѣтвей.

5) $y^4 - 2x^2 y^2 + x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0$.

Отв. Начало координатъ тройная точка. Кривая имѣетъ два листка конечныхъ размѣровъ и состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ параболическихъ вѣтвей.

6) $y^4 - axy^2 + x^4 = 0$.

Отв. Кривая имѣетъ въ началѣ координатъ тройную точку, состоящую въ совмѣщеніи обыкновенной точки съ точкою возврата перваго рода.

7) $y^4 - 4.\sqrt{2}.y^3 + 8\,y^2 - 2\,x^2y^2 + 4.\sqrt{2}\,x^2y + 6\,xy^2 - 12.\sqrt{2}\,xy +$
$+ 2\,x^4 - 10\,x^3 + 14\,x^2 - 2\,x = 0.$

Отв. Точка ($x = 1$, $y = \sqrt{2}$) тройная, въ которой сходятся три листка кривой конечныхъ размѣровъ.

8) $y^4 - 4\,y^3 - 8\,y^2 + 4\,x^4 - 8.\sqrt{2}\,x^2 + 8 = 0.$

Отв. Кривая замкнутая; имѣетъ двѣ двойныя точки на оси x-овъ.

9) $x^4 + x^3y - x^2y^2 - 2\,x^2y + xy^2 + y^2 = 0.$

Отв. Начало координатъ точка возврата второго рода.

10) $x^5 + bx^4 - a^3y^2 = 0.$

Отв. Въ началѣ координатъ двойная точка, вѣтви въ которой имѣютъ общею касательною ось x-овъ. Разобрать различные случаи заданія чиселъ a и b.

11) $y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = 0.$

Отв. Кривая имѣетъ въ началѣ координатъ тройную точку.

12) Найти геометрическое мѣсто вершины перемѣнной параболлы, которая имѣетъ неподвижный фокусъ и касается коническаго сѣченія, имѣющаго тотъ-же фокусъ.

Отв. Паскалева улитка.

13) Найти геометрическое мѣсто вершинъ и фокусовъ равносторонней гиперболы, имѣющей постоянный центръ и проходящей черезъ заданную точку.

14) Найти мѣсто центровъ равносторонней гиперболы заданныхъ размѣровъ проходящей черезъ двѣ заданныя точки.

15) Парабола вращается вокругъ фокуса. Найти геом. мѣсто точекъ касанія касательныхъ, проведенныхъ параллельно заданной прямой.

Замѣчательнѣйшія трансцендентныя кривыя.

450. *Синусоида.* Уравненіе этой кривой имѣетъ видъ: $y = sinx$. При x равномъ $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ соотвѣтствующая ордината $y = 0$ и, слѣдовательно, кривая безчисленное множество разъ встрѣчаетъ ось x-овъ. $y = +1$ для значеній

$$x = \frac{4\,k + 1}{2}\,\pi \text{ и } y = -1 \text{ для } x = \frac{4\,k + 3}{2}\,\pi,$$

гдѣ k положительное или отрицательное цѣлое число или нуль. (см. черт. 167).

Уравненіе $y = cosx$ опредѣляетъ ту же синусоиду, только подвинутую на длину, равную $\frac{\pi}{2}$, вдоль оси x-овъ.

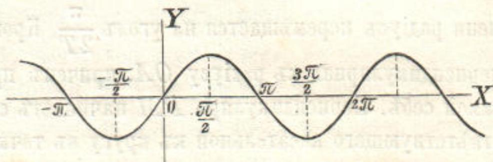
451. *Кривая:* $y = tgx$. Эта кривая состоитъ изъ безчисленнаго множества от-

дѣльныхъ вѣтвей, имѣющихъ ассимптотами прямыя, опредѣляемыя уравненіемъ

$$x = \frac{2k+1}{2}\pi,$$

гдѣ k какое угодно положительное или отрицательное цѣлое число или нуль. (См. черт. 168).

452. *Логариѳмика*. Эта кривая опредѣляется уравненіемъ $y = \log x$ и имѣетъ асимптотою отрицательное направленіе оси y-овъ и встрѣчаетъ ось x-овъ въ точкѣ, абсцисса которой равна единицѣ.

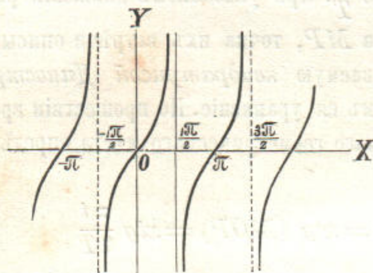


Черт. 167.

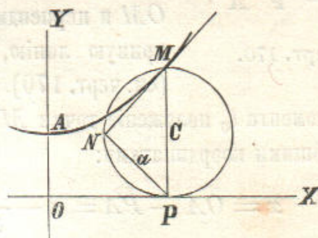
453. *Цѣпная линія*. Такъ называется кривая линія, опредѣляемая уравненіемъ:

$$y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

Названіе свое цѣпная линія получила отъ того, что по ней располагается тяжелая гибкая нерастяжимая нить, укрѣпленная въ двухъ ея концахъ (см. черт. 169). При $x = 0$, $y = a$ получается вершина цѣпной линіи; ось y-овъ есть ось симмет-



Черт. 168.

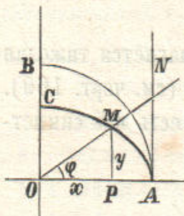


Черт. 169.

ріи. Цѣпная линія обладаетъ весьма замѣчательными свойствами, доказательство которыхъ мы находимъ въ правилахъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Здѣсь же укажемъ безъ доказательства на главнѣйшія. На ординатѣ MP, какъ на діаметрѣ, строимъ кругъ, касающійся въ точкѣ P оси x-овъ. Изъ точки P проводимъ хорду круга PN, равную a. Тогда, если соединить точку M съ точкою N, то прямая MN будетъ касательная къ цѣпной линіи въ точкѣ M.—Площадь треугольника MNP равна половинѣ площади $OAMP$, заключенной между тремя прямыми и частью цѣпной линіи.—Для различныхъ точекъ M соотвѣтственныя точки N лежатъ на особенной трансцендентной кривой, называемой *тракто/ріей Гюйгенса*, основное свойство которой состоитъ въ томъ, что прямая NP есть ея касательная въ точкѣ N и, слѣдовательно, отрѣзокъ между точкой касанія

и осью x-овъ равенъ постоянной величинѣ a. Длина дуги цѣпной линіи отъ вершины A до точки M равна длинѣ MN, а потому тракторія Гюйгенса можетъ быть разсматриваема, какъ развертка (эвольвента) цѣпной линіи.

454. *Квадратриса Динострата.* Радіусъ OM вращается вокругъ начала координатъ равномѣрно, причемъ въ нѣкоторый моментъ времени t_0 совпадаетъ съ горизонтальнымъ радіусомъ OA, по истеченіи же промежутка времени T этотъ радіусъ, двигаясь по направленію, обратному движенію часовой стрѣлки, совпадетъ съ вертикальнымъ радіусомъ OB, описавъ уголъ, равный $\frac{\pi}{2}$; въ единицу же времени радіусъ перемѣщается на уголъ $\frac{\pi}{2T}$. Кромѣ того перемѣщается прямая PM, перпендикулярная къ радіусу OA, причемъ при движеніи остается параллельной самой себѣ. Перпендикуляръ PM начинаетъ свое движеніе съ положенія AN, соотвѣтствующаго касательной къ кругу въ точкѣ A, причемъ основаніе его P перемѣщается равномѣрно по радіусу AO отъ A къ O. Начинается движеніе съ момента t_0, причемъ основаніе перпендикуляра P, двигаясь равномѣрно, проходитъ разстояніе AO во время T; слѣдовательно, обозначая радіусъ круга черезъ a, мы замѣчаемъ, что въ единицу времени перпендикуляръ перемѣщается на разстояніе $\frac{a}{T}$. При указанномъ движеніи радіуса OM и перпендикуляра MP, точка ихъ встрѣчи описываетъ кривую линію, называемую *квадратрисой Динострата* (см. черт. 170). Найдемъ ея уравненіе. По прошествіи времени t отъ момента t_0 положеніе точки M искомаго геометрическаго мѣста опредѣлится слѣдующими координатами:



Черт. 170.

$$x = OA - PA = a - \frac{a}{T}\,t,\; y = xtg\;(MOP) = xtg\,\frac{\pi t}{2T}.$$

Исключая $\frac{t}{T}$, получимъ искомое уравненіе квадратрисы:

$$y = xtg\,\frac{\pi\,(a - x)}{2\,a}.$$

Это уравненіе можно переписать такъ:

$$y = \frac{x}{tg\,\frac{\pi\,x}{2\,a}},$$

ибо

$$tg\,\frac{\pi\,(a - x)}{2\,a} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\,x}{2\,a}\right) = \frac{1}{tg\,\frac{\pi\,x}{2\,a}}.$$

Квадратриса пересѣкаетъ ось x-овъ въ точкѣ A, а ось y-въ въ точкѣ C, имѣющей ординату OC, равную $\frac{2a}{\pi} = a.\ 0{,}6366\ldots$

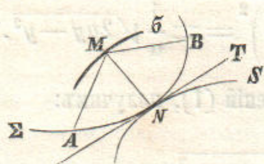
455. *Рулеты.* Даны двѣ кривыя на плоскости S и Σ, касающіяся другъ друга въ точкѣ N, другими словами, имѣющія общую точку N и общую касательную NT. Предположимъ теперь, что кривая S неподвижна, а кривая Σ, оставаясь касательною къ ней, катится безъ скольженія вдоль по ней. Тогда всякая точка M, неизмѣнно связанная съ кривою Σ, опишетъ на плоскости нѣкоторую кривую σ, называемую *рулетой* (см. черт. 171).

Относительно всѣхъ рулетъ Декартомъ доказана слѣдующая теорема:

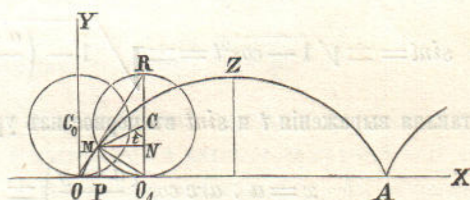
Если соединить прямою точку M, вычерчивающую рулету, съ точкою N касанія кривыхъ S и Σ, то получимъ нормаль MN къ рулетѣ σ въ точкѣ M.

Изъ этой теоремы, какъ слѣдствіе, вытекаетъ весьма простой способъ построенія касательной къ рулетѣ.

Катаніе безъ скольженія кривой Σ по кривой S понимается въ томъ смыслѣ, что точка касанія этихъ двухъ кривыхъ измѣняетъ свое положеніе, перемѣщаясь



Черт. 171.



Черт. 172.

по обѣимъ такимъ образомъ, что проходимыя ею дуги на обѣихъ кривыхъ одинаковы.

456. *Циклоида.* Такъ называется рулета, образуемая движеніемъ какой-либо точки окружности круга даннаго радіуса a, катящагося безъ скольженія по данной прямой.

Выведемъ уравненіе циклоиды. Для этой цѣли заданную линію примемъ за ось x-овъ (см. черт. 172) и начало координатъ возьмемъ въ точкѣ касанія съ данной прямой окружности круга въ точкѣ, описывающей циклоиду. Пусть эта точка будетъ O. Покативъ кругъ C_0 по прямой OX, замѣтимъ слѣдующее: точка O перейдетъ, описавъ дугу циклоиды, въ нѣкоторую точку M и новая точка касанія будетъ O_1, а новый центръ — C_1. Соединимъ C_1 съ M и O_1. Точка M взята нами произвольно и слѣдовательно это какая угодно точка циклоиды. Координаты точки M суть: $OP = x$, $PM = y$. Намъ надо найти уравненіе между x и y или, что въ данномъ случаѣ удобнѣе, выраженіе x и y въ функціяхъ отъ одной независимой перемѣнной, что представляетъ болѣе общій способъ опредѣленія кривой. За независи-

мую перемѣнную примемъ уголъ поворота круга $MC_1O_1 = t$. Такъ какъ катаніе совершается безъ скольженія то, $OO_1 = \smile MO_1$. Но дуга $MO_1 = \angle MC_1O_1\, a = at$; слѣдовательно: $OO_1 = at$. (Замѣтимъ при этомъ, что уголъ долженъ быть выраженъ въ частяхъ радіуса).

$$OP = OO_1 - O_1P = OO_1 - MN = at - a\, sint;\ x = at - a\, sint = a\,(t - sint);$$

$$C_1O_1 = O_1N + C_1N = MP + C_1N = y + a\, cost;\ y = a - a\, cost = a\,(1 - cost).$$

Итакъ, два уравненія циклоиды, дающія выраженія координатъ какой угодно ея точки въ функціяхъ t суть:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,(t - sint),\\ y &= a\,(1 - cost). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если мы желаемъ получить одно уравненіе между x и y, то надо исключить t изъ уравненій (1). Для этого изъ второго изъ уравненій (1) находимъ:

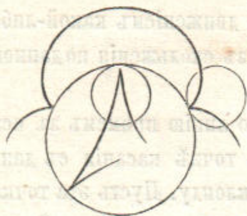
$$cost = 1 - \frac{y}{a} = \frac{a-y}{a};\ t = arc\cos\left(\frac{a-y}{a}\right);$$

$$sint = \pm\sqrt{1 - cos^2 t} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{a-y}{a}\right)^2} = \pm\frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2}.$$

Подставляя выраженія t и $sint$ въ первое изъ уравненій (1), получимъ:

$$x = a\,.\, arc\cos\left(\frac{a-y}{a}\right) \pm \sqrt{2ay - y^2}.$$

Такъ какъ уголъ t можетъ принимать всевозможныя значенія, какъ положительныя, измѣняясь въ одну сторону до ∞, такъ и отрицательныя, измѣняясь въ другую сторону до $-\infty$, то циклоида будетъ имѣть безчисленное множество вѣтвей. Каждая изъ вѣтвей циклоиды отъ точки O на оси x-овъ до слѣдующей точки A на той же оси можетъ быть раздѣлена на двѣ симметричныя половины OZ и ZA. Очевидно, что $OA = 2\pi\, a$, то есть окружности образующаго круга и, слѣдовательно, абсцисса наивысшей точки Z будетъ πa.



Черт. 173.

457. *Эпициклоида* и *гипоциклоида* (см. черт. 173). Если основаніе, по которому катится кругъ, не есть прямая, какъ это предполагалось въ случаѣ циклоиды, а также кругъ, то каждая точка перваго круга описываетъ кривую, называемую эпициклоидою или гипоциклоидою, смотря по тому, по внѣшней или по внутренней сторонѣ неподвижнаго круга катится подвижный кругъ. Вейсенборнъ въ своемъ сочиненіи: Die cyklischen Curven различаетъ при внутреннемъ касаніи два случая смотря

по тому, который изъ двухъ круговъ болѣе—неподвижный или катящійся; кривую, получающуюся въ первомъ случаѣ, онъ называетъ *гиперциклоидою,* а во второмъ—*перициклоидою.* Вообразимъ теперь, что при образованіи эпициклоиды оба круга находятся въ такомъ положеніи, что производящая точка кривой находится на окружности неподвижнаго круга и примемъ діаметръ послѣдняго, проходящій черезъ разсматриваемую точку, за ось x-овъ, а центръ его за начало координатъ. Назовемъ радіусъ неподвижнаго круга r, а катящагося ρ; предполагая, что катящійся кругъ находится въ положеніи, отличномъ отъ начальнаго, обозначимъ буквой φ уголъ между прямою, соединяющею центры обоихъ круговъ, и осью x-овъ. Въ такомъ случаѣ эпициклоида опредѣлится уравненіями:

$$x = (r + \rho).\ cos\varphi - \rho.\ cos\,\frac{r+\rho}{\rho}\,\varphi,$$

$$y = (r + \rho).\ sin\varphi - \rho.\ sin\,\frac{r+\rho}{\rho}\,\varphi.$$

Вставляя въ это уравненіе $-\rho$ вмѣсто ρ, получимъ для гипоциклоиды:

$$x = (r - \rho).\ cos\,\varphi + \rho.\ cos\,\frac{r-\rho}{\rho}\,\varphi,$$

$$y = (r - \rho).\ sin\,\varphi - \rho.\ sin\,\frac{r-\rho}{\rho}\,\varphi.$$

458. Эпициклоида и гипоциклоида принадлежатъ къ числу трансцендентныхъ кривыхъ, если отношеніе радіусовъ неподвижнаго и катящагося круговъ есть число несоизмѣримое. Въ томъ же случаѣ, когда это число раціональная дробь, эпициклоида есть кривая замкнутая и алгебраическая.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ $\frac{m}{n}$ отношеніе радіусовъ $\frac{r}{\rho}$, гдѣ m и n числа цѣлыя, не имѣющія общихъ дѣлителей, получимъ, обозначая $\frac{\varphi}{n}$ черезъ α, уравненіе эпициклоиды въ такомъ видѣ:

$$x = (r + \rho).\ cos\,n\alpha - \rho.\ cos\,(m + n)\,\alpha.$$

$$y = (r + \rho).\ sin\,n\alpha - \rho.\ sin\,(m + n)\,\alpha.$$

Обозначая $sin\ \alpha$ черезъ ξ, выразимъ x и y въ такомъ видѣ:

$$x = X_1 + X_2.\sqrt{1-\xi^2},$$
$$y = X_3 + X_4.\sqrt{1-\xi^2},$$

гдѣ X_1, X_2, X_3, X_4 суть цѣлыя функціи (полиномы) отъ ξ. Послѣднее уравненіе можно переписать въ такомъ видѣ:

$$(x - X_1)^2 = X_2^{\,2}\,(1 - \xi^2),$$
$$(y - X_3)^2 = X_4^{\,2}\,(1 - \xi^2).$$

Черезъ исключеніе (см. прибавленіе) изъ послѣднихъ двухъ уравненій буквы ξ получается искомое уравненіе эпициклоиды. Такъ напримѣръ, если радіусы обоихъ круговъ равны между собою, то получается, какъ частный случай эпициклоиды, такъ называемая *кардіоида*, уравненіе которой:

$$x = 2r.\cos\varphi - r.\cos 2\varphi,$$
$$y = 2r.\sin\varphi - r.\sin 2\varphi,$$

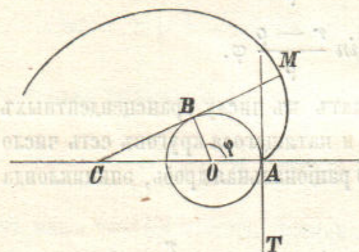
или, по исключеніи угла φ:

$$(r^2 + y^2)^2 - 6r^2(x^2 + y^2) + 8r^3 x - 3r^4 = 0.$$

459. Кромѣ указанныхъ циклоидъ вводятся въ разсмотрѣніе такъ называемыя *сжатыя* и *растянутыя* циклоиды, эпициклоиды и гипоциклоиды.

Растянутыя циклоиды описываются внутренними точками катящагося круга, а сжатыя—внѣшними.

460. *Развертка круга*. Предположимъ, что вдоль по окружности круга намотана нитка, свободный конецъ которой приходится въ точкѣ A (см. черт. 174). Будемъ, двигая карандашъ, привязанный къ свободному концу, и натягивая имъ постоянно нитку, сматывать нитку съ круга. Тогда остріе карандаша опишетъ на плоскости кривую линію, называемую *разверткой круга* (см. черт. 174). Возьмемъ какую нибудь точку M, принадлежащую разверткѣ, не указывая, какую именно; тогда эта точка M, очевидно, будетъ лежать на нѣкоторой касательной MB, причемъ разстояніе точки M до точки касанія B будетъ равно длинѣ дуги круга между точками A и B, такъ что мы видимъ, что развертка круга можетъ быть разсматриваема какъ рулета, описываемая точкой M касательной MB при катаніи этой касательной вдоль по кругу.



Черт. 174.

Обозначимъ радіусъ заданнаго круга черезъ a, уголъ AOB черезъ φ; тогда получимъ для координатъ точки M выраженія:

$$x = r.\cos\varphi + r.\varphi.\sin\varphi,$$
$$y = r.\sin\varphi - r.\varphi\cos\varphi.$$

Развертка круга есть трансцендентная кривая и является частнымъ случаемъ кривыхъ, называемыхъ развертками или эвольвентами, свойства которыхъ излагаются въ курсахъ дифференціальнаго исчисленія. Замѣтимъ только, что разсматриваемая кривая имѣетъ видъ спирали, образующей безчисленное множество завитковъ вокругъ центра неподвижнаго круга.

Кривыя въ полярныхъ координатахъ.

461. Разсматривая уравненіе коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ, мы видѣли, что уравненіе этой кривой имѣетъ видъ:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

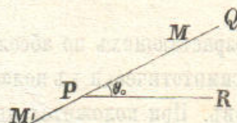
Вообще говоря, если задано какое нибудь уравненіе:

$$f(\rho, \theta) = 0, \tag{*}$$

гдѣ ρ и θ полярныя координаты нѣкоторой точки на плоскости, то это уравненіе опредѣляетъ нѣкоторую кривую линію. Для построенія кривой по уравненію (*), рѣшимъ его относительно радіуса вектора ρ; получимъ:

$$\rho = F(\theta).$$

Для построенія кривой по точкамъ останется выбирать различныя значенія θ и подставлять ихъ въ функцію F. Тогда для каждаго значенія θ_0 получимъ одно или нѣсколько значеній для ρ. Числу θ_0 соотвѣтствуетъ всегда нѣкоторое опредѣленное направленіе PQ. Если для этого значенія θ_0 соотвѣтственное значеніе функціи F выходитъ положительнымъ, то длину ρ, указываемую этимъ послѣднимъ значеніемъ, необходимо откладывать по направленію PQ; получится нѣкоторая точка M. Если же сооотвѣтственное значеніе функціи F выйдетъ отрицательнымъ, то длину, указываемую абсолютной величиною этой функціи, придется откладывать по направленію обратному; получится такимъ образомъ нѣкоторая точка M_1 (см. черт. 175). Построивъ для достаточно большого числа значеній θ соотвѣтствующія точки и соединивъ ихъ непрерывною линіею, мы получимъ очертаніе кривой линіи, опредѣляемой уравненіемъ (*). Уголъ θ можетъ мѣняться отъ 0 до $+\infty$ въ одну сторону и отъ 0 до $-\infty$ въ другую сторону, причемъ одно и то же направленіе, указываемое значеніемъ θ_0, получается при безчисленномъ множествѣ значеній этого угла, заключающихся въ формулѣ $\theta_0 + 2k\pi$, гдѣ k любое цѣлое положительное или отрицательное число или нуль.



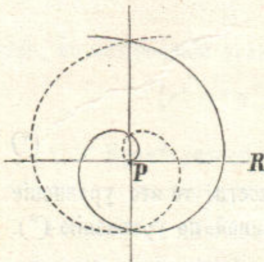
Черт. 175.

462. Итакъ мы видимъ, что, при увеличеніи θ отъ 0 до ∞, радіусъ векторъ безчисленное множество разъ оборачивается вокругъ полюса, а потому, всякій разъ, когда при увеличеніи θ отъ 0 до ∞ функція F возрастаетъ, или же когда она убываетъ (постоянно въ этомъ промежуткѣ), получаются кривыя, называемыя *спиралями*. Простѣйшія изъ нихъ получили особыя названія.

1) *Архимедова спираль.* Такъ называется кривая линія, опредѣляемая уравненіемъ:

$$\rho = a\theta.$$

Уравненіе показываетъ, что эта кривая линія происходитъ отъ равномѣрнаго движенія точки вдоль по радіусу вектору, вращающемуся равномѣрно вокругъ полюса (см. черт. 176).



Черт. 176.

2) *Гиперболическая спираль.* Кривая опредѣляется уравненіями:

$$\rho = \frac{a}{\theta}.$$

При $\theta = 0$, $\rho = \infty$. Кривая имѣетъ асимптотою прямую, параллельную полярной оси и отстоящую отъ нея на разстояніе a. По мѣрѣ увеличенія θ отъ 0 до ∞, ρ убываетъ до 0 и кривая, образуя безчисленное множество завитковъ вокругъ полюса, приближается къ нему (см. черт. 177), такъ что полюсъ является ея асимптотической точкой.

3) *Логариѳмическая спираль.* Такъ назвалъ Яковъ Бернулли кривую, опредѣляемую уравненіемъ:



Черт. 177.

$$\rho = a.\, e^{m\theta},$$

гдѣ a и m нѣкоторые численные коэффиціенты, а e — основаніе Нэперовыхъ логариѳмовъ. Эта кривая проходитъ черезъ точку полярной оси, отстоящую на растояніи a отъ полюса. При отрицательныхъ θ, возрастающихъ по абсолютной величинѣ до безконечности, спираль приближается асимптотически къ полюсу, образуя безчисленное множество съуживающихся завитковъ. При положительныхъ же θ, возрастающихъ отъ 0 до ∞, кривая образуетъ безчисленное множество расходящихся завитковъ вокругъ полюса*) (см. черт. 178).

4) *Lituus* (см. *Cotes*. Harmonia mensurarum). Такъ называется кривая, опредѣляемая уравненіемъ:

$$\rho = a.\, \theta^{n}.$$

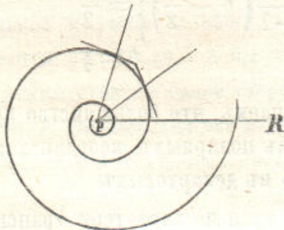
463. *Асимптоты кривыхъ въ полярныхъ координатахъ.* Если безконечная вѣтвь кривой имѣетъ прямолинейную асимптоту, то для безконечно далекой точки

---

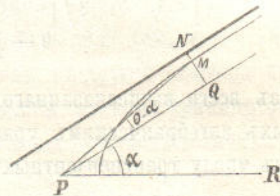
*) Декартъ первый занимался логариѳмической спиралью, причемъ замѣтилъ главнѣйшее ея свойство, заключающееся въ томъ, что касательная съ радіусомъ векторомъ точки касанія составляетъ постоянный уголъ. Яковъ Бернулли удивлялся замѣчательнымъ свойствамъ этой кривой линіи (которыя излагаются обыкновенно въ курсѣ диффер. исч.), называлъ ее spira mirabilis и желалъ, чтобы изображеніе этой кривой было помѣщено надъ его могилой съ эпиграфомъ: eadem mutata resurget.

этой вѣтви радіусъ векторъ составитъ съ асимптотой уголъ безконечно малый и будетъ безконечно великъ; такъ что будетъ $\rho = \infty$ для опредѣленнаго значенія α угла θ и это значеніе будетъ уголъ асимптоты съ полярной осью. Слѣдовательно, отыскивая значенія α угла θ, соотвѣтствующія $\rho = \infty$, получимъ направленія, могущія соотвѣтствовать асимптотамъ.

Кромѣ того необходимо, чтобы разстояніе MQ (см. черт. 179) безконечно далекой точки M до прямой, проведенной черезъ полюсъ параллельно асимптотѣ,



Черт. 178.



Черт. 179.

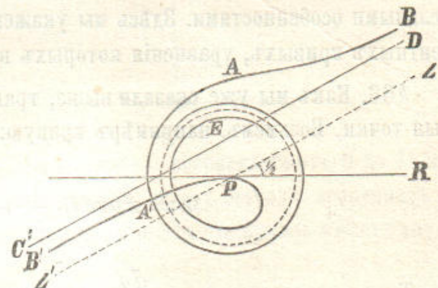
стремилось къ конечному предѣлу, равному растоянію асимптоты до полюса. Это разстояніе $MQ = \delta$ имѣетъ значеніе $\rho\, sin(\theta - \alpha)$. Надо, слѣдовательно, искать предѣлъ δ для $\theta = \alpha$ и $\rho = \infty$

$$\rho\, sin(\theta - \alpha) = \rho(\theta - \alpha)\frac{sin(\theta - \alpha)}{(\theta - \alpha)}$$

то есть величину

$$\delta = \text{пред.}\ [\rho(\theta - \alpha)]_{\theta = \alpha}\,.$$

464. *Кривая*: $\rho = a\,\dfrac{2\theta}{2\theta - 1}$.



Черт. 180.

При $\theta = 0$ величина ρ обращается въ нуль; при $\theta = \frac{1}{2}$, ρ обращается въ безконечность. Проводимъ черезъ полюсъ прямую $L'L$, которая съ полярною осью составила бы уголъ равный $\frac{1}{2}$ (см. черт. 180). При измѣненіи θ отъ 0 до $\frac{1}{2}$, ρ отрицательно и измѣняется отъ 0 до $-\infty$ и мы получаемъ безконечную вѣтвь $PA'B'$, касательную къ полярной оси. При увеличеніи θ отъ $\frac{1}{2}$ до ∞, ρ дѣлается положительнымъ и уменьшается отъ ∞ до a: такимъ образомъ получается безконечная вѣтвь AB, которая дѣлаетъ безконечное число оборотовъ около круга, описаннаго изъ полюса, какъ центра, радіусомъ равнымъ a, постоянно приближаясь къ кругу. Когда θ измѣняется отъ 0 до $-\infty$, ρ остается положительнымъ и уве-

личивается отъ 0 до a, и получается вѣтвь PE внутри круга; эта вѣтвь дѣлаетъ безконечное число оборотовъ, асимптотически приближаясь къ кругу.

Обѣ безконечныя вѣтви AB и $A'B'$ этой кривой имѣютъ асимптоту DC', наклоненную къ оси x-овъ подъ угломъ $\varphi = \frac{1}{2}$. Чтобы найти разстояніе этой асимптоты отъ полюса, необходимо замѣтить слѣдующее:

$$\text{пред.}\left[\rho\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\right]_{\theta=\frac{1}{2}} = \text{пред.}\left[\frac{a2\theta}{2\theta-1}\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\right]_{\theta=\frac{1}{2}} = \frac{a}{2}.$$

465. Изъ всего вышесказаннаго мы заключаемъ, что большинство кривыхъ, опредѣляемыхъ алгебраическимъ уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ, принадлежитъ къ числу трансцендентныхъ кривыхъ въ декартовыхъ.

Что касается трансцендентныхъ кривыхъ, то судя по характеру трансцендентныхъ функцій, входящихъ въ уравненіе кривой въ декартовыхъ координатахъ, геометрическій видъ этихъ кривыхъ, ихъ форма, могутъ представлять всевозможныя особенности. Анализъ безконечно-малыхъ, главнымъ образомъ интегральное исчисленіе, будучи источникомъ безчисленнаго числа новыхъ трансцендентныхъ функцій въ анализѣ, даетъ мѣсто трансцендентнымъ кривымъ, обладающимъ весьма замѣчательными особенностями. Здѣсь мы укажемъ на нѣкоторыя особенности трансцендентныхъ кривыхъ, уравненія которыхъ выражены въ элементарномъ видѣ.

466. Какъ мы уже сказали выше, трансцендентныя кривыя могутъ имѣть угловыя точки. Возьмемъ, напримѣръ кривую:

$$y = x\, arc\, tg\, \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\, lg\, (1 + x^2).$$

Такъ какъ производная $\frac{dy}{dx}$ равна $arc\, tg\, \frac{1}{x}$, то мы видимъ, что функція возрастаетъ при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ x и, напротивъ того, убываетъ при всѣхъ отрицательныхъ, ибо, при положительныхъ x, $arc\, tg\, \frac{1}{x}$, а, слѣдовательно, и производная, есть число положительное, а при отрицательныхъ—отрицательное.

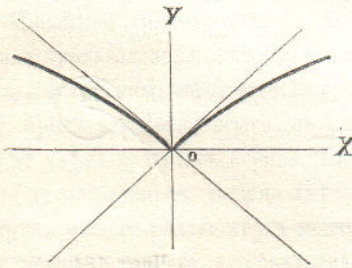
Если положительныя значенія x мы будемъ уменьшать, то $arc\, tang\, \frac{1}{x}$ будетъ стремиться къ предѣлу $+\frac{\pi}{2}$. Наоборотъ, если x будетъ принимать отрицательныя значенія, убывающія по абсолютной величинѣ до нуля, то предѣломъ $arc\, tang\, \frac{1}{x}$ будетъ $-\frac{\pi}{2}$. Итакъ, слѣдовательно, мы получаемъ кривую, которая въ началѣ ко-

ординатъ имѣетъ угловую точку, двѣ касательныя которой образуютъ углы съ осью x-овъ, имѣющіе тангенсами числа $+\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$ (см. черт. 181).

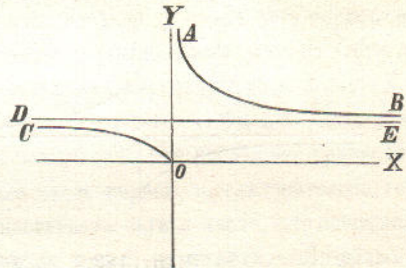
467. Приведемъ еще примѣръ трансцендентныхъ кривыхъ, имѣющихъ точки перерыва. Пусть имѣемъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ:

$$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

Дадимъ x положительное, весьма малое, значеніе; тогда y будетъ величина положительная и очень большая; при возростаніи x отъ 0 до $+\infty$, y постоянно уменьшается отъ ∞ до 1 и мы получаемъ вѣтвь AB (см. черт. 182), которая имѣетъ асимптотою съ одной стороны ось y-овъ, съ другой стороны прямую DE, проведенную параллельно оси x-овъ на разстояніи, равномъ единицѣ отъ нея. Когда дадимъ x значеніе отрицательное, но весьма малое, y будетъ величина положительная и очень малая; при измѣненіи x отъ 0 до $-\infty$, y возрастаетъ отъ 0 до 1; получается такимъ образомъ вѣтвь OC, проходящая черезъ начало координатъ и имѣющая асимптотой прямую DE. Въ началѣ координатъ эта кривая имѣетъ точку перерыва.



Черт. 181.



Черт. 182.

468. Что касается алгебраическихъ кривыхъ, то можно доказать, что онѣ не могутъ имѣть особенныхъ точекъ послѣднихъ двухъ типовъ, то есть точекъ перерыва и угловыхъ точекъ.

Если бы алгебраическая кривая $y = f(x)$ имѣла угловую точку, то кривая $z = f'(x)$, гдѣ черезъ z мы обозначили ординату новой кривой, которая есть производная ординаты старой кривой по абсциссѣ, должна была бы имѣть точки перерыва. Такъ, напримѣръ, трансцендентная кривая $y = x\, arctg\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\, lg\,(1 + x^2)$ дастъ для своей производной кривую $y = arctg\,\frac{1}{x}$, имѣющую видъ, указанный на черт. 183, съ двумя точками перерыва $+\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$. Но легко показать, что производная алгебраической функціи есть также функція алгебраическая. Въ самомъ

дѣлѣ, мы называемъ y алгебраической функціей отъ x, если эта функція удовлетворяетъ алгебраическому уравненію $f(x, y) = 0$. Производная y' опредѣляется изъ уравненія

$$f'_x(x,y) + y' \cdot f'_y(x,y) = 0, \tag{2}$$

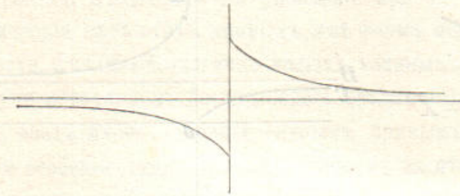
алгебраическаго относительно трехъ буквъ x, y, y', въ которомъ первая часть есть цѣлая функція (полиномъ) отъ x, y, y'. Исключая изъ уравненій (1) и (2) y (см. прибавленіе), мы получимъ уравненіе

$$F(x, y') = 0, \tag{3}$$

въ которомъ F цѣлая функція (полиномъ) относительно x и y'.

Итакъ мы видимъ, что производная алгебраической функціи есть также функція алгебраическая, ибо удовлетворяетъ алгебраическому уравненію (3).

469. Отсюда мы видимъ, что если бы алгебраическая кривая, выражающая ходъ измѣненія алгебраической функціи y, опредѣляемой уравненіемъ (1), имѣла



Черт. 183.



Черт. 184.

угловую точку, то алгебраическая кривая, выражающая законъ измѣненія алгебраической функціи y', опредѣляемой уравненіемъ (3), имѣла бы точки перерыва, а потому остается доказать, что алгебраическія кривыя не имѣютъ точекъ перерыва.

Положимъ, что существуетъ точка, въ которой нѣкоторая вѣтвь кривой прекращается. Если эта точка не лежитъ на другой вѣтви кривой, то, если мы проведемъ изъ этой точки M кругъ достаточно малаго радіуса, то этотъ кругъ пересѣчетъ кривую въ одной только точкѣ N (см. черт. 184). Покажемъ, что для алгебраическихъ кривыхъ этого обстоятельства не можетъ быть. Перенесемъ начало координатъ въ точку M и пусть тогда уравненіе заданной алгебраической кривой будетъ

$$f(x, y) = 0.$$

Уравненіе круга, описаннаго изъ центра M достаточно малымъ радіусомъ ρ, будетъ

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Координаты точки N встрѣчи круга съ кривою опредѣлятся какъ система рѣшеній двухъ указанныхъ уравненій относительно x и y. Исключая y изъ этихъ двухъ уравненій, получимъ:

$$f(x \sqrt{\rho^2 - x^2}) = 0.$$

Такъ какъ всѣ четныя степени корня выражаются цѣлыми функціями отъ x^2, а нечетныя нѣкоторыми цѣлыми функціями, умноженными на первую степень корня, то первую часть послѣдняго уравненія можно будетъ представить въ такомъ видѣ:

$$X_1 + X_2 \sqrt{\rho^2 - x^2} = 0,$$

гдѣ X_1 и X_2 суть цѣлыя функціи отъ x. Умножая обѣ части послѣдняго уравненія соотвѣтственно на части уравненія

$$X_1 - X_2 \sqrt{\rho^2 - x^2} = 0,$$

которое тоже должно быть принимаемо въ соображеніе, мы получимъ для опредѣленія абсциссы x точки N уравненіе

$$X_1^2 - X_2^2 (\rho^2 - x^2) = 0. \qquad (*)$$

Послѣднее уравненіе четной степени относительно x; кромѣ того число ρ совершенно произвольно, и, слѣдовательно, достаточно уменьшая его, можемъ достигнуть, съ одной стороны, того, чтобы кругъ не встрѣчалъ другихъ вѣтвей заданной кривой, кромѣ разсматриваемой, съ другой же стороны того, чтобы послѣднее уравненіе не имѣло кратныхъ корней. Тогда мы замѣчаемъ, что послѣднее уравненіе будучи четной степени, должно имѣть четное число корней, и, слѣдовательно, точекъ встрѣчи нашего малаго круга должно существовать четное число, что показываетъ, что точекъ перерыва алгебраическая кривая имѣть не можетъ.—Подобнымъ же образомъ можно разсмотрѣть и тотъ случай, когда одна изъ вѣтвей кривой перерывается въ точкѣ, лежащей на другой вѣтви кривой.

470. Въ случаѣ если достаточно малый кругъ, описанный изъ разсматриваемой точки кривой, не пересѣкаетъ кривую, а также не встрѣчаетъ ее ни одинъ изъ круговъ, описанныхъ изъ этой же точки меньшимъ радіусомъ, то такая точка называется уединенною; подобныя точки могутъ имѣть и кривыя алгебраическія, ибо уравненіе (*) можетъ имѣть всѣ корни мнимые. Возьмемъ, напримѣръ, кривую:

$$y = (x - a)\sqrt{x - b}.$$

Если $a < b$, то кривая имѣетъ видъ, указанный на черт. 185, и состоитъ изъ отдѣльной точки на оси x-овъ, имѣющей абсциссу a, и изъ вѣтви, пересѣкающей ось x-овъ въ точкѣ, имѣющей абсциссу b; вблизи же точки a кривая не имѣетъ дѣйствительныхъ сосѣднихъ точекъ, ибо для значеній x, близкихъ къ a, корень квадратный число мнимое.

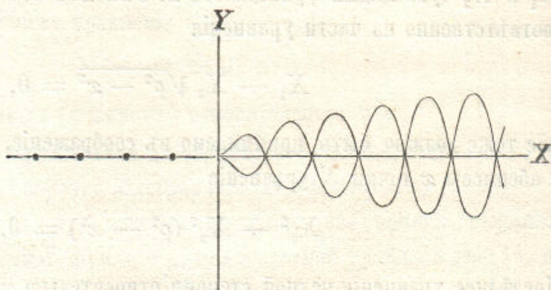
471. Что касается уединенныхъ точекъ, то алгебраическія кривыя могутъ имѣть ихъ конечное число, тогда какъ въ трансцендентныхъ число подобныхъ точекъ можетъ быть безконечно велико и эти точки могутъ образовать такъ назы-

ваемую *пунктирную вѣтвь*. Напримѣръ, кривая, опредѣляемая уравненіемъ:

$$y = \sin x . \sqrt{x}$$

и представленная на черт 186, имѣетъ пунктирную вѣтвь, расположенную по отрицательной сторонѣ оси x-овъ и состоящую изъ отдѣльныхъ точекъ, абсциссы которыхъ заключаются въ формулѣ $-n.\pi$, гдѣ n число цѣлое и положительное.





Черт. 185. Черт. 186.

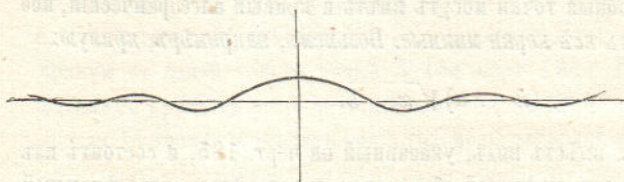
Что касается асимптотъ, то кривыя трансцендентныя могутъ встрѣчать свою асимптоту въ безчисленномъ множествѣ точекъ. Напримѣръ, кривая, опредѣляемая уравненіемъ:

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

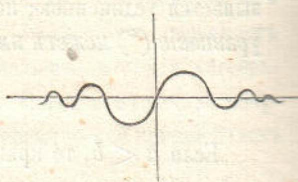
колеблясь около оси x-овъ, имѣетъ эту ось своей асимптотой и пересѣкаетъ ее въ безчисленномъ множествѣ точекъ (см. черт. 187). Кривая же

$$y = \frac{\sin (x^2)}{x},$$

подобнымъ же образомъ колеблется около оси x-овъ, причемъ длины волнъ и амплитуды идутъ уменьшаясь (см. черт. 188). Вотъ тѣ главнѣйшія особенности трансцендентныхъ кривыхъ линій, которыя наиболѣе часто встрѣчаются.



Черт. 187.



Черт. 188.

472. Трансцендентныя кривыя иногда, имѣя безчисленное множества вѣтвей, заполняютъ вплотную своими вѣтвями нѣкоторую площадь, такъ что можно сказать, что каждая точка этой площади лежитъ на заданной трансцендентной кри-

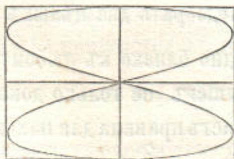
вой. Такъ напримѣръ, эпициклоида, въ случаѣ несоизмѣримости отношенія радіусовъ круговъ неподвижнаго и катящагося, есть трансцендентная кривая, безчисленное множество отдѣльныхъ вѣтвей которой, заключающихся между двумя послѣдовательными точками возврата, заполняютъ собою кольцеобразную площадь, заключающуюся между окружностью круга неподвижнаго и концентрическаго съ нимъ круга, радіусъ котораго больше его радіуса на діаметръ катящагося круга.

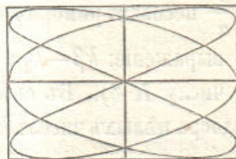
Наиболѣе интересный примѣръ подобнаго рода трансцендентныхъ кривыхъ, заполняющихъ собою площадь, представляютъ изъ себя такъ называемыя фигуры Лисажу, происходящія отъ сложенія двухъ гармоническихъ колебательныхъ движеній, происходящихъ въ плоскости двухъ взаимно перпендикулярныхъ колебательныхъ движеній. Кривыя, о которыхъ мы говоримъ, опредѣляются двумя уравненіями:

$$x = a.\ sin\ (\alpha t + A),$$
$$y = b.\ sin\ (\beta t + B).$$

Уравненіе, которое получается отъ исключенія t изъ этихъ уравненій, и будетъ уравненіемъ искомой кривой. Если отношеніе $\frac{\beta}{\alpha}$ соизмѣримо, то кривая есть замкнутая алгебраическая, касающаяся сторонъ прямоугольника, образованнаго сторонами $x = +a$, $x = -a$, $y = +b$, $y = -b$, причемъ, если $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m}{n}$, гдѣ m и n цѣлыя числа, то кривая m разъ касается сторонъ $y = \pm b$, и n разъ сторонъ $x = \pm a$. Такъ напримѣръ, черт. 189 и 190, даютъ видъ кривыхъ въ случаѣ $A = 0$, $B = 0$, $\frac{\beta}{\alpha} = 2$ и $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{2}$.

Въ случаѣ же, когда $\frac{\beta}{\alpha}$ есть число несоизмѣримое, напримѣръ $\sqrt{2}$, получается трансцендентная кривая имѣющая безчисленное множество вѣтвей, касающихся


Черт. 189.


Черт. 190.

во всѣхъ точкахъ сторонъ и заполняющихъ всю площадь прямоугольника, такъ что въ этомъ случаѣ, если бы мы хотѣли разсматривать y какъ функцію отъ x, получающуюся черезъ исключеніе t изъ заданныхъ уравненій, то получили бы такую функцію, которая для всякаго значенія перемѣннаго x, лежащаго въ границахъ отъ $-a$ до $+a$, имѣетъ безчисленное множество значеній, лежащихъ въ проме-

жуткѣ отъ $-b$ до $+b$; такъ что каждое значеніе въ этомъ промежуткѣ можетъ считаться за соотвѣтственное значеніе функціи.

Покажемъ сказанное аналитически Исключимъ изъ уравненій t. Первое изъ заданныхъ уравненій равносильно одному изъ слѣдующихъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha t + A &= arc\,sin\,\frac{x}{a} + 2k\pi, \\ \alpha t + A &= (2l+1)\pi - arc\,sic\,\frac{x}{a} \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Подобнымъ же образомъ второе равносильно одному изъ такихъ:

$$\left.\begin{aligned} \beta t + B &= arc\,sin\,\frac{y}{b} + 2k_1\pi, \\ \beta t + B &= (2l_1+1)\pi - arc\,sin\,\frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

Для исключенія t надо будетъ взять по одному изъ системъ (*) и (**). Возьмемъ, напримѣръ, первыя два:

$$\alpha t + A = arc\,sin\,\frac{x}{a} + 2k\pi,$$

$$\beta t + B = arc\,sin\,\frac{y}{b} + 2k_1\pi.$$

Умножая первое уравненіе на β, а второе на α и вычитая, исключимъ t. Получается уравненіе:

$$A\beta - B\alpha = \beta.\,arc\,sin\,\frac{x}{a} - \alpha.\,arc\,siu\,\frac{y}{b} + 2\pi(k\beta - k_1\alpha).$$

Послѣднее уравненіе и даетъ зависимость между функціей y и независимой перемѣнной x. Въ него входятъ два произвольныхъ цѣлыхъ числа k и k_1. Академикъ Чебышевъ въ статьѣ: «Объ одномъ ариѳметическомъ вопросѣ» показалъ, что если отношеніе $\frac{\beta}{\alpha}$ несоизмѣримо, то можно всегда подобрать два цѣлыхъ числа k и k_1 такъ, чтобы выраженіе: $k\beta - k_1\alpha$ было сколь угодно близко къ любому произвольно выбранному числу K *). Въ своей статьѣ Чебышевъ не только доказываетъ возможность подбора цѣлыхъ чиселъ k и k_1, но даже даетъ правила для нахожденія ихъ на самомъ дѣлѣ, причемъ пользуется разложеніемъ числа $\frac{\beta}{\alpha}$ въ непрерывную дробь.

Итакъ мы замѣчаемъ, что въ уравненіи находится членъ $2\pi(k\beta - k_1\alpha)$, величина котораго совершенно произвольна, слѣдствіемъ чего является то, что значеніе y не опредѣляется по соотвѣтствующему значенію независимаго перемѣннаго x.

473. Любопытнѣе всего то, что, не смотря на полную неопредѣленность функціи y,

*) См. *Hermite*. Cours d'Analyse de l'école politechnique. (Литогр.).

ея производная $\frac{dy}{dx}$ вполнѣ опредѣленна для каждой точки внутри прямоугольника, ибо при дифференцированіи пропадаетъ, какъ постоянный, членъ, производящій неопредѣленность и получается уравненіе

$$0 = \beta \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \alpha \frac{dx}{\sqrt{b^2 - y^2}},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2}}.$$

Геометрически сказанное приводится къ тому, что каждая вѣтвь кривой проходящая черезъ данную точку внутри прямоугольника, имѣетъ въ этой точкѣ вполнѣ опредѣленную касательную, направленіе которой зависитъ отъ положенія точки.

Приведенныхъ примѣровъ достаточно для того, чтобы замѣтить, какими разнообразными особенностями могутъ обладать кривыя линіи, опредѣляемыя трансцендентными уравненіями.

474. Въ заключеніе нашихъ изслѣдованій о видѣ кривыхъ линій разсмотримъ кривыя, опредѣляемыя уравненіемъ:

$$f(x) = f(y). \qquad (1)$$

Ясно, что, какова бы функція f ни была, одну изъ вѣтвей кривой будетъ составлять прямая $y = x$, дѣлящая пополамъ уголъ между осями. Задача заключается, слѣдовательно, въ указаніи другихъ вѣтвей кривой.

Замѣтимъ прежде всего, что, если функція $f(x)$ алгебраическая, то и кривая, опредѣляемая уравненіемъ (1) алгебраическая, ибо, обозначая черезъ z функцію $f(x)$, мы получимъ для опредѣленія z уравненіе:

$$F(x, z) = 0,$$

гдѣ F цѣлая функція отъ x и z. Вопросъ опредѣленія кривой линіи, указанной уравненіемъ (1) приведется къ исключенію z изъ двухъ уравненій:

$$F(x, z) = 0, \qquad F(y, z) = 0.$$

Изъ теоріи исключенія (см. прибавленіе) извѣстно, что въ результатѣ сказаннаго исключенія получится алгебраическое уравненіе

$$\omega(x, y) = 0,$$

которое будетъ равносильно предложенному уравненію $f(x) = f(y)$. Напримѣръ, исключая букву z изъ двухъ уравненій

$$ax + bz + c = 0,$$
$$ay + bz + c = 0,$$

получимъ уравненіе:

$$x - y = 0,$$

равносильное уравненію

$$\frac{ax + c}{b} = \frac{ay + c}{b}.$$

Подобнымъ же образомъ, исключая z изъ уравненій

$$Ax^2 + 2Bxz + Cz^2 + 2Dx + 2Ez + F = 0,$$
$$Ay^2 + 2Byz + Cz^2 + 2Dy + 2Ez + F = 0,$$

получимъ уравненіе

$$-\frac{Bx + E}{C} \pm \sqrt{Px^2 + Qx + R} =$$
$$= -\frac{By + E}{C} \pm \sqrt{Py^2 + Qy + R},$$

которое, по уничтоженіи радикаловъ, обращается въ уравненіе, дающее совокупность прямой линіи $x - y = 0$ и коническаго сѣченія

$$CA^2 (x^2 + y^2) - 2A (2B^2 - AC) xy + 4A (CD - EB) (x + y) +$$
$$+ 4 (B^2F - 2BDE + CD^2) = 0.$$

Подобнымъ же образомъ, если вспомогательная линія будетъ имѣть уравненіе

$$z = x^4 - x^2 + 1,$$

то кривая, опредѣляемая уравненіемъ

$$x^4 - x^2 + 1 = y^4 - y^2 + 1,$$

распадается на двѣ прямыхъ и кругъ, ибо послѣднее уравненіе можетъ быть переписано такъ:

$$x^4 - y^4 - (x^2 - y^2) = 0$$

или

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Возьмемъ уравненіе

$$f(x) = f(y); \tag{1}$$

обозначимъ черезъ z значеніе функціи $f(x)$ и разсмотримъ кривую $z = f(x)$, гдѣ z есть ордината нѣкоторой точки, абсцисса которой равна x. Кривую линію, опредѣляемую послѣднимъ уравненіемъ будемъ называть *вспомогательною*. Покажемъ, какъ, если построена вспомогательная линія, можно построить кривую, заданную уравненіемъ (1).

Пересѣчемъ вспомогательную кривую какою нибудь прямою $z = k$, параллель-

ною оси x-овъ. Абсциссы точекъ сѣченія получатся черезъ рѣшеніе уравненія $f(x) = k$. Если послѣднее уравненіе имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень для всевозможныхъ значеній k, то, чтобы удовлетворить уравненію (1), необходимо будетъ положить $y = x$ и, слѣдовательно, уравненіе (1) опредѣлитъ прямую: $y = x$.

Кромѣ сказанной прямой кривая, опредѣляемая уравненіемъ (1), можетъ имѣть другія вѣтви лишь въ томъ случаѣ, если уравненіе $f(x) = k$ даетъ для x нѣсколько значеній вещественныхъ, если не для всѣхъ значеній k, то по крайней мѣрѣ для значеній этого числа, заключающихся въ нѣкоторыхъ границахъ. Итакъ, пусть при данномъ значеніи k получается нѣсколько значеній для x: $l_1, l_2, \ldots l_m$. Тогда каждое изъ этихъ значеній можетъ быть принято за x и y, удовлетворяющія уравненію (1), а потому, откладывая значенія $l_1, l_2, \ldots l_m$ какъ по оси x-овъ, такъ и по оси y-овъ, мы получимъ сѣть прямыхъ, проведенныхъ черезъ указанныя точки на оси параллельно другой оси. Въ пересѣченіи эти прямыя дадутъ m^2 точекъ, изъ которыхъ m точекъ будутъ лежать на прямой $x = y$. Взявъ для числа k другое значеніе, мы получимъ другую группу точекъ, и т. д. Такимъ образомъ можетъ быть по точкамъ построена кривая, опредѣляемая уравненіемь (1).

Ясно, что кривая, опредѣляемая уравненіемъ (1), имѣетъ осью симметріи прямую $x = y$.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ.

1) $x^y = y^x$. Это уравненіе, логариѳмируя, можно переписать въ такомъ видѣ:

$$\frac{lg\,x}{x} = \frac{lg\,y}{y}.$$

Вспомогательная кривая имѣетъ уравненіе: $z = \frac{lg\,x}{x}$. Заданная кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей: прямой $x = y$ и другой вѣтви, лежащей въ первомъ углѣ между осями и имѣющей асимптотами прямыя: $x = +1$, $y = +1$.

Обѣ вѣтви пересѣкаются въ точкѣ, имѣющей координаты: $x = y = e$, причемъ это значеніе x сотвѣтствуетъ maximum'у функціи $\frac{lg\,x}{x}$.

2) $x\,lg\,x = y\,lg\,y$. Кривая состоитъ изъ прямой $x = y$ и вѣтви конечныхъ размѣровъ, обрывающейся съ обѣихъ сторонъ въ точкахъ перерыва ($x=0$, $y=+1$), ($x = +1$, $y = 0$). Вѣтви пересѣкаются подъ прямымъ угломъ въ точкѣ $x = y = \frac{1}{e}$. Кривая имѣетъ видъ греческой буквы ψ.

3) $sin\,x = sin\,y$. Кривая состоитъ изъ сѣти прямоугольниковъ, образованныхъ прямыми, параллельными прямымъ: $x^2 - y^2 = 0$.

4) $tang\,x = tang\,y$. Кривую образуютъ прямая $x = y$ и безчисленное множество ей параллельныхъ, равноотстоящихъ другъ отъ друга, прямыхъ.

Для упражненія въ построеніи трансцендентныхъ кривыхъ предложимъ примѣры:

Задачи.

1) Построить кривыя въ декартовыхъ координатахъ по уравненіямъ

$$2\sin y - \sin x = 0, \quad \sin x . \sin y = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{e^x}{x}, \quad y = x^x.$$

2) Построить кривыя въ полярныхъ координатахъ по уравненіямъ:

$$\rho = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}, \quad \rho = 1 \pm \sqrt{\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}}, \quad \rho^2\cos\theta - 2\rho\sin\theta + \cos^2\theta = 0,$$

$$\rho^2\cos\theta - 4\rho\sin\theta - \operatorname{tang}\theta = 0, \quad \rho = \cos\theta \pm \sqrt{\frac{1-2\cos\theta}{\sin\theta}}.$$

475. Въ заключеніе мы должны сказать, что трансцендентныя кривыя могутъ представлять пунктирныя вѣтви, состоящія изъ безчисленнаго множества отдѣльныхъ точекъ, лежащихъ на безконечно маломъ разстояніи другъ отъ друга. Примѣромъ подобныхъ кривыхъ можетъ послужить кривая, опредѣляемая уравненіемъ: $y = (-1)^x$. Это уравненіе даетъ безчисленное множество точекъ на прямыхъ $y = +1$, $y = -1$. Такъ напримѣръ, если x число цѣлое и четное, то $y = +1$; если же x число цѣлое, но нечетное, то $y = -1$. При $x = \frac{1}{2}$, y—мнимое, и вообще y — мнимое при всѣхъ раціональныхъ значеніяхъ $x = \frac{m}{n}$, если m число нечетное, а n — четное.

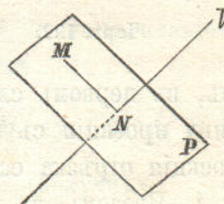
Ясно, что такихъ значеній x безчисленное множество и что эти значенія могутъ быть сколь угодно близкими. А потому многія трансцендентныя уравненія, подобныя написанному, собственно говоря, не опредѣляютъ кривой линіи.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Геометрія трехъ измѣреній.

Проекціи.

1. Возьмемъ въ пространствѣ прямую l и внѣ ея точку M (см. черт. 191). Проведемъ черезъ точку M плоскость P, перпендикулярную къ прямой l, которая пересѣчетъ прямую l въ нѣкоторой точкѣ N. Соединимъ точку N съ точкою M прямою. Прямая MN будетъ, очевидно, перпендикулярна къ прямой l, другими словами, точка N есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M на прямую l. Точка N называется *проекціею* точки M на прямой l, которая носитъ названіе *оси проекцій*. Точка M называется *проектируемой точкой*; прямая MN—*проектирующимъ перпендикуляромъ*, а плоскость P — *проектирующей плоскостью*.



Черт. 191.

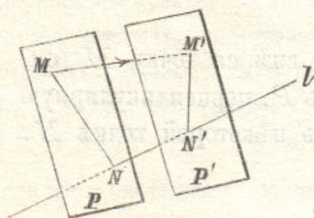
2. Пусть кромѣ точки M еще задана другая точка M'. Проектируя точку M' на ось l при помощи плоскости P', получимъ проекцію N' этой точки (см. черт. 192). Если мы соединимъ точки M и M' прямою, то на этой прямой получимъ между точками M и M отрѣзокъ MM'. Разстояніе NN' на оси l между проекціями N и N концовъ отрѣзка MM' называется проекціею отрѣзка MM' на оси l.

3. Принято всѣмъ вводимымъ въ разсмотрѣніе отрѣзкамъ придавать нѣкоторое направленіе; при этомъ одну изъ его конечныхъ точекъ считать за начало отрѣзка, а другую за конецъ его.

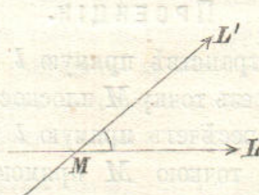
Пусть, для примѣра, мы въ отрѣзкѣ MM' (см. черт. 192) примемъ точку M за начало, а M'—за конецъ. Это направленіе мо-

жетъ быть указано на чертежѣ стрѣлкою, показывающей направленіе движенія отъ точки M къ точкѣ M'. Точки N и N' суть концы отрѣзка NN'. Точку N, какъ проекцію начала, принято считать за начало проекціи NN', а точку N', какъ проекцію конца, за конецъ проекціи NN'.

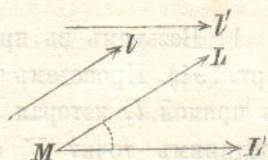
Подъ направленіемъ проекціи разумѣется всегда направленіе отъ начала ея N къ концу N'. Кромѣ того, самой оси проекцій l приписываютъ нѣкоторое опредѣленное направленіе; тогда всѣ проекціи, направленіе которыхъ совпадаетъ съ выбраннымъ направленіемъ оси l, считаются положительными; тѣ же проекціи, направленіе которыхъ обратное направленію оси l, — отрицательными; точнѣе ска-



Черт. 192.



Черт. 193.



Черт. 194.

зать, въ первомъ случаѣ, подъ проекціею отрѣзка на оси разумѣютъ длину проекціи съ приписаннымъ къ ней знакомъ +, въ другомъ же проекція отрѣзка есть длина проекціи, взятая со знакомъ —.

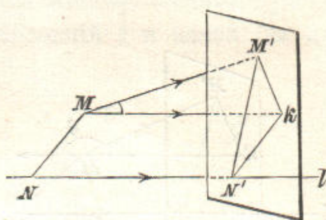
4. Введемъ въ разсмотрѣніе уголъ между направленіями двухъ прямыхъ въ пространствѣ. Если заданныя двѣ прямыя L и L' пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ M (см. черт. 193), тогда, если направленія этихъ прямыхъ заданы, то уголъ LML' между направленіями этихъ прямыхъ указывается непосредственно. Если же данныя прямыя l и l' не пересѣкаются въ пространствѣ, тогда подъ угломъ между ними разумѣется уголъ LML', образуемый прямыми L и L', проведенными параллельно направленію заданныхъ прямыхъ l и l' черезъ произвольно выбранную въ пространствѣ точку M (см. черт. 194).

5. Условившись такимъ образомъ разсматривать углы между прямыми въ пространствѣ, мы можемъ относительно знака проекціи выразиться такъ: проекція отрѣзка положительна, если отрѣзокъ составляетъ съ направленіемъ оси острый уголъ, и, наоборотъ, если направленіе отрѣзка составляетъ съ осью тупой уголъ, то проекція отрицательна.

Послѣднее замѣчаніе насчетъ знака проекціи есть непосредственное слѣдствіе слѣдующей общей теоремы.

6. *Теорема*. Проекція отрѣзка на оси равна длинѣ отрѣзка, умноженной на косинусъ угла между направленіями этого отрѣзка и оси проекцій.

Разсмотримъ два случая. Пусть проекція отрѣзка MM' положительная, что имѣетъ мѣсто, когда направленіе прямой MM' составляетъ съ направленіемъ оси l уголъ острый (см. черт. 195). Черезъ начало отрѣзка M проводимъ прямую MK, параллельную l, до пересѣченія съ плоскостью P', проектирующею конецъ M' отрѣзка. Пусть точка пересѣченія будетъ K; тогда, соединяя точку K съ точкой M' прямою $M'K$, лежащею въ плоскости P', мы получимъ треугольникъ MKM' съ прямымъ угломъ при вершинѣ K. Острый же уголъ этого треугольника $M'MK$ есть не что иное, какъ уголъ между направленіемъ отрѣзка MM' и направленіемъ оси l; обозначимъ послѣдній уголъ черезъ θ. Тогда



Черт. 195.

$$\text{проекція } \overline{MM'} = +\overline{NN'} = +\overline{MK} = +\overline{MM'}\cos(M'MK);$$

но принимая во вниманіе, что уголъ $M'MK = \theta$, получимъ:

$$\text{проекція } \overline{MM'} = \overline{MM'}\cos\theta,$$

что и требовалось доказать.

Разсмотримъ теперь другой случай, когда направленіе отрѣзка MM' составляетъ тупой уголъ съ осью проекцій l. Проведя по прежнему изъ начала отрѣзка M прямую MK, параллельную оси l, которая пересѣчетъ проектирующую плоскость P' конца отрѣзка M' въ нѣкоторой точкѣ K, и соединяя эту точку K съ точкою M', получимъ треугольникъ MKM' съ прямымъ угломъ при точкѣ K. (См. черт. 196).

$$\text{Проекція } \overline{MM'} = -\overline{NN'} = -\overline{MK} = -\overline{MM'}\cos(M'MK);$$

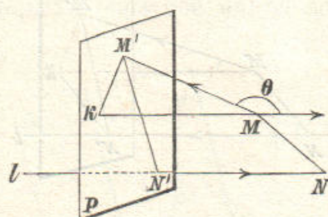
но такъ какъ уголъ θ между направленіями отрѣзковъ MM' и ML

въ данномъ случаѣ есть $M'ML$, гдѣ ML есть продолженіе прямой MK въ обратную сторону, то $\theta = M'ML = 180° - M'MK$. Слѣдовательно, $\cos\theta = -\cos M'MK$, откуда окончательно

$$\text{проекція } \overline{MM'} = \overline{MM'} \cos\theta.$$

Итакъ, высказанная теорема доказана вполнѣ.

Слѣдствіе 1. Если измѣнимъ направленіе отрѣзка, не мѣняя направленія оси проекцій, то проекція перемѣнитъ свой знакъ, не мѣняя численной величины. Во всемъ послѣдующемъ мы будемъ писать отрѣзки такимъ образомъ, что букву, обозначающую начало отрѣзка, ставить сначала. Тогда только что сказанное свойство проекцій можетъ быть записано такъ:



Черт. 196.

$$\text{проекція } \overline{MM'} = -\text{проекція } \overline{M'M}.$$

Слѣдствіе 2. Если отрѣзокъ параллеленъ оси проекцій, то проекція равна длинѣ самаго отрѣзка, взятой со знакомъ $+$ или $-$, судя по тому, совпадаетъ ли направленіе отрѣзка съ направленіемъ оси, или обратно ему.

Слѣдствіе 3. Проекція отрѣзка на оси равна нулю, если отрѣзокъ лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси проекцій.

7. Покажемъ теперь одно замѣчательное свойство сомкнутаго многоугольника, какъ плоскаго, т. е. такого, вершины котораго лежатъ въ одной плоскости, такъ и косого, вершины котораю не лежатъ въ одной плоскости.

Возьмемъ многоугольникъ $ABCDEA$ (см. черт. 197) и припишемъ его сторонамъ нѣкоторое направленіе вдоль по периметру такимъ образомъ, что каждая вершина будетъ концомъ одной изъ сторонъ и въ то же время началомъ слѣдующей. Выберемъ, напримѣръ, направленіе, которое можетъ быть указано порядкомъ буквъ $ABCDEA$.

Относительно всякаго подобнаго сомкнутаго многоугольника можно показать, что сумма проекцій его сторонъ на любую ось въ пространствѣ равна нулю, то есть:

$$\text{пр.}(AB)_l + \text{пр.}(BC)_l + \text{пр.}(CD)_l + \text{пр.}(DE)_l + \text{пр.}(EA)_l = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ чертежа видимъ, что

$$\text{пр.}\,(AB)_l = -ab,\ \text{пр.}\,(BC)_l = +bc,\ \text{пр.}\,(CD)_l = +cd,$$

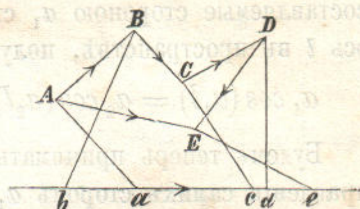
$$\text{пр.}\,(DE)_l = +de,\ \text{пр.}\,(EA) = -ea.$$

Отсюда мы видимъ, что сумма проекцій сторонъ многоугольника на оси l равна:

$$-ab+bc+cd+de-ea=(bc+cd+de)-(ba+ae)=be-be=0.$$

Легко замѣтить, что указанное свойство многоугольника будетъ справедливо, какъ бы ни была взята ось проекцій l и какой бы ни былъ заданъ многоугольникъ.

Слѣдствіе. Если измѣнимъ направленіе одной изъ сторонъ многоугольника на обратное, оставляя направленіе всѣхъ остальныхъ сторонъ прежнее, то получимъ такъ называемую *замыкающую сторону* ломанной линіи, образуемой всѣми прочими сторонами.



Черт. 197.

Пусть, напримѣръ, эта сторона будетъ AE (см. черт. 197). Тогда въ предыдущемъ равенствѣ придется измѣнить знакъ у проекціи ея на обратный, такъ что будетъ:

$$\text{пр.}\,(AB)_l + \text{пр.}\,(BC)_l + \text{пр.}\,(CD)_l + \text{пр.}\,(DE)_l - \text{пр.}\,(AE)_l = 0,$$

откуда, перенося въ другую часть равенства членъ $-$пр. $(AE)_l$, получимъ:

$$\text{пр.}\,(AE)_l = \text{пр.}\,(AB)_l + \text{пр.}\,(BC)_l + \text{пр.}\,(CD)_l + \text{пр.}\,(DE)_l,$$

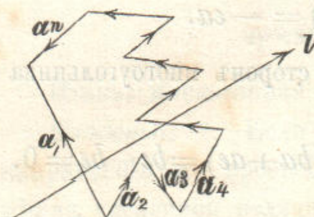
что даетъ слѣдующее предложеніе:

Теорема. Проекція замыкающей стороны многоугольника на любую ось въ пространствѣ равна суммѣ проекцій сторонъ замкнутыхъ.

8. Когда даны по величинѣ и направленію всѣ стороны нѣкоторой незамкнутой ломанной линіи, то могутъ быть указаны величина и направленіе стороны, замыкающей эту ломанную линію.

Для этой цѣли достаточно показать, какъ, зная длины заданныхъ сторонъ ломанной линіи и разные углы, заключенные между этими

сторонами, получить длину замыкающей стороны и углы, составляемые ею со сторонами замкнутыми.



Черт. 198.

Обозначимъ длину стороны замыкающей черезъ a_1, а заданныя длины сторонъ замкнутыхъ черезъ $a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$ (см. черт. 198). Кромѣ того, будемъ обозначать черезъ $(a_i\ a_k)$ уголъ, составляемый направленіями сторонъ a_i, a_k. Мы будемъ, очевидно, предполагать всѣ углы между заданными сторонами заданными; искомыми же будутъ, кромѣ длины a_1, углы $(a_1\ a_2), (a_1\ a_3), (a_1\ a_4), \ldots (a_1\ a_n)$, составляемые стороною a_1 съ прочими. Проектируя на нѣкоторую ось l въ пространствѣ, получимъ:

$$a_1 \cos(a_1 l) = a_2 \cos(a_2 l) + a_3 \cos(a_3 l) + \ldots + a_n \cos(a_n l).$$

Будемъ теперь принимать за ось проекцій l послѣдовательно направленія самихъ сторонъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$; тогда получимъ, принимая въ соображеніе, что $(a_1\ a_1) = 0$, $(a_2\ a_2) = 0$, $(a_3\ a_3) = 0, \ldots$, $(a_n\ a_n) = 0$, и, слѣдовательно, $\cos\ (a_1\ a_1) = 1$, $\cos\ (a_2\ a_2) = 1$, $\cos\ (a_3\ a_3) = 1, \ldots, \cos\ (a_n\ a_n) = 1$,

$$a_1 = a_2 \cos(a_1 a_2) + a_3 \cos(a_1 a_3) + \ldots + a_n \cos(a_1 a_n) \qquad (1)$$

$$a_1 \cos(a_1 a_2) = a_2 + a_3 \cos(a_2 a_3) + \ldots + a_n \cos(a_2 a_n) \qquad (2)$$

$$a_1 \cos(a_1 a_3) = a_2 \cos(a_2 a_3) + a_3 + \ldots + a_n \cos(a_3 a_n) \qquad (3)$$

. . . .

$$a_1 \cos(a_1 a_n) = a_2 \cos(a_2 a_n) + a_3 \cos(a_3 a_n) + \ldots + a_n \qquad (4)$$

Умножая теперь послѣдовательно эти уравненія: (1) на a_1, (2) на a_2, (3) на a_3 и т. д., (n) на a_n и складывая, получимъ:

$$a_1^{\,2} = a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2} + 2\, a_2\, a_3 \cos(a_2 a_3) + \ldots$$
$$\ldots 2\, a_2 a_n \cos(a_2 a_n) + \ldots + 2\, a_{n-1}\, a_n \cos(a_{n-1}\, a_n).$$

Итакъ мы видимъ, что квадратъ стороны всякаго сомкнутаго многоугольника равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ сторонъ, сложенной

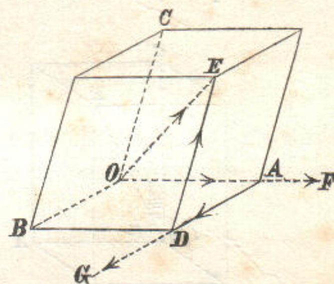
съ удвоенными произведеніями прочихъ сторонъ, перемноженныхъ попарно, и на косинусы угловъ, между ними заключающихся.

Когда сторона a_1 опредѣлена, уголъ $(a_1\ a_2)$ можетъ быть найденъ по уравненію (2). Дѣйствительно,

$$\cos(a_1a_2) = \frac{a_2 + a_3\cos(a_2a_3) + \ldots a_n\cos(a_2a_n)}{a_1}.$$

Такимъ же путемъ по уравненіямъ (3), (4), . . . (n) мы найдемъ углы $(a_1\ a_3)$, $(a_1\ a_n)$, . . ., $(a_1\ a_n)$.

9. Приложимъ приведенныя разсужденія къ нахожденію длины діагонали параллелепипеда и угловъ, которые эта діагональ составляетъ съ ребрами параллелепипеда.



Черт. 199.

Пусть будутъ заданные ребра параллелепипеда $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ (см. черт. 199). Кромѣ того, заданные углы между этими ребрами пусть будутъ: $\angle AOB = (xy)$, $\angle BOC = (yz)$, $\angle AOC = (xz)$; діагональ $OE = \delta$. Возьмемъ замкнутый многоугольникъ $OADEO$; пусть его стороны имѣютъ направленія $\overline{OA}$, $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, а замыкающая сторона — направленіе $\overline{OE}$. Тогда, на основаніи доказанной теоремы, принимая во вниманіе, что $AD = OB = y$, $ED = OC = z$, $\angle FAD = (xy)$, $\angle GDE = (yz)$, получимъ:

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,xy\cos(xy) + 2\,xz\cos(xz) + 2\,yz\cos(yz).$$

Такимъ образомъ, мы получили выраженіе для квадрата діагонали параллелепипеда. Углы же, составляемые діагональю съ ребрами, $(\delta\,x)$, $(\delta\,y)$, $(\delta\,z)$ опредѣляются по формуламъ:

$$\cos(\delta\,x) = \frac{x + y\cos(xy) + z\cos(xz)}{\delta},$$

$$\cos(\delta\,y) = \frac{x\cos(xy) + y + z\cos(yz)}{\delta},$$

$$\cos(\delta\,z) = \frac{x\cos(xz) + y\cos(yz) + z}{\delta}.$$

10. Обратимся къ разсмотрѣнію прямоугольнаго параллелепипеда. Въ этомъ случаѣ уголъ $(xy)=90^\circ$, $(xz)=90^\circ$, $(yz)=90^\circ$ (см. чер. 200). Обозначая въ этомъ случаѣ для краткости $(\delta x)=\alpha$, $(\delta y)=\beta$, $(\delta z)=\gamma$, получимъ:

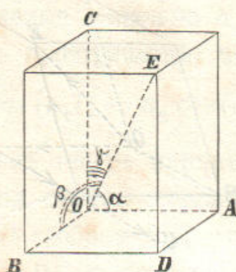
$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

углы же, образуемые діагональю со сторонами, опредѣляются по формуламъ:

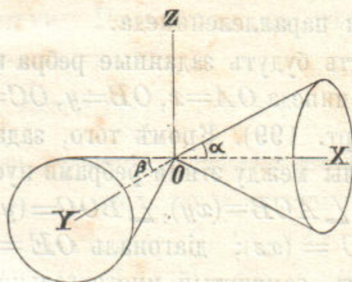
$$\cos\alpha = \frac{x}{\delta},\ \cos\beta = \frac{y}{\delta},\ \cos\gamma = \frac{z}{\delta},$$

ибо $\cos(xy)=0$, $\cos(xz)=0$, $\cos(yz)=0$.

Наоборотъ, по заданнымъ угламъ α, β, γ и длинѣ діагонали δ, мы



Черт. 200.



Черт. 201.

получимъ ребра параллелепипеда при помощи слѣдующихъ формулъ:

$$x = \delta\cos\alpha,\ y = \delta\cos\beta,\ z = \delta\cos\gamma.$$

Возвышая эти уравненія въ квадратъ, складывая ихъ и принимая во вниманіе равенство: $x^2+y^2+z^2=\delta^2$, получимъ слѣдующее соотношеніе между углами α, β, γ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (*)$$

Эта формула даетъ возможность, зная два угла, составляемые діагональю съ ребрами, вычислить третій.

11. Остающіеся произвольными два изъ числа угловъ α, β, γ не совершенно произвольны. Мы не имѣемъ права задавать углы α и β такъ, чтобы они въ суммѣ давали меньше 90°. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы пожелали найти прямую, составляющую съ ребрами x и y параллелепипеда углы α и β, то пришлось бы построить два прямыхъ конуса: одинъ A на ребрѣ x, какъ на оси, съ угломъ α, другой B на ребрѣ y, какъ на оси, съ угломъ β (см. черт. 201).

Теперь, если $\alpha + \beta < 90^\circ$, то указанные два конуса не пересѣкаются и, слѣдовательно, не существуетъ прямой, составляющей съ ребромъ x параллелепипеда уголъ α, а съ ребромъ y уголъ β.

Когда $\alpha + \beta = 90^\circ$, то оба конуса касаются вдоль по нѣкоторой образующей, лежащей въ плоскости реберъ x и y (см. черт. 202).

Наконецъ, когда $\alpha + \beta > 90^\circ$, то два конуса пересѣкаются по двумъ образующимъ OC_1 и OC_2 (см. черт. 203), причемъ, если мы назовемъ $\angle ZOC_1 = \gamma_1$, $\angle ZOC_2 = \gamma_2$, то получимъ:

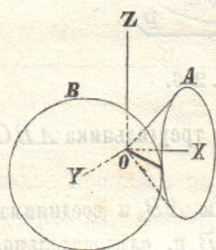
$$cos\,\gamma_1 = + \sqrt{1 - cos^2\alpha - cos^2\beta}\,; \quad cos\,\gamma_2 = - \sqrt{1 - cos^2\alpha - cos^2\beta}\,.$$

12. Покажемъ, какъ указанныя неравенства для угловъ α и β вывести изъ формулы (*).

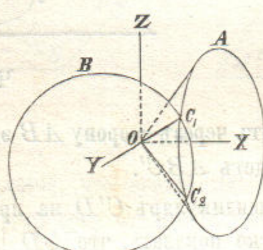
Въ самомъ дѣлѣ:

$$cos\,\gamma = \pm \sqrt{1 - cos^2\alpha - cos^2\beta} = \pm \sqrt{sin^2\alpha - cos^2\beta}\,.$$

Выберемъ два угла α_1 и β_1 такіе, что $0 < \alpha_1 < 90^\circ$, $0 < \beta_1 < 90^\circ$ и $sin\,\alpha_1 =$ = числ. вел. $sin\,\alpha$; $cos\,\beta_1 =$ числ. вел. $cos\,\beta$; тогда для вещественности $< \gamma$ необ-



Черт. 202.



Черт. 203.



Черт. 204.

ходимо, чтобы подкоренная величина была положительная, т. е. чтобы было $sin^2\alpha_1 - cos^2\beta_1 > 0$, или $sin\,\alpha_1 > cos\,\beta_1$, или $sin\,\alpha_1 > sin\,(90^\circ - \beta_1)$, отсюда $\alpha_1 > 90^\circ - \beta_1$, откуда, наконецъ, $\alpha_1 + \beta_1 > 90^\circ$, т. е. условіе, чтобы два конуса построенные на углахъ α_1 и β_1, или, что одно и то же, на углахъ α и β, пересѣкались.

13. *Проекціею* точки M на плоскости P называется основаніе N перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M на эту плоскость (см. черт. 204). Плоскость P называется *плоскостью проекцій*, перпендикуляръ MN—*проектирующимъ перпендикуляромъ*.

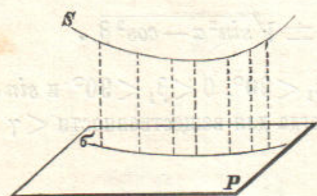
14. Проекціею кривой линіи S въ пространствѣ на плоскости P называется такая кривая σ, лежащая въ плоскости P, которая пред-

ставляетъ геометрическое мѣсто проекцій точекъ данной кривой S (см. черт. 205).

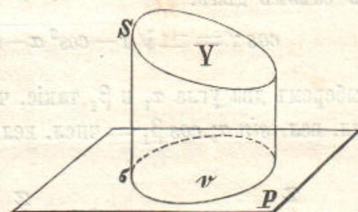
Проектирующіе перпендикуляры разныхъ точекъ кривой S образуютъ такъ называемый *проектирующій цилиндръ*.

15. Проекціею площади плоской фигуры V, ограниченной нѣкоторою кривою S, на плоскости P называется площадь фигуры v на плоскости P, ограниченной кривою σ — проекціею кривой S (см. черт. 206).

16. Разсмотримъ проекцію площади простѣйшей фигуры, а именно проекцію площади треугольника. Возьмемъ сначала частный случай, когда одна изъ сторонъ треугольника параллельна плоскости проекцій. Въ этомъ случаѣ можно допустить,



Черт. 205.



Черт. 206.

что плоскость проекцій P проходитъ черезъ сторону AB этого треугольника ABC (см. черт. 207) и проекція его будетъ ABC'.

Изъ точки C' опустимъ перпендикуляръ $C'D$ на прямую AB и соединимъ точки C и D прямою CD. Легко показать, что $CD \perp AB$ и, слѣдовательно, $\angle CDC' = \theta$, гдѣ черезъ θ мы обозначаемъ для краткости уголъ, составляемый плоскостью заданнаго треугольника ABC съ плоскостью проекцій P. Изъ прямоугольнаго треугольника $CC'D$ получаемъ $C'D = CD \cos\theta$, откуда:

$$\text{проекція } \triangle ABC = \text{пл. } \triangle AC'B = \frac{AB \,.\, C'D}{2} = \frac{AB \,.\, CD \cos\theta}{2} =$$

$$= \frac{AB \,.\, CD}{2} \cos\theta = \text{пл. } \triangle ABC \,.\, \cos\theta.$$

Перейдемъ теперь къ общему случаю. Проведемъ черезъ вершину $\triangle ABC$, ближайшую къ плоскости проекцій, плоскость P, параллельную плоскости проекцій; тогда, очевидно, мы можемъ принять эту плоскость за плоскость проекцій. Пусть на плоскости P проекція заданнаго $\triangle ABC$ будетъ $AC'B'$ (см. черт. 208). Продолжимъ сторону треугольника BC до пересѣченія ея съ плоскостью P въ точкѣ D. Получимъ два треугольника ACD и ABD, подходящіе подъ разобранный

уже нами случай. Проекціи этихъ треугольниковъ суть $AC'D$ и $AB'D$. Обозначая черезъ θ уголъ между плоскостями треугольника ABC и плоскостью проекцій P, получимъ:

$$\text{площ. } AC'D = \text{площ. } ACD \,.\, \cos\theta,$$

$$\text{площ. } AB'D = \text{площ. } ABD \,.\, \cos\theta;$$

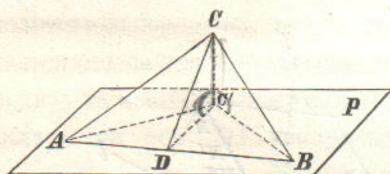
вычитая второе равенство изъ перваго, получимъ:

$$\text{площ. } AB'C' = \text{пр. } ABC = \text{площ. } ABC \,.\, \cos\theta.$$

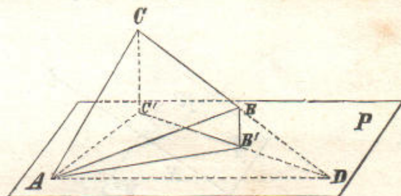
Итакъ, мы получаемъ слѣдующую общую теорему:

Проекція площади треугольника на плоскость проекціи P равна площади самого треугольника, умноженной на косинусъ остраго угла между плоскостью даннаго треугольника и плоскостью проекцій.

17. Эту теорему легко распространить на случай любого плоскаго многоугольника.



Черт. 207.



Черт. 208.

Принимая во вниманіе, что всякій плоскій многоугольникъ можетъ быть разбитъ діагоналями на рядъ треугольниковъ, мы можемъ высказать общую теорему, что

проекція площади всякаго плоскаго многоугольника на нѣкоторую плоскость проекцій P равна площади многоугольника, умноженной на косинусъ остраго двуграннаго угла, заключающагося между плоскостью многоугольника и плоскостью P.

Площадь всякой плоской криволинейной фигуры можетъ быть разсматриваема, какъ предѣлъ площадей вписанныхъ въ эту фигуру многоугольниковъ при безпредѣльномъ увеличеніи числа старонъ этихъ мноугольниковъ, а потому доказанная о многоугольникѣ теорема можетъ быть обобщена слѣдующимъ образомъ:

проекція площади всякой замкнутой криволинейной фигуры на нѣкоторую плоскость проекцій равна площади этой фигуры, умноженной на косинусъ угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекцій.

18. Сказанное прилагается съ большимъ удобствомъ къ нахожденію площади эллипса. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что эллипсъ можно разсматривать, какъ проекцію круга. Пусть заданъ нѣкоторый кругъ въ пространствѣ съ радіусомъ r. Обозначая черезъ θ острый уголъ, образуемый плоскостью заданнаго круга съ плос-

костью проекцій, мы замѣчаемъ, что въ проекціи получается эллипсъ, имѣющій полуоси: $a = r$, $b = r. \cos\theta$.

Согласно высказанной въ § 17 теоремѣ, мы замѣчаемъ, что

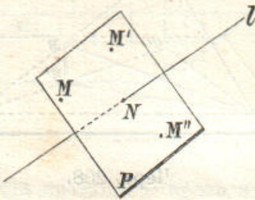
$$\text{площ. элл.} = \text{площ. кр.} \cos\theta.$$

Но площ. кр. $= \pi r^2$, слѣдовательно,

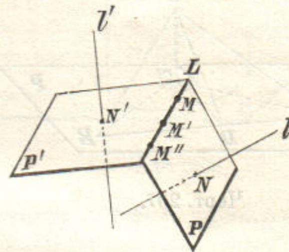
$$\text{площ. элл.} = \pi r^2. \cos\theta = \pi r. r. \cos\theta = \pi. a. b.$$

Опредѣленіе положенія точки въ пространствѣ при помощи проекціи на осяхъ. Прямолинейныя прямоугольныя координаты.

19. Одна проекція N нѣкоторой точки M на оси l (см. черт. 209) не опредѣляетъ положенія точки проектируемой, ибо всѣ точки M, M', M'',... на проектирующей плоскости P имѣютъ одну и ту же



Черт. 209.

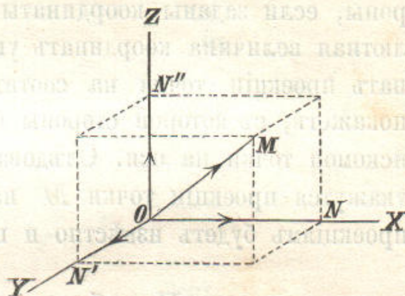


Черт. 210.

проекцію N на оси l. Точно также заданіе двухъ проекцій N и N' на двухъ не параллельныхъ осяхъ l и l' (см. черт. 210) не опредѣляетъ проектируемой точки, ибо всѣ точки M, M', M'',... на прямой L пересѣченія двухъ проектирующихъ плоскостей P и P' точки M имѣютъ однѣ и тѣ же проекціи N и N' на осяхъ l и l'. Проектируемая точка опредѣлится вполнѣ, если мы зададимъ еще третью проекцію N'' на третью ось l'', не параллельную ни одной изъ осей l и l' и не лежащую въ плоскости, параллельной двумъ указаннымъ осямъ. Итакъ, если заданы три проекціи N, N', N'' точки M на трехъ осяхъ l, l', l'' не параллельныхъ одной плоскости, то искомая проектируемая точка опредѣлится, какъ пересѣченіе трехъ плоскостей, проведенныхъ черезъ проекціи N, N', N'' перпендикулярно къ соотвѣтственнымъ осямъ l, l', l''. Направленіе осей l, l', l'' можетъ быть задаваемо совершенно произвольно.

20. Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать оси проекцій взаимно перпендикулярными и, кромѣ того, пересѣкающимися въ нѣкоторой точкѣ пространства. Совокупность выбранныхъ такимъ образомъ осей составляетъ такъ называемую *систему прямоугольныхъ прямолинейныхъ координатъ* (см. черт. 211). Оси проекцій называются *осями координатъ*. Точка O, въ которой пересѣкаются оси координатъ, называется *началомъ координатъ*.

На осяхъ координатъ разъ на всегда выберемъ положительныя направленія. Обыкновенно поступаютъ такъ: двѣ оси координатъ выбираютъ въ плоскости чертежа, одну OX горизонтально, а OZ — вертикально, третью же ось OY берутъ перпендикулярно къ плоскости чертежа.



Черт. 211.

На горизонтальной оси OX положительное направленіе выбирается отъ начала координатъ O направо; на оси OZ — вверхъ отъ начала и на оси OY впередъ отъ плоскости чертежа. Условившись въ направленіи координатныхъ осей, вводимъ понятіе о координатахъ точки.

Координатами нѣкоторой точки M называются проекціи на осяхъ координатъ разстоянія OM точки отъ начала координатъ. Проекція $\pm ON$ на оси OX обозначается обыкновенно черезъ x, сама же ось OX называется *осью x-овъ*. Проекція $\pm ON'$ на оси OY обозначается черезъ y, а сама ось OY называется *осью y-овъ*. Проекція $\pm ON''$ на оси OZ обозначается черезъ z, а сама ось OZ называется *осью z-овъ*.

Итакъ, мы видимъ, что координаты x, y, z нѣкоторой точки M, какъ проекціи нѣкотораго отрѣзка, суть нѣкоторыя длины, взятыя съ тѣмъ или другимъ знакомъ. Мы видѣли раньше, что знакъ проекціи опредѣляется вполнѣ указаніемъ направленія оси проекціи и направленія проектируемаго отрѣзка. Направленіе осей координатъ нами указано, остается условиться въ направленіи проектируемаго разстояніи MO; направленіе этого разстоянія берется обыкновенно отъ начала координатъ къ точкѣ M. Отсюда вытекаетъ слѣдующее

правило относительно знака координатъ: координата x положительна, если проекція N точки M на оси x-овъ находится съ той стороны начала координатъ, куда обращено положительное направленіе этой оси, и наоборотъ, координата x отрицательна, если проекція N лежитъ съ отрицательной стороны оси x-овъ; подобнымъ же образомъ указывается знакъ координатъ y и z.

Изъ всего сказаннаго можно заключить, что положеніе точки относительно координатной системы опредѣляется вполнѣ тремя ея координатами. Въ самомъ дѣлѣ, если задано положеніе M, то мы опредѣлимъ ея координаты x, y, z по абсолютной величинѣ и по знаку, проектируя эту точку на координатныя оси. Съ другой стороны, если заданы координаты нѣкоторой точки x, y, z, то абсолютная величина координатъ укажетъ разстояніе отъ начала координатъ проекціи точки на соотвѣтственной оси, а знакъ координаты покажетъ, съ которой стороны относительно начала лежитъ проекція искомой точки на оси. Слѣдовательно, по заданнымъ координатамъ укажутся проекціи точки M на координатныхъ осяхъ, а по этимъ проекціямъ будетъ извѣстно и положеніе точки.

Преобразованіе координатъ.

21. Хотя во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ употреблять главнымъ образомъ прямоугольныя координаты, тѣмъ не менѣе надо замѣтить, что, подобно тому, какъ мы это дѣлали на плоскости, можно опредѣлять положеніе точки въ пространствѣ болѣе общимъ образомъ, относя положеніе точки къ тремъ осямъ координатъ, проведеннымъ какъ угодно черезъ начало. Если углы между координатными осями не равны 90°, то система называется *косоугольною*.

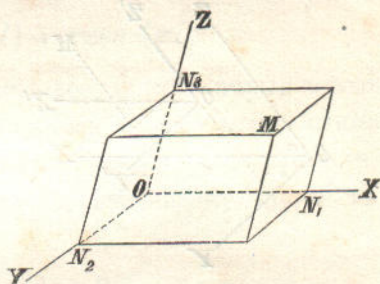
22. Итакъ, положимъ, что черезъ начало координатъ O проведены три произвольныя координатныя оси OX, OY, OZ (См. черт. 212), образующія нѣкоторый трехгранный уголъ съ вершиною въ началѣ. Три плоскости XOY, YOZ, ZOX, образующія этотъ трехгранный уголъ, называются *координатными плоскостями*.

Координатныя плоскости, продолженныя неопредѣленно, дѣлятъ пространство на восемь трехгранныхъ угловъ.

23. Пусть положительныя направленія осей выбраны такъ, какъ показано на чертежѣ (см. черт. 212). Косоугольныя координаты точки

M относительно OX, OY, OZ будемъ опредѣлять такъ: проводимъ черезъ точку M плоскости, параллельныя координатнымъ плоскостямъ XOY, YOZ, ZOX; эти три плоскости образуютъ съ тремя координатными плоскостями нѣкоторый параллелепипедъ, причемъ начало координатъ O и точка M будутъ двумя противоположными вершинами этого параллелепипеда. Три ребра параллелепипеда ON_1, ON_2 и ON_3 при вершинѣ O, направленные вдоль по осямъ OX, OY и OZ, принимаются за величины, опредѣляющія положеніе точки M.

Для избѣжанія неопредѣленности, въ которомъ изъ восьми трехгранныхъ угловъ, образуемыхъ координатными плоскостями, лежитъ чка M, на осяхъ координатъ указываются нѣкоторыя положительныя направленія и тогда ребрамъ параллелепипеда ON_1, ON_2, ON_3 приписывается знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, съ какой стороны относительно начала лежатъ точки N_1, N_2, N_3. Длины реберъ ON_1, ON_2, ON_3, взятыя съ тѣмъ или другимъ знакомъ, опредѣляютъ вполнѣ положеніе точки въ пространствѣ. Получаемыя такимъ образомъ числа обозначаются буквами x, y, z и называются *прямолинейными координатами точки M*.



Черт. 211.

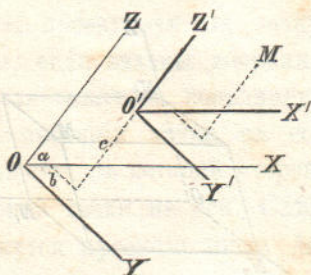
Когда оси координатъ взаимно перпендикулярны, то прямолинейныя координаты точки M на этихъ осяхъ обращаются въ проекціи разстоянія OM на осяхъ, что согласуется съ тѣмъ опредѣленіемъ координатъ, которое было дано выше.

24. Обращаемся теперь къ преобразованію координатъ, причемъ разсмотримъ самый общій случай преобразованія, то есть преобразованіе косоугольныхъ координатъ точки въ косоугольныя же, только относительно другой системы координатъ. Самое общее преобразованіе координатъ можетъ быть разсматриваемо, какъ совокупность слѣдующихъ двухъ: одно преобразованіе состоитъ въ перемѣнѣ положенія начала координатъ, причемъ направленіе осей не мѣняется, т. е. новыя оси параллельны старымъ и одинаково съ ними направлены; другое преобразованіе состоитъ въ измѣненіи направленія осей, причемъ начало координатъ остается безъ перемѣны.

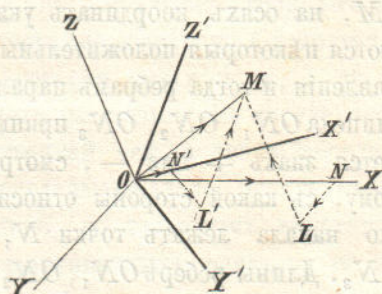
1. *Перенесеніе начала координатъ.*

25. Надо перейти отъ нѣкоторой системы координатъ $OXYZ$ къ другой $O'X'Y'Z'$ (см. черт. 213), у которой новыя оси $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ параллельны прежнимъ осямъ OX, OY, OZ и одинаково съ ними направлены, и только переносится начало координатъ изъ изъ точки O въ нѣкоторую другую точку O'. Назовемъ координаты новаго начала O' относительно старыхъ осей черезъ a, b, c.

Если возьмемъ какую нибудь точку M въ пространствѣ, составимъ координаты ея относительно старыхъ и новыхъ осей и назовемъ



Черт. 213.



Черт. 214.

старыя координаты ея черезъ x, y, z, а новыя черезъ x', y', z', то легко замѣтить, что получимъ:

$$x = a + x',\ y = b + y',\ z = c + z' \qquad (*)$$

Эти формулы преобразованія суть общія, какое-бы ни было положеніе новаго начала и какъ-бы ни была задана точка M. Если направленіе новой оси x' прямо противоположно направленію старой оси x, то тогда въ формулѣ: $x = a + x'$ надо перемѣнить знакъ у x, такъ что получимъ: $x = a - x'$; то-же самое замѣчаніе можно сдѣлать и относительно другихъ осей.

2. *Измѣненіе направленія осей.*

26. Обращаемся теперь къ другому случаю, когда начало координатъ остается то-же, мѣняется же направленіе осей. Заданы старыя оси OX, OY, OZ, причемъ координаты нѣкоторой точки будутъ длины ON, NL и LM, взятыя съ приличными знаками. (См. черт. 214). Требуется перейти къ новымъ осямъ OX', OY', OZ' и показать зависимость между старыми координатами точки M и новыми ON', $N'L'$, $L'M$.

Разстояніе OM съ координатами ON, NL, LM точки M составляетъ замкнутый многоугольникъ; то-же разстояніе OM съ координатами точки M относительно новыхъ осей ON', $N'L'$, $L'M$ составляетъ также замкнутый многоугольникъ. Проектируя на любую ось l, получимъ слѣдующія два равенства:

$$OM \cos (OM, l) = x \cos (xl) + y \cos (yl) + z \cos (zl), \; ^{*)}$$

$$OM \cos (OM, l) = x' \cos (x'l) + y' \cos (y'l) + z \cos (z'l),$$

откуда, слѣдовательно:

$$x \cos (xl) + y \cos (yl) + z \cos (zl) =$$

$$= x' \cos (x'l) + y' \cos (y'l) + z' \cos (z'l).$$

Помощью этой формулы можно выразить координаты старыя черезъ новыя слѣдующимъ образомъ. Беремъ за ось l поочередно одинъ разъ перпендикуляръ n къ плоскости YOZ, другой разъ перпендикуляръ n' къ плоскости ZOX и, наконецъ, перпендикуляръ n'' къ плоскости XOY; тогда получимъ:

1) для оси n: $\angle (ny) = 90°$, $\angle (nz) = 90°$, $x \cos (nx) =$

$= x' \cos (x'n) + y' \cos (y'n) + z' \cos (z'n)$; отсюда

$$x = \frac{x' \cos (x'n) + y' \cos (y'n) + z' \cos (z'n)}{\cos (xn)}; \qquad \text{(A)}$$

2) для оси n $\angle (n'x) = 90°$, $\angle (n'z) = 90°$, слѣдовательно, отсюда имѣемъ:

$$y = \frac{x' \cos (x'n') + y' \cos (y'n') + z' \cos (z'n')}{\cos (yn')}; \qquad \text{(A)}$$

3) для оси n'': $\angle (xn'') = 90°$, $\angle (yn'') = 90°$ и, слѣдовательно, отсюда

$$z = \frac{x' \cos (x'n'') + y' \cos (y'n'') + z' \cos (z'n'')}{\cos (zn'')}. \qquad \text{(A)}$$

---

*) Такъ какъ x, y, z обозначаютъ координаты, т. е. числа, взятыя уже съ нѣкоторымъ знакомъ, + или —, то мы имѣемъ право въ этой формулѣ разумѣть подъ углами (xl), (yl),... углы, образуемые положительными направленіями координатныхъ осей съ направленіемъ оси проекцій l.

Если первоначальная система была прямоугольна, то углы (xn), (yn'), (zn'') равны нулю и, слѣдовательно, ихъ косинусы обращаются въ единицы, такъ что формулы преобразованія принимаютъ видъ:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos(x'x) + y'\cos(y'x) + z'\cos(z'x) \\ y &= x'\cos(x'y) + y'\cos(y'y) + z'\cos(z'y) \\ z &= x'\cos(x'z) + y'\cos(y'z) + z'\cos(z'z), \end{aligned} \qquad (B)$$

т. е. каждая старая координата равна суммѣ проекцій на нее координатъ новыхъ.

27. Приведенныя формулы преобразованія (A) даютъ возможность отъ какой нибудь косоугольной системы координатъ перейти къ новой прямоугольной, такъ что, употребляя во всемъ дальнѣйшемъ прямоугольныя координаты, мы тѣмъ самымъ нисколько не нарушаемъ общности заключеній.

28. Остановимся съ особеннымъ вниманіемъ на случаѣ преобразованія одной прямоугольной системы координатъ въ другую, тоже прямоугольную. Этотъ случай очень важенъ въ приложеніяхъ Аналитической Геометріи.

Будемъ, для краткости, формулы (B) писать такъ:

$$\begin{aligned} x &= x'\alpha + y'\beta + z'\gamma \\ y &= x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma' \\ z &= x'\alpha'' + y'\beta'' + z'\gamma'', \end{aligned} \qquad (B')$$

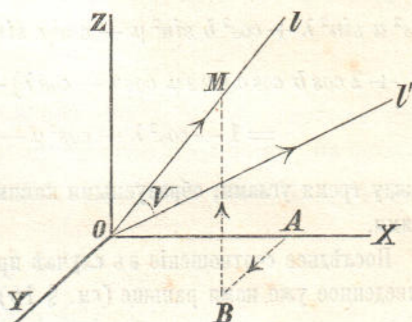
гдѣ α, β, γ,.... соотвѣтственные косинусы угловъ между старыми и новыми осями.

Для большей наглядности можно составить слѣдующую табличку:

	x'	y'	z'
x	α	β	γ
y	α'	β'	γ'
z	α''	β''	γ''

Изъ этой таблички видно, что, напримѣръ, α' есть косинусъ угла между y и x', β''—косинусъ угла между z и y' и т. д.

29. Возьмемъ прямоугольную систему координатъ; черезъ начало O проведемъ двѣ прямыя Ol и Ol'. Пусть углы, которые составляетъ съ осями координатъ прямая Ol, будутъ a, b, c, а углы, составляемые прямою Ol' съ тѣми же осями координатъ, будутъ a', b', c'. Покажемъ, какъ вычислить уголъ V между этими прямыми.



Черт. 215.

Обозначимъ черезъ x, y, z координаты нѣкоторой точки M, лежащей на первой прямой въ разстоянии l отъ начала координатъ; тогда, очевидно, будетъ: $x=l\cos a$, $y=l\cos b$, $z=l\cos c$. Три координаты x, y и z составляютъ ломанную линію $OABM$, замыкаемую прямою OM, равной, по длинѣ, l. (См. черт. 215).

Проектируя этотъ многоугольникъ на другую прямую l', получимъ:

$$l\cos V = x\cos a' + y\cos b' + z\cos c'.$$

Подставляя сюда, вмѣсто x, y и z, ихъ выраженія и сокращая на l, получимъ:

$$\cos V = \cos a\cos a' + \cos b\cos b' + \cos c\cos c'.$$

Два направленія Ol и Ol' будутъ перпендикулярны между собою, если будетъ удовлетворено условіе:

$$\cos a\cos a' + \cos b\cos b' + \cos c\cos c' = 0.$$

30. Предположимъ теперь, что углы между координатными осями YOZ, ZOX, XOY суть λ, μ, ν. Проектируя перпендикулярно на каждую изъ осей прямую OM и ломанную линію $OABM$, получимъ:

$$l\cos a = x + y\cos\nu + z\cos\mu,$$

$$l\cos b = x\cos\nu + y + z\cos\lambda, \qquad (1)$$

$$l\cos c = x\cos\mu + y\cos\lambda + z; \text{ (см. § 9)}$$

проектируя тѣ-же линіи на прямую Ol, получимъ:

$$l = x\cos a + y\cos b + z\cos c. \qquad (2)$$

Если изъ уравненій (1) найдемъ значенія x, y, z

$$x = \frac{\cos a\,(1 - \cos^2\lambda) + \cos b\,(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + \cos c\,(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)}{1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}\,l \quad (3)$$

и подставимъ ихъ въ уравненіе (2), то получимъ соотношеніе:

$$\cos^2 a\,\sin^2\lambda + \cos^2 b\,\sin^2\mu + \cos^2 c\,\sin^2\nu + 2\cos a\cos b\,(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) +$$
$$+ 2\cos b\cos c\,(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + 2\cos c\cos a\,(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) =$$
$$= 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu$$

между тремя углами, образуемыми какимъ нибудь направленіемъ съ косоугольными осями.

Послѣднее соотношеніе въ случаѣ прямоугольныхъ координатъ обращается въ выведенное уже нами раньше (см. § 10) соотношеніе:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Проектируя на прямую Ol' прямую OM и ломанную линію $OABM$, по предыдущему, получимъ:

$$l\cos V = x\cos a' + y\cos b' + z\cos c';$$

замѣняя x, y, z ихъ значеніями (3), получаемъ формулу:

$$\cos V = \frac{\left\{\begin{array}{c}\cos a\cos a'\sin^2\lambda + \cos b\cos b'\sin^2\mu + \cos c\cos c'\sin^2\nu + \\ + (\cos a\cos b' + \cos b\cos a')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + \ldots\end{array}\right\}}{1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu},$$

выражающую уголъ между двумя направленіями Ol и Ol'.

Общій знаменатель формулъ (3) можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ, который полезно знать, именно:

$$4\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\,\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\,\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\,\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.$$

31. Возвращаясь теперь къ предмету § 28, мы замѣчаемъ, что между девятью косинусами, заключенными въ табличку, должны существовать слѣдующія соотношенія:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1,$$
$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \quad (1)$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1,$$

ибо старыя оси прямоугольны; кромѣ того, такъ какъ новыя оси прямоугольны, то должны существовать соотношенія:

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= 0, \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= 0, \\ \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Умножая уравненія (B') § 28 сначала на α, α', α'', потомъ на β, β', β'' и, наконецъ, на γ, γ', γ'' и складывая, получимъ, на основаніи соотношеній (1) и (2), слѣдующія выраженія новыхъ координатъ черезъ старыя:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \\ y' &= \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ z' &= \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z. \end{aligned} \qquad (c)$$

Послѣднія формулы, впрочемъ, можно написать и непосредственно на основаніи таблички.

Такъ какъ старыя и новыя оси прямоугольны, то, на основаніи формулъ (c), мы замѣчаемъ, что разсматриваемые косинусы должны, кромѣ соотношеній (1) и (2), удовлетворять еще слѣдующимъ аналогичнымъ:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1, \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0, \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

32. Между девятью косинусами можно указать большое число соотношеній, выводимыхъ изъ соотношеній (1), (2), (3), (4). Такъ, напримѣръ, первыя два изъ числа соотношеній (4) даютъ:

$$\frac{\alpha'}{\beta\gamma''-\gamma\beta''} = \frac{\beta'}{\gamma\alpha''-\alpha\gamma''} = \frac{\gamma'}{\alpha\beta''-\beta\alpha''} = \pm\frac{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}{\sqrt{(\beta\gamma''-\gamma\beta'')^2+(\gamma\alpha''-\alpha\gamma'')^2+(\alpha\beta''-\beta\alpha'')^2}}.$$

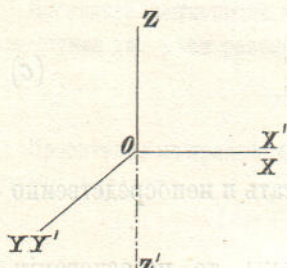
Но существуетъ слѣдующее тождество:

$$(\beta\gamma''-\gamma\beta'')^2+(\gamma\alpha''-\alpha\gamma'')^2+(\alpha\beta''-\beta\alpha'')^2=$$
$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)-(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'')^2. \quad *)$$

На основаніи послѣдняго тождества мы замѣчаемъ, что оба корня въ послѣдней дроби равны единицѣ, такъ что получается:

$$\frac{\alpha'}{\beta\gamma''-\gamma\beta''}=\frac{\beta'}{\gamma\alpha''-\alpha\gamma''}=\frac{\gamma'}{\alpha\beta''-\beta\alpha''}=\pm 1.$$

Придется взять тотъ или другой знакъ, соотвѣтственно расположенію направленій новыхъ осей. Знакъ — придется выбрать въ томъ случаѣ, когда направленія всѣхъ трехъ осей новыхъ могутъ быть совмѣщены съ направленіемъ осей старыхъ поворотомъ новой системы около начала, ибо тогда косинусы будутъ такіе: $\alpha=\beta'=\gamma''=1$, $\alpha'=\alpha''=\beta=\beta''=\gamma==\gamma'=0$. Знакъ + придется взять въ томъ случаѣ, когда направленія новыхъ осей не могутъ быть совмѣщены съ направленіями старыхъ поворотомъ всей новой системы вокругъ начала координатъ; въ послѣднемъ случаѣ новую систему можно такъ повернуть вокругъ начала, что направленія осей OX и OY совпадутъ съ направленіями соотвѣтственныхъ осей OX' и OY', направленія же осей OZ и OZ' будутъ противоположны (см. черт. 216).



Черт. 216.

Формулы Эйлера.

33. Предыдущія формулы, служащія для перехода отъ одной системы прямоугольныхъ координатъ къ другой, тоже прямоугольной, имѣютъ то удобство, что онѣ симметричны относительно угловъ; но, хотя этихъ угловъ числомъ девять, на самомъ дѣлѣ только три произвольны; поэтому никогда не слѣдуетъ терять изъ виду связывающихъ ихъ соотношеній. Эта связь между косинусами мѣшаетъ иногда замѣтить тождественность двухъ выраженій; а потому старались найти такія формулы, въ которыя входили бы только три постоянныхъ; при выборѣ такого рода формулъ руководились требованіями различныхъ вопросовъ механики и астрономіи, гдѣ по преимуществу и употребляются эти новыя формулы.

34. Эйлеромъ было замѣчено, что первоначальную систему прямоугольныхъ координатъ можно заставить совпасть со всякою новою, имѣющей то же начало,

*) Тождество это указано въ первый разъ Эйлеромъ (см. прибавленіе).

тремя поворотами на нѣкоторые углы около трехъ нѣкоторыхъ осей, проходящихъ черезъ начало. Такъ, напримѣръ, можно повернуть координатную систему XYZ сначала на нѣкоторый уголъ ψ около оси z-овъ; получимъ новую координатную систему $x_1\ y_1\ z_1$. Мы замѣчаемъ, что при такомъ поворотѣ координата z нѣкоторой точки M пространства не мѣняется, такъ что

$$z = z_1; \tag{1}$$

что касается другихъ координатъ x, y, то, на основаніи формулъ § 41 (Геометрія двухъ измѣреній), имѣемъ:

$$x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi,\ y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi. \tag{2}$$

Поворачиваемъ теперь новую нашу систему на нѣкоторый уголъ θ вокругъ оси x_1; получаемъ новую систему координатъ $x_2y_2z_2$, причемъ

$$x_1 = x_2, \tag{3}$$

а другія двѣ координаты y_1 и z_1 выражаются формулами:

$$y_1 = y_2 \cos\theta - z_2 \sin\theta,\ z_1 = y_2 \sin\theta + z_2 \cos\theta. \tag{4}$$

Поворачиваемъ, наконецъ, послѣднюю систему на нѣкоторый уголъ φ около оси z_2; получимъ новую систему $x_3y_3z_3$, причемъ

$$z_2 = z_3, \tag{5}$$

а x_2 и y_2 выражаются формулами:

$$x_2 = x_3 \cos\varphi - y_3 \sin\varphi,\ y_2 = x_3 \sin\varphi + y_3 \cos\varphi. \tag{6}$$

Такимъ образомъ имѣемъ девять уравненій, исключая изъ которыхъ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, получимъ три уравненія слѣдующаго вида:

$$\begin{aligned} x &= Ax_3 + By_3 + Cz_3 \\ y &= A'x_3 + B'y_3 + C'z_3 \\ z &= A''x_3 + B''y_3 + C''z_3, \end{aligned}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} A &= \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta, \\ B &= -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta, \\ C &= \sin\psi \sin\theta, \\ A' &= \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\theta, \\ B' &= -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\theta, \\ C' &= -\cos\psi \sin\theta, \\ A'' &= \sin\varphi \sin\theta, \\ B'' &= \cos\varphi \sin\theta, \\ C'' &= \cos\theta. \end{aligned}$$

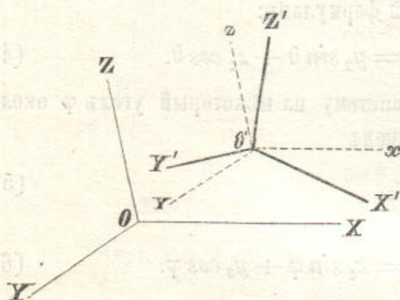
Легко показать, что можно подобрать углы φ, ψ, θ такъ, чтобы система координатъ $x_3y_3z_3$ совпала съ системою $x'y'z'$ (См. формулы (B') въ § 28). Надо только положить $A=\alpha$, $B=\beta$, $C=\gamma$, $A'=\alpha'$,... и т. д. Получаемъ для опредѣленія этихъ угловъ формулы:

$$\cos\theta=\gamma'',\ tg\,\varphi=\frac{\alpha''}{\beta''},\ tg\,\psi=-\frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Формулы Эйлера предполагаютъ, что двѣ координатныя системы совмѣстимы.

3. *Общее преобразованіе координатъ.*

35. Разсмотримъ, наконецъ, общій случай, когда измѣняется и начало координатъ, и направленіе осей. Положеніе новыхъ осей $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ опредѣляется координатами a, b, c новаго начала O' и углами, образуемыми новыми осями со старыми. Для того, чтобы выразить старыя координаты x, y, z черезъ новыя x', y', z', введемъ въ разсмотрѣніе вспомогательную систему $O'xyz$ (см. черт. 217), начало которой совпадаетъ съ началомъ новой системы $O'X'Y'Z'$, а оси параллельны старымъ OX, OY, OZ. Тогда, называя координаты точки относительно этихъ вспомогательныхъ осей черезъ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, получимъ, на основаніи сказаннаго:



Черт. 217.

$$x=a+\bar{x};$$

$$y=b+\bar{y};$$

$$z=c+\bar{z};$$

$$\bar{x}=\alpha x'+\beta y'+\gamma z';$$

$$\bar{y}=\alpha' x'+\beta' y'+\gamma' z';$$

$$\bar{z}=\alpha'' x'+\beta'' y'+\gamma'' z',$$

гдѣ коэффиціенты α, β, γ, α', β', γ',... находятся по табличкѣ § 28.

Отсюда получаемъ искомыя общія формулы преобразованія одной прямолинейной системы координатъ въ другую въ такомъ видѣ:

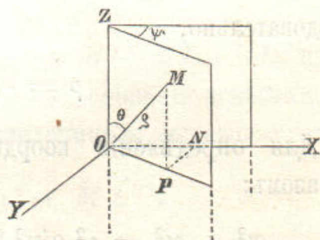
$$x = a + \alpha x' + \beta y' + \gamma z',$$

$$y = b + \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z',$$

$$z = c + \alpha'' x'' + \beta'' y'' + \gamma'' z''.$$

Полярныя координаты въ пространствѣ.

36. Возьмемъ прямоугольную систему координатъ $OXYZ$; тогда положеніе нѣкоторой точки M можетъ быть опредѣлено слѣдующимъ образомъ. Соединимъ точку M съ началомъ координатъ (см. черт. 218) и обозначимъ уголъ, образуемый прямою OM съ осью Z черезъ θ. Проведемъ черезъ ось OZ и точку M плоскость P и обозначимъ двугранный уголъ между плоскостью P и плоскостью XOZ черезъ ψ. Кромѣ того, черезъ ρ обозначимъ разстояніе отъ точки M до начала координатъ.



Черт. 218.

Условимся длину ρ считать положительною и мѣняющеюся отъ 0 до ∞. Уголъ θ можно считать измѣняющимся отъ 0° до 180°, уголъ же ψ—отъ 0° до 360°. Числа ρ, θ, ψ опредѣляють вполнѣ положеніе точки, а потому эти числа называются *полярными координатами* точки; ρ называется *радіусомъ векторомъ* точки M, ψ—*долготою* точки M, θ—*дополненіемъ широты* точки M. Плоскость P называется *меридіаномъ* точки M; плоскость XOZ называется *первымъ меридіаномъ*. Точка O называется *полюсомъ* координатной системы.

Не трудно вывести зависимость между прямоугольными и полярными координатами точки M. Проекція прямой OM на ось z-овъ равна координатѣ z, откуда

$$z = \rho \cos \theta.$$

Проекція OP прямой OM на плоскость XOY равна $\rho\, sin\, \theta$; проектируя же OP сначала на ось x-овъ, а потомъ на ось y-овъ, мы получимъ:

$$x = ON = OP\, cos\, \psi = \rho\, sin\, \theta .\, cos\, \psi,$$

$$y = NP = OP sin \psi = \rho\, sin\, \theta .\, sin\, \psi.$$

Изъ этихъ формулъ легко по даннымъ прямоугольнымъ координатамъ вычислить соотвѣтственныя полярныя.

Возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\, sin^2\, \theta .\, cos^2\, \psi + \rho^2\, sin^2\, \theta\, sin^2\, \psi + \rho^2\, cos^2\, \theta =$$
$$= \rho^2\, sin^2\, \theta\, (cos^2\, \psi + sin^2\, \psi) + \rho^2\, cos^2\, \theta = \rho^2\, (sin^2\, \theta + cos^2\, \theta) = \rho^2;$$

слѣдовательно,

$$\rho = + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Для опредѣленія координатъ θ и ψ поступаемъ слѣдующимъ образомъ:

$$x^2 + y^2 = \rho^2\, sin^2\, \theta\, (cos^2\, \psi + sin^2\, \psi) = \rho^2\, sin^2\, \theta,$$

откуда

$$\rho\, sin\, \theta = + \sqrt{x^2 + y^2};$$

принимая же во вниманіе, что

$$\rho\, cos\, \theta = z,$$

получаемъ:

$$tg\, \theta = \frac{+\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

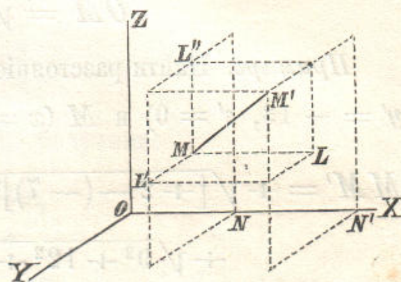
Дѣля y на x, получимъ:

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho\, sin\, \theta .\, sin\, \psi}{\rho\, sin\, \theta .\, cos\, \psi} = tg\, \psi.$$

Разстояніе между двумя точками.

37. Заданы координаты двухъ точекъ M и M'; координаты точки M пусть будутъ x, y, z, а координаты точки M'—x', y', z'; требуется найти разстояніе между этими точками.

Проведемъ черезъ точку M три плоскости, проектирующія эту точку на оси координатъ; такія же три проектирующія плоскости проведемъ и черезъ точку M' (см. черт. 219); тогда эти шесть плоскостей образуютъ между собою прямоугольный параллелепипедъ, діагональ котораго есть искомое разстояніе MM'. Ребра этого параллелепипеда ML, ML', ML'' параллельны осямъ координатъ OX, OY, OZ; на основаніи доказанной въ § 10 теоремы, квадратъ діагонали параллелепипеда выражается такъ:



Черт. 219.

$$\overline{MM'}^2 = \overline{ML}^2 + \overline{ML'}^2 + \overline{ML''}^2.$$

Остается найти длину реберъ параллелепипеда. Разсмотримъ ребро ML, параллельное оси OX. Легко замѣтить, что оно равно разстоянію между двумя плоскостями, проектирующими точки M и M' на ось OX, другими словами, это ребро равно разстоянію NN' между проекціями N и N' точекъ M и M'. Разстояніе NN' есть сумма или разность разстояній ON и ON': разность въ случаѣ, если точки N и N' лежатъ по одну сторону начала координатъ, и сумма если по разныя. Въ первомъ случаѣ обѣ координаты x и x' одного знака, а во второмъ разныхъ знаковъ; слѣдовательно, во всѣхъ случаяхъ разстояніе NN' равно разности координатъ $x'-x$, взятой съ тѣмъ или другимъ знакомъ. Итакъ, мы получаемъ: $\overline{ML}^2 = \overline{NN'}^2 = (x'-x)^2$. Точно также покажемъ, что $\overline{ML'}^2 = (y'-y)^2$ и $\overline{ML''}^2 = (z'-z)^2$; слѣдовательно, искомое разстояніе опредѣлится черезъ координаты данныхъ точекъ по такой формулѣ:

$$MM' = +\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

Если одна изъ точекъ, напримѣръ точка M', совпадаетъ съ началомъ координатъ, то

$$x' = 0,\ y' = 0,\ z' = 0$$

и разстояніе любой точки M отъ начала координатъ O будетъ:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Примѣръ. Найти разстояніе между двумя точками: $M'(x' = +2, y' = -13, z' = 0)$ и $M(x = -7, y = -1, z = +8)$.

$$MM' = +\sqrt{[+2-(-7)]^2 + [-13-(-1)]^2 + [0-8]^2} =$$
$$+\sqrt{9^2 + 12^2 + 8^2} = +\sqrt{289} = 17.$$

38. Если мы разстоянію между двумя точками M и M' припишемъ нѣкоторое направленіе, напр. идущее отъ точки M къ точкѣ M', то можно получить какъ длину δ разстоянія MM', такъ и косинусы угловъ α, β, γ, которые это разстояніе образуетъ съ осями координатъ, проектируя ломанную OMM' и замыкающую OM' на оси координатъ:

$$x + \delta \cos\alpha = x',\ y + \delta\cos\beta = y',\ z + \delta\cos\gamma = z',$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{x' - x}{\delta},\ \cos\beta = \frac{y' - y}{\delta},\ \cos\gamma = \frac{z' - z}{\gamma}.$$

39. Что касается случая косоугольныхъ координатъ, то, называя черезъ λ, μ, ν углы между осями YOZ, ZOX, XOY и полагая $x' - x = a$, $y' - y = b$ и $z' - z = c$, получимъ, на основаніи соображеній § 9:

$$\delta = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2\,bc\cos\lambda + 2\,ca\cos\mu + 2\,ab\cos\nu}.$$

Также могутъ быть, на основаніи соображеній того же § 9, получены $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

40. По координатамъ двухъ точекъ M_1 и M_2 найти координаты точки M, дѣлящей разстояніе между ними въ отношеніи $m : n$. Проектируя точки $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$ на ось x-овъ, получимъ двѣ точки $N_1\ (x_1)$ и $N_2\ (x_2)$. Проекція $N\ (x)$ точки $M\ (x, y, z)$, дѣлящей въ данномъ отношеніи разстояніе M_1M_2, будетъ дѣлить въ томъ же отношеніи разстояніе N_1N_2; слѣдовательно,

координата x точки N, или, что одно и то же, координата x точки M выразится по формулѣ:

$$x = \frac{mx_1 + nx_2}{m + n} \text{ (см. § 10 Геом. дв. изм.).}$$

Проектируя подобнымъ образомъ точки M_1, M, M_2 на ось y-овъ, получимъ:

$$y = \frac{my_1 + ny_2}{m + n}$$

и, наконецъ, проектируя на ось z-овъ, получимъ:

$$z = \frac{mz_1 + nz_2}{m + n}.$$

Если мы желаемъ указать точку M внѣ отрѣзка M_1M_2, для которой было бы

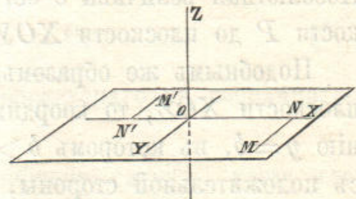
$$\frac{MM_2}{MM_1} = \frac{m}{n},$$

то, на основанiи соображенiй § 35 (Геом. дв. изм.), получимъ:

$$x = \frac{mx_1 - nx_2}{m - n},\ y = \frac{my_1 - ny_2}{m - n},\ z = \frac{mz_1 - nz_2}{m - n}.$$

Плоскость.

41. *Основная теорема*. Какъ бы ни была задана плоскость въ пространствѣ, координаты точекъ, лежащихъ на ней, удовлетворяютъ всегда нѣкоторому уравненiю первой степени.



Черт. 220.

Для доказательства теоремы разсмотримъ всѣ возможные случаи положенiя плоскости въ пространствѣ. Начнемъ съ простѣйшихъ. Заданная плоскость совпадаетъ съ одной изъ координатныхъ плоскостей, напр. съ плоскостью XOY (см. черт. 220). Возьмемъ на заданной плоскости P (XOY) рядъ точекъ M, M', и т. д. Координаты ихъ будутъ:

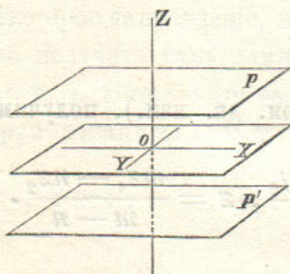
Для точки M: $x = + ON, y = + NM, z = 0.$

Для точки M': $x' = - ON', y' = - N'M', z' = 0.$

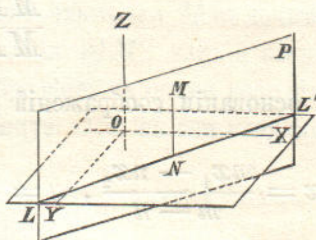
Итакъ мы видимъ, что гдѣ бы на заданной плоскости P (XOY) мы ни взяли точку M, координата ея z будетъ удовлетворять уравненію $z = 0$, что и требовалось доказать.

Точно также покажемъ, что если заданная плоскость P будетъ совпадать съ плоскостью XOZ, то координаты любой точки M подобной плоскости будутъ удовлетворять уравненію $y = 0$, и, наконецъ, если заданная плоскость P совпадаетъ съ плоскостью YOZ, то будетъ удовлетворено уравненіе $x = 0$ координатами x любой точки, лежащей на ней.

42. Если плоскость P задана параллельно координатной плоскости XOY (см. черт. 221), тогда, очевидно, координаты всѣхъ ея



Черт. 221.



Черт. 222.

точекъ удовлетворяютъ уравненію $z = c$, гдѣ постоянное число c положительно, если плоскость P лежитъ выше плоскости XOY, и, наоборотъ $c < 0$, если плоскость P' лежитъ ниже плоскости XOY. Абсолютная величина c есть не что иное, какъ разстояніе отъ плоскости P до плоскости XOY.

Подобнымъ же образомъ, если задана плоскость, параллельная плоскости XOZ, то координаты ея точекъ удовлетворяютъ уравненію $y = b$, въ которомъ $b > 0$, если плоскость встрѣчаетъ ось y-овъ съ положительной стороны, и $b < 0$, если она пересѣкаетъ ось y-овъ съ отрицательной стороны. Наконецъ, плоскости, параллельной плоскости YOZ, соотвѣтствуетъ уравненіе $x = a$.

43. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда заданная плоскость P параллельна оси координатъ OZ. Пусть LL' будетъ линія пересѣченія

заданной плоскости P съ плоскостью координатъ XOY (см. черт. 222). На основаніи соображеній геометріи двухъ измѣреній мы замѣчаемъ, что координаты любой точки N прямой LL' удовлетворяютъ уравненію первой степени

$$Ax + By + C = 0, \tag{*}$$

отнесенному къ двумъ координатнымъ осямъ OX и OY въ плоскости XOY. Уравненіе (*) можетъ быть разсматриваемо, какъ принадлежащее не только слѣду LL' плоскости P, но и самой плоскости P, параллельной оси OZ. Въ самомъ дѣлѣ, какую бы точку M мы ни взяли на этой плоскости, координата z ея вполнѣ произвольна, что же касается координатъ x и y, то онѣ совпадаютъ съ таковыми же координатами точки N—основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M вдоль по плоскости P на плоскость XOY; точка же N лежитъ на слѣдѣ LL' и, слѣдовательно, ея координаты удовлетворяютъ уравненію (*). Итакъ мы видимъ, уравненію (*) удовлетворяютъ координаты любой точки M на заданной плоскости P, параллельной оси OZ.

Подобнымъ же образомъ можно показать, что если заданная плоскость P параллельна оси координатъ OY, то координаты всѣхъ точекъ M, на ней лежащихъ, удовлетворяютъ нѣкоторому уравненію первой степени:

$$A_1x + B_1z + C_1 = 0. \tag{**}$$

Уравненіе (**) есть не что иное, какъ уравненіе слѣда заданной плоскости P на координантной плоскости XOZ.

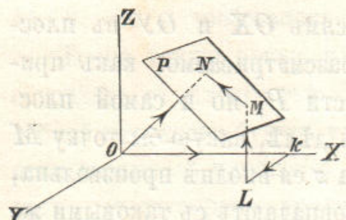
Наконецъ, если заданная плоскость параллельна оси координатъ OX, то уравненіе ея будетъ

$$A_2y + B_2z + C_2 = 0. \tag{***}$$

Это уравненіе есть уравненіе слѣда, образуемаго на координатной плоскости YOZ заданною плоскостью.

44. Обращаемся теперь къ самому общему случаю, когда плоскость задана въ пространствѣ какъ нибудь. Положеніе любой плоскости P относительно координатной системы можетъ быть задано разстояніемъ ея отъ начала координатъ, которое считается, какъ извѣстно, по перпендикуляру ON, опущенному изъ начала коорди-

натъ O на плоскость P (см. черт. 223), и углами, составляемыми этимъ перпендикуляромъ съ осями координатъ. Пусть будетъ p длина перпендикуляра ON и обозначимъ углы, составляемые этимъ перпендикуляромъ съ осями координатъ OX, OY, OZ черезъ (px), (py), (pz).



Черт. 223.

Возьмемъ на плоскости P нѣкоторую точку M, соединимъ ее съ основаніемъ N перпендикуляра p прямою MN, кромѣ того, проведемъ прямыя ML и LK, параллельныя осямъ OZ и OY, причемъ точка K лежитъ на оси OX. Тогда, обозначая координаты точки M черезъ x, y, z, будемъ имѣть:

$$x = OK,\ y = kL,\ z = LM.$$

Проектируя многоугольникъ $OKLMN$ на перпендикуляръ ON, получимъ:

$$ON = OK\cos(px) + KL\cos(py) + LM\cos(pz) +$$
$$+ MN\cos(p, MN).$$

Прямая MN лежитъ въ плоскости P, слѣдовательно, уголъ $(p, MN) = 90°$ и $\cos(p, MN) = 0$, откуда получимъ слѣдующее уравненіе:

$$p = x\cos(px) + y\cos(py) + z\cos(pz), \qquad (A)$$

которому удовлетворяютъ координаты x, y, z любой точки M заданной плоскости P. Уравненіе (A) первой степени относительно координатъ x, y, z, что и доказываетъ справедливость теоремы для разсматриваемаго общаго случая. Итакъ, высказанная основная теорема доказана вполнѣ.

Слѣдствіе. Если заданная плоскость проходитъ черезъ начало координатъ, то длина перпендикуляра p равна нулю, и уравненіе, соотвѣтствующее такой плоскости, имѣетъ видъ:

$$x\cos(px) + y\cos(py) + z\cos(pz) = 0.$$

Въ этомъ уравненіи подъ углами (px), (py), (pz) разумѣются углы, составляемые однимъ изъ направленій перпендикуляра къ данной плоскости съ осями координатъ.

45. *Обратная теорема.* Всякое уравненіе первой степени относительно координатъ вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

опредѣляетъ нѣкоторую плоскость въ пространствѣ.

Мы докажемъ теорему вполнѣ, если покажемъ, что черезъ умноженіе на нѣкоторый множитель R это уравненіе можетъ быть приведено къ виду:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p, \tag{2}$$

гдѣ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, умножая уравненіе (1) на R, получимъ:

$$ARx + BRy + CRz = -DR. \tag{3}$$

Такъ какъ послѣднее уравненіе должно совпадать съ уравненіемъ (2), то должно быть:

$$AR = \cos\alpha,\ BR = \cos\beta,\ CR = \cos\lambda, -DR = p.$$

Возвышая первыя три равенства въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$(A^2 + B^2 + C^2)\, R^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\lambda = 1,$$

откуда

$$R = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Углы же α, β, γ и величина p опредѣляются слѣдующими равенствами:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ p = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4}$$

Знаки надо брать во всѣхъ формулахъ или верхніе, или нижніе, притомъ такъ, чтобы для p выходила положительная величина. Принимая во вниманіе, что уравненіе (3), происходящее отъ умно-

женія уравненія (1) на нѣкоторый постоянный множитель, совершенно равносильно уравненію (1), ибо удовлетворяется, очевидно, тѣми же значеніями координатъ x, y, z, что и уравненіе (1) и, слѣдовательно, должно опредѣлять то же геометрическое мѣсто, что и уравненіе (1). Уравненіе же (3) равносильно съ уравненіемъ (2), гдѣ α, β, γ и p опредѣляются по формуламъ (4), и, слѣдовательно, это уравненіе опредѣляетъ плоскость, находящуюся въ разстояніи p отъ начала координатъ, причемъ перпендикуляръ, опущенный изъ начала координатъ на эту плоскость, составляетъ съ осями координатъ углы α, β, γ.

Слѣдствіе I. Если два изъ числа коэффиціентовъ A, B, C равны нулю, то плоскость, опредѣляемая уравненіемъ (1), параллельна одной изъ координатныхъ плоскостей и можетъ совпадать съ послѣднею при $D=0$.

Слѣдствіе II. Если одинъ изъ числа коэффиціентовъ A, B, C равенъ нулю, то плоскость, опредѣляемая уравненіемъ (1), параллельна одной изъ координатныхъ осей; причемъ эта ось будетъ лежать въ ней, если $D=0$.

Слѣдствіе III. Плоскость, опредѣляемая уравненіемъ (1), проходитъ черезъ начало координатъ, если коэффиціентъ $D=0$.

46. Итакъ мы видимъ, что коэффиценты A, B, C при координатахъ x, y, z въ уравненіи плоскости пропорціональны косинусамъ угловъ α, β, γ, составляемыхъ перпендикуляромъ къ плоскости съ осями координатъ; на этомъ основаніи коэффиценты эти называются *угловыми*.

Зависимость между косинусами:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

даетъ возможность, зная числа, которымъ пропорціональны эти косинусы, найти самые косинусы, какъ это только что было показано.

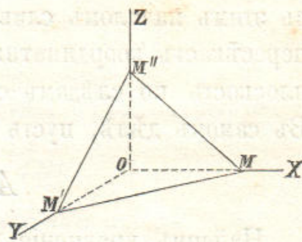
Углы α, β, γ суть не что иное, какъ углы, составляемые заданною плоскостью P съ координатными плоскостями YOZ, XOZ и XOY.

47. Для того, чтобы построить плоскость, заданную уравненіемъ, достаточно построить три какія нибудь точки, лежащія на этой плоскости. Удобнѣе всего искать точки, въ которыхъ заданная плоскость пересѣкается съ осями координатъ (см. черт. 224). Пусть будетъ

задана нѣкоторая плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

Найдемъ координату x точки M, въ которой плоскость (1) пересѣкаетъ ось x-овъ. Такъ какъ точкамъ, лежащимъ на оси x-овъ, соотвѣтствуютъ равныя нулю значенія другихъ координатъ y, z, то мы получимъ искомое значеніе x, положивъ въ уравненіи (1) $y = 0$, $z = 0$:



Черт. 224.

$$Ax + B.o + C.o = -D,$$

откуда

$$x = -\frac{D}{A} = a.$$

Точно также получимъ координату y точки M', въ которой плоскость (1) пересѣкаетъ ось y-овъ, полагая въ уравненіи (1) $x = 0$, $z = 0$:

$$B.y = -D, \; y = -\frac{D}{B} = b.$$

И, наконецъ, получимъ координату z точки M'', въ которой плоскость (1) пересѣкаетъ ось z-овъ, положивъ $x = 0$, $z = 0$:

$$C.z = -D, \; z = -\frac{D}{C} = c.$$

Итакъ мы видимъ, что

$$\pm OM = a, \; \pm OM' = b, \; \pm OM'' = c.$$

Но

$$A = -\frac{D}{a}, \; B = -\frac{D}{b}, \; C = -\frac{D}{c};$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе (1), получимъ:

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0;$$

сокращая на D, получимъ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (1')$$

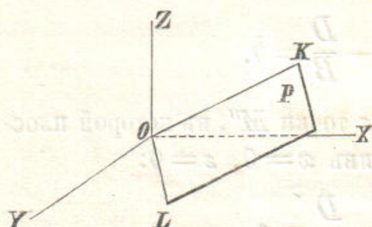
уравненіе плоскости, выраженное въ отрѣзкахъ a, b, c на координатныхъ осяхъ.

Указанный способъ построенія плоскости, заданной уравненіемъ, непримѣнимъ, если коэффиціентъ $D=0$, ибо тогда уравненію плоскости удовлетворяютъ координаты начала ($x=0$, $y=0$, $z=0$), такъ что плоскость проходитъ черезъ начало координатъ, и, слѣдовательно, съ этимъ началомъ сливаются всѣ три точки, въ которыхъ плоскость пересѣкаетъ координатныя оси. Въ этомъ случаѣ лучше всего строить плоскость по слѣдамъ ея на двухъ изъ координатныхъ плоскостей. Въ самомъ дѣлѣ, пусть уравненіе заданной плоскости будетъ:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Найдемъ уравненіе слѣда OL плоскости P на плоскости XOY (см. черт. 225).

Такъ какъ для всѣхъ точекъ плоскости XOY $z=0$, то, подставляя въ уравненіе заданной плоскости вмѣсто z нуль, получимъ уравненіе $Ax+By=0$, которое и будетъ опредѣлять на плоскости XOY прямую OL, проходящую черезъ начало координатъ, по которой плоскость P пересѣкаетъ плоскость XOY. Подобнымъ же образомъ, подставляя въ уравненіе заданной плоскости $y=0$, получимъ уравненіе $Ax+Cz=0$, опредѣляющее слѣдъ OK плоскости P на плоскости XOZ. Двумя полученными прямыми OL и OK, проходящими черезъ начало координатъ, положеніе плоскости P вполнѣ опредѣляется.



Черт. 225.

48. Въ § 45 мы видѣли, что умноженіемъ обѣихъ частей уравненія $Ax+By+Cz=-D$ на нѣкоторый множитель R уравненіе это приводится къ виду: $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$, называемому *нормальнымъ*. Покажемъ, какъ опредѣлить множитель R въ случаѣ косоугольныхъ координатъ.

Если оси координатъ косоугольны и составляютъ углы YOZ, ZOX, XOY, которыхъ косинусы суть λ, μ, ν, то для опредѣленія множителя R надо будетъ взять равенство

$$\Delta=(1-\lambda^2)\cos^2\alpha+(1-\mu^2)\cos^2\beta+(1-\nu^2)\cos^2\gamma+2(\mu\nu-\lambda)\cos\beta\cos\gamma+$$
$$+2(\nu\lambda-\mu)\cos\gamma\cos\alpha+2(\lambda\mu-\nu)\cos\alpha\cos\beta,$$

(см. § 30), гдѣ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & \mu, & \nu \\ \mu, & 1, & \lambda \\ \nu, & \lambda, & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\lambda\mu\nu,$$

и подставить въ это равенство AR, BR, CR вмѣсто $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, (См. § 24 Геом. дв. изм.). Тогда получимъ:

$$R = \frac{1}{\pm\sqrt{2Q}},$$

гдѣ

$$2Q = \frac{1}{\Delta}\left[(1-\lambda^2)A^2 + (1-\mu^2)B^2 + (1-\nu^2)C^2 + 2(\mu\nu-\lambda)BC + \right.$$
$$\left. + 2(\nu\lambda-\mu)CA + 2(\lambda\mu-\nu)AB\right].$$

49. Если двѣ плоскости, заданныя уравненіями:

$$Ax + By + Cy + D = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

будутъ параллельны, то онѣ пересѣкутъ каждую изъ координатныхъ плоскостей по двумъ параллельнымъ прямымъ. Этимъ замѣчаніемъ можно воспользоваться, чтобы написать условія, которымъ должны удовлетворять угловые коэффиціенты двухъ параллельныхъ плоскостей. Въ самомъ дѣлѣ, разсматриваемыя плоскости пересѣкаютъ плоскость XOY по прямымъ: $Ax + By + D = 0$, $A_1x + B_1y + D_1 = 0$; послѣднія прямыя будутъ параллельны, если $A : A_1 = B : B_1$. Подобнымъ образомъ мы замѣтимъ, что условіемъ параллельности слѣдовъ данныхъ плоскостей на плоскости YOZ будетъ: $B : B_1 = C : C_1$ и, наконецъ, слѣды на плоскости ZOX будутъ параллельны, если $A : A_1 = C : C_1$. Отсюда заключаемъ, что условіемъ параллельности двухъ плоскостей будетъ пропорціональность ихъ угловыхъ коэффиціентовъ:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Задачи на плоскость.

50. *Задача*. Найти общее уравненіе плоскостей, проходящихъ черезъ данную точку.

Пусть будетъ задана нѣкоторая точка M_0, координаты которой

пусть будутъ x_0, y_0, z_0. Общее уравненіе плоскости имѣетъ видъ:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

Для того, чтобы эта плоскость проходила черезъ точку M_0, необходимо, чтобы координаты точки M_0 удовлетворяли уравненію (1), т. е. чтобы было

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (2)$$

Это уравненіе есть условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты уравненія плоскости A, B, C, D, чтобы эта плоскость проходила черезъ точку M_0. Условіе (2) даетъ возможность выразить одинъ изъ коэффиціентовъ уравненія черезъ другіе. Такъ, напримѣръ, можно выразить коэффиціентъ D:

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Подставляя полученное для D выраженіе въ уравненіе плоскости, получимъ:

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

или окончательно:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3)$$

Здѣсь коэффиціенты A, B, C совершенно произвольны. Мѣняя ихъ, будемъ получать всѣ возможныя плоскости, проходящія черезъ точку M_0.

Произвольностью коэффиціентовъ можно воспользоваться, чтобы заставить плоскость, проходящую черезъ заданную точку M_0, удовлетворять еще какому нибудь условію: напр., чтобы эта плоскость была параллельна нѣкоторой заданной плоскости

$$A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0. \qquad (4)$$

Для этого надо взять коэффиціенты A, B, C въ уравненіи (3) пропорціональными, или, еще проще, равными угловымъ коэффиціентамъ A_0, B_0, C_0 заданной плоскости (4). Такъ что, окончательно, уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку M_0 (x_0, y_0, z_0) и параллельной заданной плоскости (4), можетъ быть написано такъ:

$$A_0(x - x_0) + B_0(y - y_0) + C_0(z - z_0) = 0.$$

Примѣръ. Провести черезъ точку $(+1, -2, -3)$ плоскость, параллельную плоскости $4x - 3y + z = 1$.

Уравненіе искомой плоскости будетъ:

$$4(x-1) - 3(y+2) + (z+3) = 0,$$

или

$$4x - 3y + z = 7.$$

51. *Задача.* Провести плоскость черезъ три данныя точки.

Для того, чтобы плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ проходила черезъ три данныя точки $M'(x', y', z')$, $M''(x'', y'', z'')$, $M'''(x''', y''', z''')$, необходимо, чтобы координаты этихъ точекъ удовлетворяли уравненію плоскости, т. е. чтобы было

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Изъ этихъ уравненій первой степени, если точки M', M'', M''' не совпадаютъ и не лежатъ на одной прямой, можно опредѣлить три отношенія $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$; подставляя затѣмъ три числа, полученныя для этихъ отношеній, въ уравненіе

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + 1 = 0, \qquad (1)$$

получимъ окончательно уравненіе плоскости, проходящей черезъ три данныя точки M', M'', M'''.

Примѣръ. Провести плоскость черезъ точки: $M'(1, 1, 1)$; $M''(2, -1, 0)$; $M'''(0, 4, -3)$.

Возьмемъ общее уравненіе плоскости въ такомъ видѣ:

$$ax + by + cz = 1, \qquad (1)$$

гдѣ

$$a = \frac{A}{D}, \ b = \frac{B}{D}, \ c = \frac{C}{D},$$

тогда условіе (*) будетъ имѣть видъ:

$$a.1 + b.1 + c.1 = 1;\ a.2 + b.(-1) + c.0 = 1;$$

$$a.0 + b.4 + c.(-3) = 1,$$

или, что одно и то же:

$$a + b + c = 1,\ 2a - b = 1,\ 4b - 3c = 1. \qquad (**)$$

Рѣшая эти уравненія относительно a, b, c, получимъ:

$$a = \frac{11}{17},\ b = \frac{5}{17},\ c = \frac{1}{17};$$

подставляя же послѣднія значенія въ уравненіе (1), получимъ:

$$\frac{11}{17}x + \frac{5}{17}y + \frac{1}{17}z = 1$$

или

$$11x + 5y + z = 17.$$

Это есть уравненіе искомой плоскости, проходящей черезъ заданныя три точки.

52. Черезъ исключеніе коэффиціентовъ A, B, C, D изъ четырехъ уравненій (*) и $Ax + By + Cz + D = 0$ получается уравненіе плоскости, проходящей черезъ три заданныя точки, которое можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(См. прибавленіе).

53. *Задача.* Найти точку пересѣченія трехъ плоскостей.

Заданы три плоскости уравненіями:

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Координаты искомой точки пересѣченія этихъ трехъ плоскостей должны удовлетворять всѣмъ тремъ уравненіямъ (1) и, слѣдовательно

для рѣшенія предложеннаго вопроса приходится рѣшить три уравненія (1) первой степени относительно трехъ неизвѣстныхъ x, y и z.

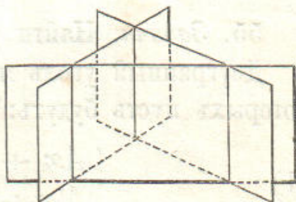
Напримѣръ, три плоскости: $x+y+z=1$, $x+2y+z=1$ и $y+z=1$ пересѣкаются въ точкѣ, координаты которой суть $x=0$, $y=\frac{2}{3}, z=\frac{1}{3}$.

Въ томъ случаѣ, когда система (1) заключаетъ въ себѣ противорѣчіе, другими словами, когда одно изъ уравненій системы противорѣчитъ другимъ, то нѣтъ такихъ координатъ x, y, z, которыя-бы удовлетворяли тремъ заданнымъ уравненіямъ.

1) Въ системѣ: $x+y=0$, $x+y=1$, $z=2$ второе уравненіе: $x+y=1$ противорѣчитъ первому: $x+y=0$.

2) Въ системѣ: $x+y=0$, $y+z=0$, $x+2y+z=1$ послѣднее уравненіе: $x+2y+z=1$ противорѣчитъ уравненію: $x+2y+z=0$, получающемуся отъ сложенія первыхъ двухъ.

Въ этихъ двухъ примѣрахъ нѣтъ общей точки пересѣченія трехъ плоскостей. Въ самомъ дѣлѣ, въ первомъ примѣрѣ двѣ изъ заданныхъ плоскостей: $x+y=0$ и $x+y=1$ параллельны между собою; что касается второго при мѣра, то въ немъ заданныя плоскости пересѣкаются по двѣ по прямымъ, параллельнымъ между собою (См. черт. 226).



Черт. 226.

Можетъ случиться, что одно изъ уравненій системы будетъ слѣдствіемъ двухъ другихъ; напримѣръ: $x+y=0$, $y+z=0$, $x-z=0$; здѣсь третье уравненіе получается черезъ вычитаніе второго изъ перваго и, слѣдовательно, это третье уравненіе удовлетворяется тѣми значеніями координатъ, которыя заразъ удовлетворяютъ двумъ первымъ уравненіямъ. Другими словами, точки, лежащія на пересѣченіи двухъ первыхъ плоскостей, лежатъ также на третьей плоскости, слѣдовательно, всѣ три плоскости пересѣкаются по одной прямой, такъ что въ этомъ случаѣ существуетъ безчисленное множество точекъ, общихъ тремъ плоскостямъ; всѣ эти точки составляютъ нѣкоторую прямую. Наконецъ, можетъ случиться, что всѣ три уравненія суть слѣдствія одного изъ нихъ и, слѣдовательно, равносильны этому

одному; напримѣръ: $x+y+z=1$; $2x+2y+2z=2$; $3x+3y+3z=3$; тогда всѣ три плоскости совпадаютъ.

54. Если даны четыре плоскости въ пространствѣ, то мы получимъ условіе встрѣчи ихъ въ одной точкѣ слѣдующимъ образомъ: Пусть уравненія заданныхъ плоскостей будутъ:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0.$$

Находя координаты точки встрѣчи трехъ изъ числа этихъ плоскостей и подставляя ихъ въ уравненіе четвертой, получимъ искомое условіе, которое и будетъ, слѣдовательно, результатомъ исключенія изъ четырехъ уравненій трехъ величинъ x, y, z. Это условіе можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & D_3 \\ A_4, & B_4, & C_4, & D_4 \end{vmatrix}=0.$$

55. *Задача.* Найти уголъ между двумя плоскостями.

Двугранный уголъ между двумя плоскостями P и P', уравненія которыхъ пусть будутъ:

$$(1)\qquad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 & (P) \\ A'x+B'y+C'z+D'=0, & (P') \end{cases}$$

равенъ углу V между перпендикулярами, опущенными изъ начала координатъ на плоскости P и P'. Обозначимъ для краткости черезъ α, β, γ углы, составляемые перпендикуляромъ къ плоскости P съ осями координатъ, а черезъ α', β', γ' соотвѣтственные углы другаго перпендикуляра. На основаніи соображеній § 45 мы замѣчаемъ, что косинусы угловъ α, β, γ и α', β', γ' выражаются черезъ угловые коэффиціенты уравненій (1) при помощи формулъ:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\alpha'=\frac{A'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$
$$\cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta'=\frac{B'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\gamma'=\frac{C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Въ § 29 выведено выраженіе для косинуса угла между двумя направленіями. Обозначая искомый уголъ между плоскостями черезъ V, получимъ:

$$\cos V = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'.$$

Подставляя въ послѣднее равенство написанныя выше выраженія косинусовъ, получаемъ слѣдующую формулу:

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Слѣдствіе I. Если заданныя плоскости взаимно перпендикулярны, то $V = 90^0$, $\cos V = 0$. Отсюда получаемъ условіе перпендикулярности двухъ плоскостей въ слѣдующемъ видѣ;

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Слѣдствіе II. Принимая во вниманіе тождество:

$$(A^2 + B^2 + C^2)\ (A'^2 + B'^2 + C'^2) - (AA' + BB' + CC')^2 =$$

$$= (BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2,$$

получимъ такую формулу:

$$\sin V = \frac{\sqrt{(BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Для того, чтобы вывести условія параллельности двухъ плоскостей, необходимо приравнять нулю числителя послѣдней формулы, что даетъ равенство:

$$(BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2 = 0.$$

Сумма трехъ квадратовъ дѣйствительныхъ чиселъ не можетъ равняться нулю иначе, какъ если всѣ три квадрата порознь равны нулю, что даетъ:

$$BC' - CB' = 0,\ CA' - AC' = 0,\ AB' - BA' = 0.$$

Послѣднія условія равносильны съ выведенными уже нами

раньше:

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'} \quad \text{(См. § 49).}$$

Примѣръ. Найти коэффиціентъ C уравненія плоскости: $2x+4y+$ $+Cz=1$, такъ чтобы эта плоскость была перпендикулярна къ плоскости: $x-y+2z=3$.

Необходимо и достаточно, чтобы коэффиціентъ C удовлетворялъ условію перпендикулярности: $1.2+(-1)4+2.C=0$, откуда $C=1$.

56. **Косинусъ угла между двумя плоскостями въ косоугольныхъ координатахъ выражается по формуламъ:**

$$\cos V=\frac{1}{\sqrt{2Q}.\sqrt{2Q'}}\left[A'\frac{\partial Q}{\partial A}+B'\frac{\partial Q}{\partial B}+C'\frac{\partial Q}{\partial C}\right],$$

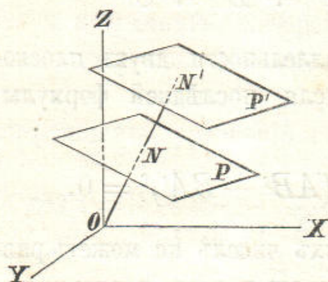
гдѣ

$$2Q=\frac{1}{\Delta}\left[(1-\lambda^2)A^2+(1-\mu^2)B^2+(1-\nu^2)C^2+2(\mu\nu-\lambda)BC+\right.$$
$$\left.+2(\lambda\nu-\mu)CA+2(\lambda\mu-\nu)AB\right] \text{ (см. § 48),}$$

а $2Q'$ получается изъ выраженія для $2Q$ замѣною коэффиціентовъ уравненія первой плоскости коэффиціентами другой; значеніе-же числа Δ указано въ § 48.

57. *Задача*. Найти растояніе точки до плоскости.

Покажемъ предварительно, какъ найти разстояніе между двумя параллельными плоскостями. Такъ какъ угловые коэффиціенты въ уравненіяхъ двухъ взаимно параллельныхъ плоскостей пропорціональны, то мы всегда, чрезъ дѣленіе одного изъ уравненій на нѣкоторое число, можемъ представить уравненія двухъ параллельныхъ плоскостей такъ, что угловые коэффиціенты въ обоихъ уравненіяхъ будутъ одинаковы;



Черт. 227.

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

$$Ax+By+Cz+D'=0 \qquad (2)$$

и уравненія будутъ отличаться только постоянными членами. Въ § 45 мы видѣли, что разстояніе ON (см. черт. 227) отъ начала ко-

ординатъ до плоскости

$$(P)\ Ax + By + Cz + D = 0$$

выражается такъ:

$$ON = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Разстояніе же ON' до другой плоскости

$$(P')\ \ Ax + By + Cz + D' = 0$$

выражается такъ:

$$ON' = \frac{-D'}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Разстояніе между плоскостями P и P' равно

$$ON' - ON = \frac{D - D'}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

гдѣ знакъ долженъ быть взятъ такой, чтобы разстояніе NN' выходило положительное.

Обращаемся теперь къ нахожденію разстоянія точки $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$, лежащей внѣ плоскости P, уравненіе которой есть

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1}$$

Черезъ точку M_0 проводимъ плоскость P_0

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0, \tag{2}$$

параллельную плоскости P; уравненіе (2) этой послѣдней плоскости можетъ быть переписано такъ:

$$Ax + By + Cz + D_0 = 0, \tag{2'}$$

гдѣ

$$-D_0 = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$

Искомое разстояніе δ точки M_0 отъ плоскости P равно разстоянію между плоскостями P и P_0; слѣдовательно,

$$\delta = \frac{D - D_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3}$$

Итакъ, если мы желаемъ найти разстояніе точки M_0 до плоскости P, представленной уравненіемъ (1), то нужно подставить координаты точки M_0 въ первую часть уравненія (1) и затѣмъ результатъ раздѣлить на

$$\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Знакъ въ формулѣ (3) выбирается такъ, чтобы δ выходило положительнымъ.

Примѣръ. Найти разстояніе точки M_0 $(x_0=1,\ y_0=1,\ z_0=1)$ до плоскости: $9x+12y+8z=46$.

$$\delta=\frac{9.1+12.1+8.1-46}{-\sqrt{9^2+12^2+8^2}}=\frac{-17}{-\sqrt{289}}=\frac{17}{17}=1.$$

58. Въ случаѣ косоугольныхъ координатъ разстояніе точки M_0 (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ выразится по формулѣ

$$\delta=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{2Q}},$$

гдѣ $2Q$ имѣетъ значеніе, указанное въ § 48.

59. *Задача.* Провести между двумя параллельными плоскостями P' и P'' новую плоскость P, параллельную заданнымъ, разстоянія которой до плоскостей P'' и P' находились-бы въ отношеніи $m:n$.

Пусть уравненія заданныхъ плоскостей будутъ:

$$Ax+By+Cz+D'=0\ (P'),\ Ax+By+Cz+D''=0.\ (P'')$$

Уравненіе искомой плоскости пусть будетъ

$$Ax+By+Cz+D=0.\quad (P)$$

Разстояніе между плоскостями P и P' равно: $(D'-D)\ R$; разстояніе-же между плоскостями P и P'' будетъ: $(D-D'')\ R$.

Условія задачи требуютъ, чтобы было

$$\frac{(D-D'')\ R}{(D'-D)\ R}=\frac{m}{n},$$

отсюда, сокращая на R, получимъ для D слѣдующее выраженіе

$$D=\frac{D'm+D''n}{m+n}. \qquad (1)$$

Если мы захотимъ найти уравненіе плоскости, параллельной двумъ заданнымъ, лежащей внѣ пространства между ними и отношеніе разстояній которой до заданныхъ плоскостей P'' и P' равно $m:n$, то получимъ:

$$D=\frac{D'm-D''n}{m-n}. \tag{2}$$

Слѣдствіе. При $m=n$ получаемъ по формулѣ (1):

$$D=\frac{D'+D''}{2}$$

и, слѣдовательно, уравненіе плоскости, проходящей по срединѣ между двумя параллельными плоскостями, имѣетъ видъ:

$$Ax+By+Cz+\frac{D'+D''}{2}=0.$$

Это замѣчаніе въ дальнѣйшемъ будетъ играть важную роль.

Прямая линія.

60. Всякая прямая линія въ пространствѣ можетъ быть разсматриваема, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей; поэтому въ Аналитической Геометріи принято прямую линію L задавать двумя уравненіями первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1}$$

$$A'x+B'y+C'z+D'=0, \tag{2}$$

опредѣляющими двѣ плоскости P и P', въ пересѣченіи которыхъ лежитъ разсматриваемая прямая L.

Такъ какъ черезъ всякую прямую можетъ быть проведено безчисленное множество плоскостей, и прямая вполнѣ опредѣляется любыми двумя изъ числа этихъ плоскостей, то мы замѣчаемъ, что прямая линія можетъ быть задаваема на безчисленное множество способовъ, получающихся отъ различныхъ преобразованій, которымъ мы можемъ подвергать систему уравненій (1) и (2). Одинъ изъ наиболѣе часто употребляемыхъ способовъ преобразованія состоитъ въ рѣшеніи уравненій (1) и (2) относительно двухъ изъ числа координатъ, напр.,

относительно x и y. Въ послѣднемъ случаѣ, прямая L будетъ опредѣляться слѣдующими двумя уравненіями:

$$x = az + p \tag{3}$$

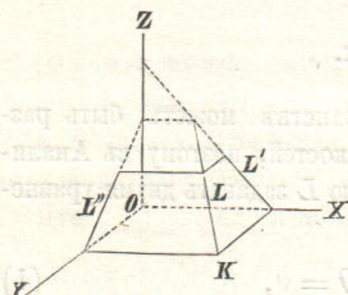
$$y = bz + q, \tag{4}$$

гдѣ, очевидно,

$$a = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'},\ p = \frac{D'B - B'D}{AB' - BA'},\ b = \frac{A'C - C'A}{AB' - BA'},$$

$$q = \frac{DA' - AD'}{AB' - BA'}.$$

Плоскости (3) и (4) выбраны такъ изъ числа плоскостей, проходящихъ черезъ заданную прямую L, что плоскость (3) параллельна оси y-овъ и представляетъ изъ себя плоскость, проектирующую данную прямую на плоскость XOZ (см. черт. 228); плоскость же (4) есть плоскость, проектирующая прямую L на плоскость YOZ.



Черт. 228.

Уравненія (3) и (4) могутъ быть еще разсматриваемы, какъ уравненія двухъ прямыхъ: первое изъ нихъ есть уравненіе проекціи L' прямой L на плоскости XOZ, а второе опредѣляетъ проекцію L'' заданной прямой на плоскости YOZ. Отсюда мы видимъ, что a есть тангенсъ угла, составляемаго съ осью Z проекціею L' данной прямой на плоскости XOZ, а b есть тангенсъ угла, составляемаго съ тою же осью проекціею на плоскость YOZ. Если мы въ уравненіяхъ (3) и (4) подставимъ $z = 0$, то получимъ: $x = p$, $y = q$, что намъ покажетъ, что p и q суть координаты на плоскости XOY той точки K, въ которой эту плоскость встрѣчаетъ заданная прямая L.

Итакъ мы видимъ, что общія уравненія прямой, которыя могутъ быть представлены въ видѣ (3) и (4), содержатъ четыре произвольныхъ параметра a, b, p, q.

Указаннаго рѣшенія относительно x и y произвести нельзя, если

$AB' - BA' = 0$. Въ этомъ случаѣ заданная прямая лежитъ въ плоскости, параллельной плоскости XOY. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ существуетъ пропорція $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = k$, гдѣ k обозначаетъ общую величину отношеній. Отсюда $A' = Ak$, $B' = Bk$. Уравненіе (2) обращается въ слѣдующее:

$$k(Ax + By) + C'z = D'. \qquad (*)$$

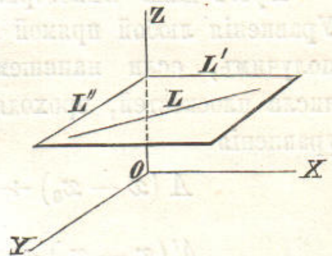
Умножимъ теперь уравненіе (1) на k и вычтемъ изъ уравненія (*), тогда получимъ:

$$(C' - Ck)\,z = D' - kD,$$

откуда

$$z = \frac{D' - kD}{C' - kC}, \qquad (**)$$

что подтверждаетъ высказанное. Въ этомъ случаѣ дѣйствительно прямая L лежитъ въ плоскоси (**), параллельной плоскости XOY и, какъ легко замѣтить, не опредѣляется своими проекціями L' и L'' (см. черт. 229) на плоскостяхъ XOZ и YOZ, ибо любая прямая на плоскости (**) имѣетъ однѣ и тѣ же проекціи L' и L'' на плоскостяхъ XOZ и YOZ. Если мы всетаки захотимъ опредѣлить прямую ея проекціями на двухъ изъ координатныхъ плоскостей, то надо будетъ рѣшать уравненія (1) и (2) заданной прямой относительно другой пары координатъ; напримѣръ, относительно x и z, или относительно y и z.



Черт. 229.

Примѣры. 1) Дана прямая: $x + y + z = 1$, $2x + 3y + z = 1$. Умножаемъ первое уравненіе на 2 и вычитаемъ изъ второго; тогда получимъ:

$$y - z = -1, \text{ или } y = z - 1;$$

изъ перваго уравненія:

$$x = -y - z + 1 = -(z - 1) - z + 1 = -2z + 2,$$

откуда окончательно имѣемъ:

$$x = -2z + 2, \; y = z - 1,$$

такъ что

$$a = -2,\ b = 1,\ p = 2,\ q = -1.$$

2) Задана прямая: $x + y + z = 1,\ 2x + 2y + z = 1.$

Эти уравненія не могутъ быть рѣшены относительно x и y, ибо x и y изъ нихъ исключаются. Въ самомъ дѣлѣ, умножая первое уравненіе на 2 и вычитая изъ второго, получимъ $z = 1$ ... (*), отсюда первое уравненіе обращается въ $x + y = 0$ ... (**); уравненія (*) и (**) могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ: $x = -y + 0, z = 0 . y + 1$. Послѣднія уравненія представляютъ не что иное, какъ результатъ рѣшенія заданныхъ уравненій относительно x и z.

Задачи на прямую.

61. *Задача.* Найти общія уравненія прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку.

Пусть дана нѣкоторая точка въ пространствѣ M_0 (x_0, y_0, z_0). Уравненія любой прямой L, проходящей черезъ заданную точку, мы получимъ, если напишемъ уравненія двухъ какихъ нибудь изъ числа плоскостей, проходящихъ черезъ точку M_0. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$$A'(x - x_0) + B'(y - y_0) + C'(z - z_0) = 0, \quad (1)$$

опредѣляютъ нѣкоторую прямую L, проходящую черезъ точку M_0. Мѣняя величину коэффиціентовъ A, B, C, A', B' и C', мы получимъ различныя прямыя, проходящія черезъ заданную точку. Можно получить уравненія прямой, проходящей черезъ заданную точку, въ болѣе простомъ видѣ, если взять общія уравненія прямой въ такомъ видѣ:

$$x = az + p,\ y = bz + q. \quad (*)$$

Если прямая проходитъ черезъ точку M_0, то координаты x_0, y_0, z_0 должны удовлетворять уравненію (*), т. е. должны имѣть мѣсто равенства:

$$x_0 = az_0 + p;\ y_0 = bz_0 + q; \quad (**)$$

исключая изъ уравненій (*) и (**) p и q, получимъ:

$$x - x_0 = a(z - z_0),\ y - y_0 = b(z - z_0). \qquad (2)$$

Послѣднія уравненія могутъ быть переписаны такъ:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{1}. \qquad (2')$$

Итакъ мы видимъ, что общія уравненія (2) прямыхъ, проходящихъ черезъ заданную точку, заключаютъ два произвольныхъ параметра a и b. Легко показать, что уравненія (1) могутъ быть приведены къ виду (2'). Въ самомъ дѣлѣ, умножая первое изъ уравненій (1) на C', а второе на C и вычитая, получимъ:

$$(A'C - AC')(x - x_0) + (B'C - BC')(y - y_0) = 0,$$

откуда

$$\frac{x - x_0}{BC' - CB'} = \frac{y - y_0}{CA' - AC'},$$

точно также получимъ:

$$\frac{y - y_0}{CA' - AC'} = \frac{z - z_0}{AB' - BA'}.$$

Итакъ, окончательно, уравненія (1) могутъ быть представлены въ такомъ видѣ:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \qquad (3)$$

гдѣ

$$l = BC' - CB',\ m = CA' - AC',\ n = AB' - BA'.$$

Въ виду частаго употребленія уравненій прямой въ видѣ (3), полезно указать законъ составленія коэффиціентовъ l, m, n. Если мы условимся значекъ $'$ ставить надъ вторыми буквами, то мы замѣтимъ, что коэффиціентъ n изъ коэффиціента m, а послѣдній изъ l получаются при помощи такъ называемой круговой подстановки буквъ. (*Круговою* называется такая подстановка, при которой мы букву A замѣняемъ черезъ букву B, B черезъ C, а C опять черезъ A). Уравненія всякой прямой всегда и на безчисленное множество способовъ могутъ быть написаны въ видѣ (3), ибо за точку M_0 мы можемъ

принять любую изъ точекъ, лежащихъ на заданной прямой. Возьмемъ, напримѣръ, прямую: $x+y+z=3$, $2x-y+1=0$ и укажемъ произвольную точку на этой прямой, напримѣръ, ту, для которой $x=0$, тогда изъ второго уравненія получимъ: $y=1$, а изъ перваго: $z=2$. Итакъ, точка (0, 1, 2) лежитъ на заданной прямой. Въ данномъ случаѣ: $A=1$, $B=1$, $C=1$, $A'=2$, $B'=1$, $C'=0$. Слѣдовательно, уравненія заданной прямой имѣютъ видъ:

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}.$$

62. Покажемъ теперь, какъ на практикѣ дѣлать приведеніе уравненій прямой линіи къ указанному въ предыдущемъ параграфѣ виду.

Пусть уравненія заданной прямой будутъ

$$x-3y+7z-1=0;\ 4x+y+z+2=0.$$

При помощи этихъ уравненій можно выразить одну изъ координатъ, напримѣръ x, черезъ другія y и z. Въ самомъ дѣлѣ, исключая изъ уравненій y, получимъ:

$$13x+4z+5=0,$$

откуда

$$x=\frac{z-\left(-\frac{5}{4}\right)}{-\frac{13}{4}}.$$

Исключая подобнымъ же образомъ изъ обоихъ уравненій z, получимъ:

$$29x+4y+13=0,$$

откуда

$$x=\frac{y-\left(-\frac{13}{4}\right)}{-\frac{29}{4}}.$$

Но

$$x=\frac{x-0}{1},$$

слѣдовательно, получаемъ:

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-\left(-\frac{13}{4}\right)}{-\frac{29}{4}}=\frac{z-\left(-\frac{5}{4}\right)}{-\frac{13}{4}}.$$

63. *Задача*. Найти уравненія прямой, проходящей черезъ двѣ заданныя точки.

Уравненія

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \tag{1}$$

какъ мы уже видѣли, опредѣляютъ прямую, проходящую чрезъ точку M_0 (x_0, y_0, z_0). Покажемъ, какъ опредѣлить произвольные коэффиціенты l, m, n подъ тѣмъ условіемъ, чтобы прямая (1) проходила черезъ другую точку M_1 (x_1, y_1, z_1). Для того, чтобы точка M_1 лежала на прямой, необходимо и достаточно, чтобы ея координаты x_1, y_1, z_1 удовлетворяли уравненію (1), т. е. чтобы было:

$$\frac{x_1-x_0}{l}=\frac{y_1-y_0}{m}=\frac{z_1-z_0}{n}. \tag{1'}$$

Исключая величины l, m, n изъ уравненій (1) и (1′), получимъ

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{2}$$

Уравненія (2) могутъ быть разсматриваемы, какъ уравненія прямой, проходящей черезъ двѣ заданныя точки M_0 и M_1, если мы въ нихъ x, y, z будемъ считать перемѣнными координатами, соотвѣтствующими разнымъ точкамъ на прямой, а числа x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1 заданными координатами точекъ M_0 и M_1.

Примѣръ. Провести прямую черезъ точки

$M_0(x_0=0,\ y_0=-1,\ z_0=2)$ и $M_1(x_1=1,\ y_1=2,\ z_1=0)$.

Уравненіе искомой прямой будетъ:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y+1}{2+1}=\frac{z-2}{-2},$$

или окончательно:

$$x=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-2}.$$

64. *Задача.* Найти углы, образуемые прямою съ осями координатъ.

Пусть будетъ задана прямая линія L уравненіями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \tag{1}$$

гдѣ x_0, y_0, z_0 координаты нѣкоторой точки, на ней лежащей. Покажемъ, что числа l, m, n пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ прямою L съ осями координатъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ на прямой L нѣкоторую другую точку M_1, координаты которой x_1, y_1, z_1 будутъ удовлетворять уравненіямъ (1):

$$\frac{x_1-x_0}{l}=\frac{y_1-y_0}{m}=\frac{z_1-z_0}{n}. \tag{1'}$$

Если теперь обозначимъ черезъ α, β, γ углы, составляемые направленіемъ прямой L, идущимъ отъ точки M_0 къ точкѣ M_1, съ положительными направленіями осей координатъ, то будемъ имѣть:

$$x_1-x_0=\overline{M_0M_1}\cos\alpha,\ y_1-y_0=\overline{M_0M_1}\cos\beta,$$

$$z_1-z_0=\overline{M_0M_1}\cos\gamma;$$

подставляя полученныя выраженія для разностей координатъ въ уравненія (1′) и сокращая на $\overline{M_0M_1}$, получимъ:

$$\frac{\cos\alpha}{l}=\frac{\cos\beta}{m}=\frac{\cos\gamma}{n}. \tag{2}$$

Уравненія (2) показываютъ, дѣйствительно, что коэффиціенты l, m, n пропорціональны косинусамъ угловъ α, β, γ прямой L съ осями координатъ, и потому эти коэффиціенты называются *угловыми*. Изъ формулъ (2), принимая во вниманіе соотношеніе $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, получимъ:

$$\cos\alpha=\frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\ \cos\beta=\frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Если уравненія прямой написаны въ такомъ видѣ: $x = az + p$, $y = bz + q$, то ихъ можно переписать, какъ мы видѣли раньше, такъ: $x - x_0 = a(z - z_0)$, $y - y_0 = b(z - z_0)$, гдѣ x_0, y_0, z_0 координаты нѣкоторой точки на прямой. Представляя послѣднія уравненія въ видѣ пропорціи, имѣемъ:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{1},$$

откуда видимъ, что

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{1},$$

такъ что въ этомъ случаѣ

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Наконецъ, если прямая будетъ задана уравненіями общаго вида: $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, то мы получимъ косинусы угловъ, составляемыхъ ею съ осями координатъ, основываясь на соотношеніи:

$$\frac{l}{BC' - CB'} = \frac{m}{CA' - AC'} = \frac{n}{AB' - BA'}.$$

Примѣръ. Пусть уравненія прямой будутъ: $x + y = 2$, $z = 4$. Эти уравненія могутъ быть переписаны такъ:

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 4}{0},$$

откуда мы замѣчаемъ, что

$$\frac{l}{1} = \frac{m}{1} = \frac{n}{0};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+1+0}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\beta = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+1+0}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\cos\gamma = 0$; слѣдовательно, $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 90°$.

65. При косоугольныхъ координатахъ будутъ для вычисленія угловъ прямой съ осями координатъ служить соображенія § 48; придется только въ выраженіи для Q вмѣсто A, B, C въ данномъ случаѣ писать l, m, n.

66. *Задача.* Черезъ данную точку провести прямую, составляющую данные углы съ осями координатъ.

Положимъ, что черезъ точку M_0, координаты которой пусть будутъ x_0, y_0, z_0, требуется провести прямую, составляющую съ осями координатъ углы α, β, γ. Общія уравненія прямой, проходящей черезъ точку M_0, будутъ такія:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

гдѣ l, m, n пропорціональны косинусамъ угловъ α, β, γ. Уравненія прямой, проходящей черезъ точку M_0 и образующей требуемые углы съ осями координатъ, напишутся такъ:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma}.$$

67. *Задача.* Найти уголъ, образуемый данной прямой съ данной плоскостью.

Разсмотримъ уголъ, составляемый прямою

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \tag{1}$$

съ плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{2}$$

Найдемъ сначала координаты пересѣченія прямой (1) съ плоскостью (2), для чего надо рѣшить три уравненія: (1) и (2) относительно x, y, z. Для того, чтобы это сдѣлать проще, преобразуемъ уравненіе (2) слѣдующимъ образомъ:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = D_0, \tag{3}$$

гдѣ

$$D_0 = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

Кромѣ того, обозначая для краткости черезъ ρ общую величину отношеній пропорцій (1), получимъ:

$$x - x_0 = l\rho,\ y - y_0 = m\rho,\ z - z_0 = n\rho.$$

Подставляя въ уравненіе (3), получимъ:

$$\rho(Al + Bm + Cn) = D_0.$$

Отсюда окончательно:

$$x = x_0 + \frac{D_0 l}{Al + Bm + Cn},$$

$$y = y_0 + \frac{D_0 m}{Al + Bm + Cn},$$

$$z = z_0 + \frac{D_0 n}{Al + Bm + Cn}.$$

Разсматривая полученныя выраженія для координатъ искомой точки, мы замѣчаемъ, что эти координаты обращаются въ безконечность, если

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{4}$$

Условіе (4) можно разсматривать, какъ условіе параллельности прямой съ плоскостью, ибо, если это условіе выполняется, то точка пересѣченія прямой съ плоскостью уходитъ въ безконечность, и прямая дѣлается параллельною плоскости. Замѣтимъ кстати, что на практикѣ, если уравненія прямой будутъ заданы въ общемъ видѣ:

$$\begin{aligned} A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

то для нахожденія точки пересѣченія этой прямой съ плоскостью (2) нѣтъ надобности приводить уравненія прямой (5) къ виду (1), а нужно прямо рѣшать уравненія (5) и (2) относительно x, y, z.

Обращаемся теперь къ нахожденію угла V прямой (1) съ плоскостью (2); прежде всего замѣчаемъ, что этотъ уголъ есть дополне-

ніе до 90° угла между прямой и перпендикуляромъ къ плоскости, а потому $sin\, V$ равенъ косинусу угла между перпендикуляромъ къ плоскости и прямою. Обозначая черезъ α, β, γ углы, составляемые заданной прямою (1) съ осями координатъ, а черезъ α', β', γ' углы, составляемые перпендикуляромъ къ плоскости (2), получимъ слѣдующія пропорціи:

$$(6) \qquad \frac{cos\,\alpha}{l} = \frac{cos\,\beta}{m} = \frac{cos\,\gamma}{n} \quad \text{и} \quad \frac{cos\,\alpha'}{A} = \frac{cos\,\beta'}{B} = \frac{cos\,\gamma'}{C}. \qquad (7)$$

Отсюда получимъ: $sin\, V = cos$ (угла между заданною прямою и перпендикуляромъ къ плоскости) $= cos\,\alpha\, cos\,\alpha' + cos\,\beta\, cos\,\beta' + cos\,\gamma\, cos\,\gamma' =$

$$= \frac{Al + Bm + Cn}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,.\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Когда прямая (1) параллельна плоскости (2), то $V = 0$, и, слѣдовательно, $sin\, V = 0$, откуда $Al + Bm + Cn = 0$, что мы видѣли уже раньше. Найдемъ теперь условія перпендикулярности прямой (1) къ плоскости (2):

$$cos\,V = \frac{\sqrt{(Bn - Cm)^2 + (Cl - An)^2 + (Am - Bl)^2}}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,.\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Если $V = 90°$, то $cos\,V = 0$, и, слѣдовательно, должно быть: $Bn - Cm = 0$, $Cl - An = 0$, $Am - Bl = 0$, что можно представить въ видѣ слѣдующей пропорціи:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Итакъ, для перпендикулярности прямой и плоскости требуется пропорціональность угловыхъ коэффиціентовъ прямой и плоскости. Условія перпендикулярности прямой къ плоскости проще вывести изъ слѣдующихъ соображеній: когда прямая (1) перпендикулярна къ плоскости (2), то углы α, β, γ, образуемые ею съ осями координатъ, равны угламъ α', β', γ' перпендикуляра къ плоскости съ тѣми-же осями, т. е. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, а тогда изъ пропорцій (5) и (6) получаемъ непосредственно искомыя условія перпендикулярности прямой

къ плоскости:
$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

68. Уголъ прямой съ плоскостью при косоугольныхъ координатахъ находится при помощи соображенiй, аналогичныхъ съ изложенными въ § 56.

69. *Задача.* Найти уголъ между двумя данными прямыми.

Пусть заданы двѣ прямыя:
$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \qquad (1)$$

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}. \qquad (2)$$

Разсмотримъ прежде всего, когда прямыя (1) и (2) пересѣкаются между собою. Если двѣ заданныя прямыя пересѣкаются между собою, то онѣ лежатъ въ нѣкоторой плоскости:
$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (3)$$

Такъ какъ прямая (1) лежитъ въ плоскости (3), то и точка x_0, y_0, z_0 лежитъ въ той-же плоскости; слѣдовательно, уравненіе (3) можетъ быть написано такъ:
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (4)$$

Такъ какъ обѣ прямыя (1) и (2) лежатъ въ плоскости (4), то можно сказать, что онѣ параллельны этой плоскости, что выражается условіями:
$$(5) \qquad Al_0+Bm_0+Cn_0=0 \text{ и } Al_1+Bm_1+Cn_1=0. \qquad (6)$$

Уравненія (5) и (6) могутъ быть переписаны въ видѣ слѣдующихъ пропорцій:
$$\frac{A}{m_0 n_1-n_0 m_1}=\frac{B}{n_0 l_1-l_0 n_1}=\frac{C}{l_0 m_1-m_0 l_1},$$

слѣдовательно, уравненіе (4) можетъ быть написано въ такомъ видѣ:
$$(m_0 n_1-n_0 m_1)(x-x_0)+(n_0 l_1-l_0 n_1)(y-y_0)+$$
$$+(l_0 m_1-m_0 l_1)(z-z_0)=0. \qquad (7)$$

Такъ какъ вторая прямая (2) лежитъ тоже въ плоскости (7), то координаты x_1, y_1, z_1 точки, лежащей на ней, должны удовлетворять уравненію (7). Подставляя эти координаты вмѣсто x, y, z въ уравненіе (7), получимъ окончательно условіе:

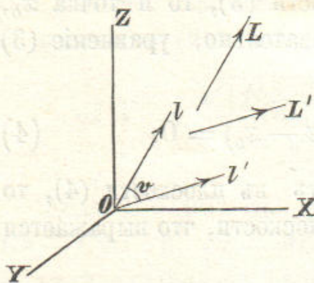
$$(m_0 n_1 - n_0 m_1)(x_1 - x_0) + (n_0 l_1 - l_0 n_1)(y_1 - y_0) +$$
$$+ (l_0 m_1 - m_0 l_1)(z_1 - z_0) = 0, \qquad (*)$$

которому должны удовлетворять заданныя числа

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ l_0,\ m_0,\ n_0,\ l_1,\ m_1,\ n_1$$

для того, чтобы заданныя прямыя (1) и (2) взаимно пересѣкались.

На практикѣ, если приходится рѣшить вопросъ, пересѣкаются-ли двѣ данныя прямыя, проще всего поступить такимъ образомъ: рѣшить три изъ четырехъ заданныхъ уравненій относительно x, y, z и затѣмъ подставить полученныя выраженія для этихъ координатъ въ четвертое уравненіе; если оно послѣ этой подстановки обратится въ тождество, то прямыя пересѣкаются; въ противномъ же случаѣ не пересѣкаются.



Черт. 230.

Обращаемся теперь къ опредѣленію угла V между направленіями заданныхъ двухъ прямыхъ (1) и (2). Проведемъ изъ начала координатъ два направленія l и l', параллельныя направленіямъ заданныхъ прямыхъ L (1) и L' (2) (см. черт. 230); тогда, обозначая черезъ α, β, γ углы, составляемые направленіемъ l съ положительными направленіями осей OX, OY, OZ, а черезъ α', β', γ' углы, образуемые направленіемъ l' съ тѣми-же направленіями осей, получимъ двѣ пропорціи:

$$\frac{\cos\alpha}{l} = \frac{\cos\beta}{m} = \frac{\cos\gamma}{n} \quad \text{и} \quad \frac{\cos\alpha'}{l'} = \frac{\cos\beta'}{m'} = \frac{\cos\gamma'}{n'},$$

откуда, принимая во вниманіе, что уголъ между двумя заданными прямыми V есть не что иное, какъ уголъ lOl', получимъ:

$$\cos V = \frac{l\,l' + m\,m + n\,n'}{\pm\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \,.\, \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}.$$

Изъ этого выраженія косинуса получимъ слѣдующее условіе перпедикулярности двухъ прямыхъ:

$$ll' + mm' + nn' = 0.$$

Условіе-же параллельности будетъ:

$$\frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n}.$$

70. Случай косоугольныхъ координатъ трактуется по § 56.

71. *Общее уравненіе плоскостей, проходящихъ черезъ заданную прямую.*

Пусть будутъ

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

уравненія, опредѣляющія заданную прямую.

Обозначая для краткости

$$Ax + By + Cz + D = \alpha, \;\; A'x + B'y + C'z + D' = \beta,$$

можемъ переписать уравненія (1) въ такомъ видѣ: $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Уравненіе любой плоскости, проходящей черезъ прямую $\alpha = 0$, $\beta = 0$, можетъ быть написано такъ: $\alpha - k\beta = 0$ . . . . (2), гдѣ k есть совершенно произвольный параметръ. Мѣняя параметръ k, будемъ получать различныя плоскости, проходящія черезъ прямую ($\alpha = 0$, $\beta = 0$). Что плоскость проходитъ черезъ прямую (1), слѣдуетъ изъ того, что это уравненіе (2) удовлетворяется координатами любой точки, лежащей на прямой (1); другими словами, тѣми координатами, которыя удовлетворяютъ заразъ двумъ уравненіямъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Этотъ параметръ k опредѣлится, если заставимъ плоскость проходить черезъ заданную прямую и, кромѣ того, удовлетворять еще какому-нибудь добавочному условію.

1) Чрезъ заданную прямую провести плоскость, проходящую черезъ нѣкоторую точку M_0 (x_0, y_0, z_0), не лежащую на заданной прямой.

Обозначая

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = \alpha_0, \quad A'x_0 + B'y_0 + C'z_0 + D = \beta_0,$$

замѣчаемъ, что α_0 и β_0 суть нѣкоторыя числа, отличныя отъ нуля, ибо точка x_0, y_0, z_0, не лежитъ на прямой $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Остается въ уравненіи $\alpha - k\beta = 0$ коэффиціентъ k подобрать такъ, чтобы было $\alpha_0 - k\beta_0 = 0$, откуда $k = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$; такъ что окончательно уравненіе плоскости, проходящей черезъ заданную прямую и заданную точку, будетъ имѣть видъ: $\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta = 0$.

2) Провести черезъ заданную прямую $\alpha = 0$, $\beta = 0$ плоскость, перпенкулярную къ плоскости

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0. \tag{*}$$

Условіе перпендикулярности плоскостей $\alpha - k\beta = 0$ и (*) можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$(A - kA')\,A'' + (B - kB')\,B'' + (C - kC')\,C'' = 0,$$

откуда окончательно:

$$k = \frac{AA'' + BB'' + CC''}{A'A'' + B'B'' + C'C''}.$$

3) Черезъ заданную прямую $\alpha = 0$, $\beta = 0$ провести плоскость параллельную другой заданной прямой:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{**}$$

Условіе параллельности плоскости $\alpha - k\beta = 0$ и прямой (**) можетъ быть написано такъ:

$$(A - kA')\,l + (B - kB')\,m + (C - kC')\,n = 0,$$

откуда

$$k = \frac{Al + Bm + Cn}{A'l + B'm + C'n}.$$

72. *Задача*. Проектировать заданную точку на заданную плоскость.

Пусть задана точка M_0 (x_0, y_0, z_0) и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

Уравненія искомаго перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M_0 на плоскость (1), пусть будутъ:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \qquad (2)$$

гдѣ l, m, n нѣкоторые, пока произвольные, коэффиціенты. Прямая (2) должна быть перпендикулярна къ плоскости (1), и, слѣдовательно, должно быть

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C},$$

откуда получимъ окончательно уравненія перпендикуляра въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}. \qquad (3)$$

Найдемъ теперь координаты основанія перпендикуляра, или, другими словами, координаты проекціи точки M_0 на плоскости (1). Уравненіе (1) можно написать такъ:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = D_0,$$

гдѣ

$$D_0 = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D);$$

на основаніи извѣстныхъ свойствъ пропорціи, получаемъ:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} =$$

$$= \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)}{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{D_0}{A^2 + B^2 + C^2},$$

откуда координаты искомой проекціи будутъ:

$$x = x_0 + \frac{DA}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y = y_0 + \frac{D_0 B}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$z = z_0 + \frac{D_0 C}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Разстояніе δ проекціи отъ заданной точки M_0, или, что одно и то же, длина проектирующаго перпендикуляра, или разстояніе точки M_0 до плоскости (1) опредѣляется такъ:

$$\delta = + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} =$$

$$= \frac{D_0}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

послѣдняя формула для разстоянія точки M_0 отъ плоскости (1) была уже выведена нами изъ другихъ соображеній. Знакъ передъ корнемъ

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

выбирается такъ, чтобы результатъ былъ положительный.

Примѣръ. Пусть дана точка M_0 ($x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = -3$) и плоскость: $3x - y + 4z - 1 = 0$. Уравненія проектирующаго перпендикуляра будутъ

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 3}{4}.$$

Координаты же проекціи будутъ:

$$x = 1 + \frac{12.3}{9+1+16}, y = 2 + \frac{12.(-1)}{9+1+16}, z = -3 + \frac{12.4}{9+1+16}.$$

73. *Задача*. Проектировать заданную точку на заданную прямую. Дана точка M_0 (x_0, y_0, z_0) и нѣкоторая прямая:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}, \qquad (1)$$

гдѣ, очевидно, x_1, y_1, z_1, l, m, n числа заданныя. Требуется написать уравненіе плоскости, проектирующей точку M_0 на прямую (1).

Такъ какъ искомая плоскость должна проходить черезъ точку M_0, то ея уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (2)$$

гдѣ остается опредѣлить коэффиціенты A, B, C подъ тѣмъ условіемъ, чтобы плоскость (2) была дѣйствительно перпендикулярна къ прямой (1); для этого должно быть:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Слѣдовательно, уравненіе искомой плоскости будетъ окончательно имѣть видъ:

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0 \qquad (3)$$

Координаты искомой проекціи заданной точки на заданной прямой опредѣлятся рѣшеніемъ относительно x, y, z уравненій (1) и (3).

На практикѣ, если прямыя заданы уравненіями, не приведенными къ виду (1), можно, не приводя ихъ къ этому виду, искать плоскость, которая-бы была перпендикулярна къ двумъ плоскостямъ, опредѣляющимъ прямую.

Примѣръ. Пусть требуется провести черезъ точку M_0, координаты которой суть $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$, плоскость, перпендикулярную къ прямой:

$$x + y + z = 1,\ x + 2y + 3z = 2. \qquad (1)$$

Для опредѣленія угловыхъ коэффиціентовъ этой прямой исключаемъ сначала одну изъ координатъ, напр., x, а потомъ другую, напр., y; тогда получимъ два уравненія:

$$y + 2z = 1 \text{ и } -x + z = 0.$$

Отсюда, рѣшая относительно z, получимъ:

$$z = \frac{1-y}{2} = \frac{y-1}{-2}, \text{ и } z = x;$$

такъ что уравненія заданной прямой могутъ быть написаны въ такомъ видѣ:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-0}{1}.$$

Уравненіе перпендикулярной плоскости, проходящей черезъ точку (1, 1, 1), будетъ:

$$(x-1)-2(y-1)+(z-1)=0 \text{ или } x-2y+z=0. \quad (2)$$

Для нахожденія точки пересѣченія плоскости (2) съ прямою (1) рѣшимъ уравненія (1) и (2) относительно x, y, z; получаемъ:

$$x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{3}.$$

Разстояніе заданной точки (1, 1, 1) до заданной прямой (1) будетъ не что иное, какъ разстояніе между точками (1, 1, 1) и

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

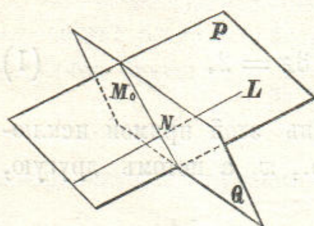
опредѣляемое по формулѣ:

$$\delta=+\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

74. *Задача.* Опустить изъ данной точки перпендикуляръ на данную прямую.

Пусть дана точка M_0 (x_0, y_0, z_0) и прямая L, опредѣляемая уравненіями:

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'&=0 \end{aligned} \quad (1)$$



Черт. 231.

Перпендикуляръ M_0N, опущенный изъ точки M_0 на заданную прямую L, можетъ быть опредѣленъ, какъ пересѣченіе слѣдующихъ двухъ плоскостей: плоскости P, проходящей черезъ точку M_0 и прямую L, (см. черт. 231), и плоскости Q, проведенной изъ точки M_0 перпендикулярно къ прямой L. Уравненіе плоскости P будетъ:

$$(Ax+By+Cz+D)(A'x_0+B'y_0+C'z_0+D')-(Ax_0+$$
$$+By_0+Cz_0+D)(A'x+B'y+C'z+D')=0. \quad (2)$$

Уравненіе же плоскости Q можетъ быть написано такъ:

$$(BC' - CB')(x - x_0) + (CA' - AC')(y - y_0) +$$
$$+ (AB' - BA')(z - z_0) = 0. \tag{3}$$

Уравненія (2) и (3) опредѣляютъ искомый перпендикуляръ.

Примѣръ. Найдемъ уравненіе перпендикуляра, проектирующаго точку M_0 (1, 1, 1) на прямую L:

$$x + y + z = 1,\ x + 2y + 3z = 2. \tag{1}$$

Уравненіе плоскости P, проходящей черезъ прямую L, будетъ:

$$x + y + z - 1 - k\ (x + 2y + 3z - 2) = 0;$$

подставляя сюда координаты точки M_0, получимъ:

$$1 + 1 + 1 - 1 - k\ (1 + 2 + 3 - 2) = 0,$$

такъ что $k = \frac{1}{2}$. Слѣдовательно, уравненіе плоскости P будетъ:

$$2x + 2y + 2z - 2 - (x + 2y + 3z - 2) = 0,$$

или

$$x - z = 0. \tag{2}$$

Уравненіе плоскости Q уже найдено для этого примѣра въ § 73. Найдемъ это уравненіе иначе. Плоскость Q проходитъ черезъ точку M_0, слѣдовательно, ея уравненіе имѣетъ видъ:

$$A(x - 1) + B(y - 1) + C(z - 1) = 0. \tag{3}$$

Эта плоскость должна быть перпендикулярна къ обѣимъ плоскостямъ, опредѣляющимъ прямую (1). Выражая условія перпендикулярности, получимъ два уравненія

$$A.1 + B.1 + C.1 = 0,\quad A.1 + B.2 + C.3 = 0.$$

Отсюда

$$A = C,\quad B = -2C.$$

Подставляя, получимъ

$$C(x - 1) - 2C(y - 1) + C(z - 1) = 0,$$

или окончательно

$$(x - 1) - 2(y - 1) + (z - 1) = 0.$$

Итакъ, искомый перпендикуляръ опредѣляется уравненіями:

$$x - z = 0 \text{ и } x - 2y + z = 0.$$

75. *Задача*. Найти кратчайшее разстояніе между двумя заданными прямыми.

Пусть будутъ заданы: прямая L уравненіями:

$$\frac{x - x_0}{l_0} = \frac{y - y_0}{m_0} = \frac{z - z_0}{n_0} \tag{1}$$

и прямая L' уравненіями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}. \tag{2}$$

Черезъ прямую L проведемъ плоскость P параллельно другой прямой L'; для этой цѣли надо въ уравненіи:

$$A\ (x - x_0) + B\ (y - y_0) + C\ (z - z_0) = 0 \tag{3}$$

коэффиціенты A, B, C опредѣлить изъ двухъ слѣдующихъ условій:

$$Al_0 + Bm_0 + Cn_0 = 0,\ Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0,$$

откуда

$$\frac{A}{S} = \frac{B}{Q} = \frac{C}{R},$$

гдѣ

$$S = m_0 n_1 - m_1 n_0,\ Q = n_0\, l_1 - l_0 n_1,\ R = l_0 m_1 - m_0 l_1.$$

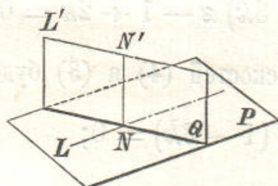
Итакъ, окончательно уравненіе плоскости P будетъ имѣть видъ:

$$S\ (x - x_0) + Q\ (y - y_0) + R\ (z - z_0) = 0. \tag{4}$$

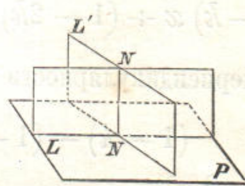
Кратчайшее разстояніе NN' (см. черт. 232) между двумя заданными прямыми равно разстоянію любой точки, лежащей на прямой L', до плоскости P. Взявъ, напримѣръ, на прямой L' точку (x_1, y_1, z_1), получимъ искомое разстояніе между прямыми въ такомъ видѣ:

$$\delta = \frac{S\ (x_1 - x_0) + Q\ (y_1 - y_0) + R\ (z_1 - z_0)}{\pm\sqrt{S^2 + Q^2 + R^2}},$$

Что касается до уравненій общаго перпендикуляра NN' двухъ заданныхъ прямыхъ, то этотъ перпендикуляръ можемъ опредѣлять, какъ прямую пересѣченія двухъ плоскостей, проведенныхъ черезъ заданныя прямыя перпендикулярно къ плоскости P. Уравненія послѣднихъ двухъ плоскостей опредѣлятся безъ всякаго затрудненія на основаніи уже приведенныхъ раньше соображеній; эти два урав-



Черт. 232.



Черт. 233.

ненія и будутъ уравненіями прямой кратчайшаго разстоянія NN' (см. черт. 233).

Примѣръ. Найти кратчайшее разстояніе между прямыми:

(1) $x + y + z = 1$ и $x + 2y + 3z = 2$; (2) $x - y = 0$ и $z = 1$.

Черезъ прямую (2) проводими плоскость P:

$$x - y - k\,(z - 1) = 0,$$

параллельную прямой (1), уравненіе которой можно написать такъ:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-0}{1}\,.$$

Для опредѣленія k получаемъ уравненіе

$$1\,.\,1 + (-1)\,(-2) + (-k)\,.\,1 = 0;\ \text{откуда}\ k = 3.$$

Слѣдовательно, уравненіе искомой плоскости P есть

$$x - y - 3z + 3 = 0. \qquad (3)$$

Остается найти разстояніе до плоскости (3) отъ любой точки прямой (1), напримѣръ, отъ точки (0, 1, 0). Искомое разстояніе будетъ:

$$\delta = \frac{0 - 1 - 3\,.\,0 + 3}{\pm\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}}\,.$$

Найдемъ теперь уравненія общаго перпендикуляра. Проводимъ черезъ прямую (1) плоскость перпендикулярно къ плоскости P (3); получаемъ плоскость:

$$x + y + z - 1 - k(x + 2y + 3z - 2) = 0,$$

или, что одно и то же:

$$(1 - k)x + (1 - 2k)y + (1 - 3k)z - 1 + 2k = 0. \qquad (4)$$

Условіе перпендикулярности двухъ плоскостей (4) и (3) будетъ:

$$(1 - k) - (1 - 2k) - 3(1 - 3k) = 0;$$

откуда $k = \frac{3}{10}$; слѣдовательно, уравненіе (4) принимаетъ видъ:

$$7x + 4y + z = 4. \qquad (5)$$

Уравненіе (5) будетъ однимъ изъ уравненій искомаго перпендикуляра; другое уравненіе получимъ, если проведемъ черезъ прямую (2) плоскость, перпендикулярную къ плоскости P (3). Въ самомъ дѣлѣ:

$$x - y - k(z - 1) = 0; \qquad (6)$$

надо подобрать k такъ, чтобы плоскость (6) была перпендикулярна къ плоскости (3), т. е. чтобы было:

$$1 \cdot 1 + (-1)(-1) + (-3)(-k) = 0,$$

откуда $k = -\frac{2}{3}$, такъ что второе уравненіе искомаго перпендикуляра будетъ:

$$9x - 3y + 2z = 2.$$

Примѣръ. Найти уравненія кратчайшаго разстоянія между двумя прямыми.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 3z + 2 = 0 \end{array}\right\} (1). \qquad \left.\begin{array}{r} x - y - z + 3 = 0 \\ 4x - 2z + 1 = 0 \end{array}\right\} (2).$$

Проведемъ черезъ прямую (2) плоскость, параллельную прямой (1). Общій видъ уравненія плоскостей, проходящихъ черезъ прямую (2) есть

$$4x - 2z + 1 - k(x - y - z + 3) = 1. \qquad (3)$$

Для того, чтобы плоскость (3) была параллельна прямой (1), надо

подобрать параметръ k такимъ образомъ, чтобы не существовало точки встрѣчи плоскости (3) съ прямою (1). Координаты точки встрѣчи плоскости (3) съ прямою (1) опредѣлятся черезъ рѣшеніе относительно x, y, z трехъ уравненій: (1) и (3). Выразимъ изъ уравненій (1) y и z черезъ x, получимъ:

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, \quad z = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}.$$

Подставляя полученныя выраженія y и z въ уравненіе (3), получимъ:

$$4x - 2\left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ 1 - k\left(x + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} + 3\right) = 0,$$

или

$$\frac{13}{3}x - k\left(\frac{8}{3}x + 3\right) = 0,$$

или

$$(13 - 8k)x - 9k = 0.$$

Послѣднее уравненіе даетъ координату x искомой точки пересѣченія. Для того же, чтобы послѣдней точки не существовало, необходимо, чтобы x въ уравненіи пропадало, т. е. чтобы было

$$13 - 8k = 0,$$

откуда опредѣляется k, принадлежащее плоскости, параллельной прямой (1) и проходящей черезъ прямую (2).

Дальнѣйшее рѣшеніе задачи то же, что и въ предыдущемъ примѣрѣ.

76. Покажемъ еще выраженіе для разстоянія между двумя прямыми, уравненія которыхъ даны въ видѣ:

$$(L)\ x = az + p,\ y = bz + q \text{ и } (L')\ x = a'z + p',\ y = b'z + q'.$$

Всякая плоскость P, проходящая черезъ прямую L, опредѣляется уравненіемъ вида:

$$(x - az - p) - k(y - bz - q) = 0;$$

эта плоскость параллельна прямой L', если выполнено условіе:

$$a' - kb' - (a - kb) = 0,$$

откуда

$$k = \frac{a - a'}{b - b'},$$

такъ что уравненіе плоскости P принимаетъ видъ:

$$(b - b')(x - az - p) - (a - a')(y - bz - q) = 0.$$

Разстояніе какой нибудь точки прямой L', напримѣръ, точки $(p', q', 0')$, въ которой она пересѣкаетъ плоскость XOY, до этой плоскости выражается такъ:

$$\delta = \pm \frac{(b - b')(p - p') - (a - a')(q - q')}{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - ba')^2}}.$$

Это и есть искомое кратчайшее разстояніе между двумя данными прямыми.

77. *Задача.* Найти объемъ тетраэдра, вершины котораго находятся въ точкахъ:

$$M_1\,(x_1, y_1, z_1),\ M_2\,(x_2, y_2, z_2),\ M_3\,(x_3, y_3, z_3),\ M_4\,(x_4, y_4, z_4).$$

Уравненіе плоскости, проходящей черезъ точки M_1, M_2, M_3, есть:

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x, & y, & z, & 1 \end{vmatrix} = Ax + By + Cz + D = 0,$$

гдѣ

$$A = -\begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} x_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix},\ C = -\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix},\ D = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}.$$

A, B, C представляютъ удвоенныя площади проекцій на плоскости координатъ треугольника $M_1M_2M_3$ (см. § 34. Геом. дв. изм.)

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

будетъ удвоенная площадь самого треугольнико $M_1M_2M_3$. Площадь же тетраэдра будетъ равна:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\ h,$$

гдѣ h — разстояніе отъ точки M_4 до плоскости треугольника $M_1M_2M_3$ и

$$h = \frac{Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Слѣдовательно, ушестеренный объемъ тетраэдра равняется:

$$Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = \begin{vmatrix} x_1, y_1, z_1, & 1 \\ x_2, y_2, z_2, & 1 \\ x_3, y_3, z_3, & 1 \\ x_4, y_4, z_4, & 1 \end{vmatrix}.$$

Равенство нулю послѣдняго опредѣлителя есть условіе того, что четыре данныя точки лежатъ въ одной плоскости.

78. *Задача.* Вычислить объемъ тетраэдра, образованнаго четырьмя данными плоскостями.

Пусть уравненія плоскостей, образующихъ тетраэдръ, будутъ:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0,$$

$$A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0.$$

Искомый объемъ найдемъ, вычисливъ координаты вершинъ и подставивъ найденныя выраженія въ формулу предыдущаго параграфа.

Результатомъ будетъ ушестеренный объемъ тетраэдра, данный выраженіемъ:

$$\frac{(AB'\,C''D''')^3}{(AB'C'')\,(A'B''C''')\,(A''B'''C)\,(A'''BC')},$$

въ которомъ стоящія въ скобкахъ величины обозначаютъ опредѣлители (см. прибавленіе).

Опредѣлитель, стоящій въ числителѣ, а съ нимъ и искомый объемъ, обращаются въ нуль, когда четыре данныя плоскости проходятъ черезъ одну точку; знаменатель же обращается въ нуль, когда три изъ данныхъ плоскостей параллельны одной прямой. Опредѣлители въ знаменателѣ суть миноры числителя, взятые относительно элементовъ D.

Задачи.

1. Найти точку пересѣченія трехъ плоскостей:

$$3x - 4y + 7z - 10 = 0;\ 2x - y - z + 7 = 0;\ x + 3y - 5z + 10 = 0.$$

Отв. $(-1, 2, 3)$.

2. Провести плоскость черезъ три точки:

$$(0,\ 1,\ 4),\ (2,\ 3,\ 6),\ (1,\ -1,\ -4).$$

Отв. $2x - 3y + z - 1 = 0$.

3. Найти уголъ между двумя плоскостями:

$$2x + \sqrt{3}\ y + \sqrt{2}\ z - 7 = 0;\quad \sqrt{3}\ x + y + 4 = 0.$$

Отв. 30°.

4. Найти разстояніе отъ точки (1, 1, 1) до плоскости:

$$2x - 6y + 9z + 6 = 0.$$

Отв. 1.

5. Между плоскостями:

$$2x + 3y - z + 1 = 0 \text{ и } 2x + 3y - z + 10 = 0$$

провести восемь плоскостей, параллельныхъ заданнымъ и равно отстоящихъ другъ отъ друга.

Отв. См. § 59.

6. Показать, что прямая линія, проходящая черезъ начало координатъ и составляющая съ осями углы α, β, γ, опредѣляется уравненіемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2.$$

Отв. Данное уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$(x\cos\beta - y\cos\alpha)^2 + (y\cos\gamma - z\cos\beta) + (z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0;$$

слѣдовательно, оно выражаетъ прямую:

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

7. Найти уголъ, составляемый прямою: $x + z - 3 = 0$, $y + 4 = 0$ съ плоскостью: $x - 6y - 18z = 2$.

Отв. 45°.

8. Пересѣкаются-ли въ пространствѣ прямыя, опредѣляемыя уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y + 2z + 8 &= 0 \\ 2x + y - z - 7 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} y + x - 1 &= 0 \\ x - 3z - 16 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

9. Найти уголъ между прямыми:

$$\left.\begin{aligned} 6x - y - z &= 6 \\ 2x + y - z &= 4 \end{aligned}\right\} \text{ и } \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3}.$$

10. Черезъ прямую: $x+2y+3z-1=0$; $3x-2y+z-2=0$ провести плоскость, параллельную прямой: $2x-y+z-3=0$; $z=0$.

11. Составить уравненіе плоскости, проходящей черезъ начало координатъ и черезъ линію взаимнаго пересѣченія плоскостей:

$$Ax+By+Cz+D=0 \text{ и } A'x+B'y+C'z+D'=0$$

и опредѣлить условіе, при которомъ искомая плоскость дѣлитъ пополамъ уголъ между данными плоскостями.

Отв. $\left(\frac{D}{D'}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2}{A'^2+B'^2+C'^2}$. См. Геом. дв. изм. § 47.

12. Составить уравненіе плоскости, проходящей черезъ двѣ параллельныя прямыя, коихъ уравненія суть:

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n};\ \frac{x-a'}{l}=\frac{y-b'}{m}=\frac{z-c'}{n}.$$

Отв. $(x-a)[m(c-c')-n(b-b')]+\ldots.=0$.

13. Показать, что уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку (α, β, γ) и дающей на осяхъ x и y соотвѣтственные отрѣзки a и b, есть

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=\frac{z}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-1\right).$$

14. Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки $(1, -1, 2)$ на прямую:

$$x=y=2z.$$

Отв. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$.

15. Составить уравненія прямой, проходящей черезъ точку (a, b, c) и составляющей данный уголъ съ плоскостью

$$Ax+By+Cz=0.$$

Отв. Задача неопредѣленная, такъ какъ безчисленное множество прямыхъ можетъ удовлетворять даннымъ условіямъ.

16. Что выражаетъ уравненіе: $x^2=y^2=z^2$?

Отв. Четыре прямыя линіи.

17. Опредѣлить условіе, при которомъ три уравненія:

$$x=cy+bz,\ y=az+cx,\ z=bx+ay$$

выражаютъ одну прямую линію, и показать, что уравненія этой прямой суть

слѣдующія:

$$\frac{x}{1-a^2}=\frac{y}{1-b^2}=\frac{z}{1-c^2}.$$

Отв. Искомое условіе есть: $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

18. Черезъ начало координатъ и черезъ линію взаимнаго пересѣченія двухъ плоскостей:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,\ x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1=0,$$

проведена плоскость; перпендикулярно къ ней, и черезъ ея пересѣченіе съ координатною плоскостью xy, проведена другая плоскость. Составить уравненіе этой послѣдней.

Отв. $(p_1\cos\alpha-p\cos\alpha_1)\,x+(p_1\cos\beta-p\cos\beta_1)\,y+\lambda\,z=0$,

гдѣ

$$(p_1\cos\alpha-p\cos\alpha_1)^2+(p_1\cos\beta-p\cos\beta_1)^2+\lambda\,(p_1\cos\gamma-p\cos\gamma_1)=0.$$

19. Дано уравненіе плоскости:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\delta.$$

Воспользоваться этимъ уравненіемъ для доказательства слѣдующей теоремы. Если треугольникъ проектируется на каждую изъ трехъ прямоугольныхъ координатныхъ плоскостей, то сумма пирамидъ, которымъ проекція треугольника служитъ основаніями, и которыхъ общая вершина лежитъ на плоскости самого треугольника, равняется такой пирамидѣ, для которой основаніемъ служитъ самъ разсматриваемый треугольникъ, а вершиною—начало координатъ.

20. Составить уравненія прямой, соединяющей точки (a, b, c), (a', b', c'), и показать, что эта прямая пройдетъ черезъ начало координатъ, если существуетъ такая зависимость:

$$aa'+bb'+cc'=\rho\rho',$$

гдѣ ρ и ρ' суть разстоянія точекъ (a, b, c) и (a', b', c') отъ начала координатъ.

21. Показать, что уравненія:

$$\frac{x^3+1}{x+1}=\frac{y^3+1}{y+1}=\frac{z^3+1}{z+1}$$

выражаютъ собою четыре прямыя линіи и что косинусъ угла, составляемаго которыми либо двумя изъ этихъ прямыхъ, равняется $^1/_3$.

22. Даны двѣ слѣдующія плоскости:

$$lx+my+nz=p \text{ и } l'x+m'y+n'z=p',$$

гдѣ $l^2+m^2+n^2=1$ и $l'^2+m'^2+n'^2=1$.

Требуется найти длину перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ начала координатъ на

двѣ такія плоскости, которыя проходятъ черезъ линію пересѣченія данныхъ плоскостей и дѣлятъ пополамъ уголъ между ними.

Отв. $\frac{p+p'}{\sqrt{2+2k}}$ и $\frac{p-p'}{\sqrt{2-2k}}$, гдѣ $k = ll' + mm' + nn'$.

23. Имѣются n плоскостей, изъ которыхъ никакія двѣ не параллельны между собою, никакія три не параллельны одной и той-же прямой и никакія четыре не проходятъ черезъ одну и ту-же точку. Показать, что эти плоскости взаимно пересѣкаются по $\frac{n}{2}(n-1)$ прямымъ, и что эти прямыя пересѣкаются между собою въ $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ точкахъ.

24. Составить уравненіе плоскости, проходящей черезъ начало координатъ и составляющей равные углы съ тремя данными прямыми, тоже проходящими черезъ начало координатъ.

25. Плоскость задана уравненіемъ: $lx + my + nz = 0$. Требуется составить уравненія прямой линіи, лежащей въ этой плоскости и дѣлящей пополамъ уголъ между линіями пересѣченій данной плоскости съ координатными плоскостями zx и zy.

Отв. Искомыхъ линій двѣ, и онѣ опредѣляются совокупностью уравненій:

$$lx + my + nz = 0 \text{ и } x\sqrt{l^2+n^2} = \pm y\sqrt{m^2+n^2}.$$

26. Прямая, уравненія которой заданы, пересѣкаетъ координатныя плоскости въ трехъ точкахъ. Опредѣлить углы между прямыми, соединяющими эти три точки съ началомъ координатъ. Если же эти углы (α, β, γ) *заданы*, то показать, что уравненіе поверхности, образуемой всевозможными положеніями вышеупомянутой прямой, есть

$$x\sqrt{tang\,\alpha} + y\sqrt{tang\,\beta} + z\sqrt{tang\,\gamma} = 0.$$

О шарѣ.

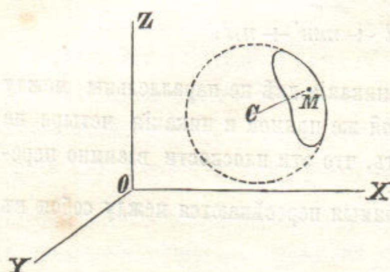
79. *Шаромъ* называется геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ одной заданной, называемой *центромъ* шара (см. черт. 234).

Положеніе въ пространствѣ и размѣры шара будутъ опредѣлены заданіемъ координатъ центра C (a, b, c) и величины радіуса r.

80. Обозначимъ черезъ x, y, z координаты какой нибудь точки M, лежащей на заданномъ шарѣ, не указывая, которой именно; тогда разстояніе точки M до центра шара C выразится по формулѣ:

$$+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

Приравнивая полученное выраженіе радіусу шара r, получимъ уравненіе шара въ такомъ видѣ:



Черт. 234.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Если центръ шара лежитъ въ началѣ координатъ, то уравненіе его принимаетъ болѣе простой видъ:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

81. Въ случаѣ косоугольныхъ координатъ уравненіе шара имѣетъ видъ:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+2(x-a)(y-b)\nu+$$
$$+2(y-b)(z-c)\lambda+2(x-a)(z-c)\mu=r^2$$

(см. § 48). Если же начало координатъ въ центрѣ шара, то его уравненіе имѣетъ видъ:

$$x^2+y^2+z^2+2\,x.y.\nu+2.\,y.z.\lambda+2\,x.z.\mu=r^2.$$

82. Раскрывая скобки въ уравненіи шара, мы его приведемъ къ виду

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0. \quad (1)$$

Справедливо также обратное заключеніе; а именно, что какъ бы ни были заданы коэффиціенты A, B, C, D, уравненіе (1) опредѣляетъ поверхность шара, который въ частныхъ случаяхъ можетъ обратиться въ точку и даже сдѣлаться мнимымъ. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (1) можно написать въ такомъ видѣ:

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2+D-\frac{A^2}{4}-\frac{B^2}{4}-\frac{C^2}{4}=0.$$

Легко видѣть, что послѣднее уравненіе опредѣляетъ шаръ, центръ котораго имѣетъ координаты:

$$-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2},$$

а радіусъ равенъ

$$\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{4}-D}.$$

Если подкоренное выраженіе равно нулю, то шаръ обращается въ точку, а при

$$D > \frac{A^2 + B^2 + C^2}{4},$$

уравненіе (1) не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста, или, какъ говорятъ, опредѣляетъ шаръ съ мнимымъ радіусомъ.

83. Такъ какъ въ уравненіе шара входятъ четыре параметра A, B, C, D, то эти параметры можно подобрать такъ, чтобы уравненіе шара удовлетворяло какимъ нибудь четыремъ условіямъ.

84. Напримѣръ, можно потребовать, чтобы шаръ проходилъ черезъ четыре заданныя точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4). Уравненіе искомаго шара можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x, & y, & z, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, & x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2, & x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2, & x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

85. Въ пересѣченіи шара плоскостью получается всегда кругъ, который обращается въ точку, если сѣкущая плоскость проведена на разстояніи отъ центра шара, равномъ радіусу его. Въ этомъ случаѣ сѣкущая плоскость обращается въ плоскость, касательную къ шару. Если же плоскость проведена на разстояніи отъ центра шара, большемъ его радіуса, то эта плоскость не пересѣкаетъ шара, но иногда говорятъ условно, что и въ этомъ случаѣ плоскость пересѣкается съ шаромъ по кругу съ мнимымъ радіусомъ.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что, подобно тому, какъ прямая линія въ пространствѣ опредѣлялась двумя уравненіями первой степени, кругъ въ пространствѣ опредѣлится двумя уравненіями:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \qquad (1)$$

и

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2)$$

какъ линія пересѣченія нѣкотораго шара (1) съ плоскостью (2).

86. Напишемъ уравненіе шара въ видѣ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0.$$

Обозначимъ первую часть его черезъ U; такъ что

$$U = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2.$$

Мы видимъ, что $U = 0$, если x, y, z суть координаты какой нибудь точки, лежащей на шарѣ. Покажемъ теперь геометрическое значенiе U, если x, y, z обозначаютъ координаты какой нибудь точки, не лежащей на шарѣ.

Выраженiе $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ есть квадратъ разстоянiя MC точки M отъ центра шара, слѣдовательно,

$$U = \overline{MC}^2 - r^2 = (\overline{MC} + r)(\overline{MC} - r).$$

На основанiи соображенiй, подобныхъ приведеннымъ въ § 54 (см. Геом. двухъ изм.), мы замѣтимъ, что U будетъ равняться квадрату длины касательной, проведенной изъ точки M къ шару въ случаѣ, если точка M лежитъ внѣ шара; если же точка M внутри шара, то U будетъ равно взятому съ знакомъ — произведенiю отрѣзковъ сѣкущей, проходящей черезъ точку M.

87. Найдемъ уравненiе касательной плоскости, проведенной къ шару

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (r - c)^2 = r^2.$$

Общее уравненiе плоскости, приведенное къ нормальному виду, есть

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

Остается выразить условiе того, что указанная плоскость лежитъ отъ центра шара на разстоянiи, равномъ радiусу. Условiе это имѣетъ видъ

$$a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma - p = \pm r.$$

Вычитая полученное уравненiе изъ уравненiя плоскости, получимъ:

$$(x - a)\cos\alpha + (y - b)\cos\beta + (z - c)\cos\gamma = \pm r;$$

какъ и слѣдовало ожидать, при заданныхъ углахъ α, β, γ, получаются двѣ плоскости, касательныя къ шару и параллельныя между собою.

88. *Задача*. Провести черезъ точку, лежащую на шарѣ, касательную плоскость къ шару.

Пусть координаты заданной точки на шарѣ будутъ: x_0, y_0, z_0; тогда уравненіе касательной плоскости будетъ, очевидно, имѣть видъ:

$$(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma=r;$$

причемъ должны удовлетворяться два условія:

$$(x_0-a)\cos\alpha+(y_0-b)\cos\beta+(z_0-c)\cos\gamma=r, \tag{1}$$

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2=r^2. \tag{2}$$

Возвышая уравненіе (1) въ квадратъ и вычитая изъ уравненія (2), получимъ:

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2-$$
$$-[(x_0-a)\cos\alpha+(y_0-b)\cos\beta+(z_0-c)\cos\gamma]^2=0.$$

Послѣднее равенство можно переписать такъ:

$$(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)[(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2]-$$
$$-[(x_0-a)\cos\alpha+(y_0-b)\cos\beta+(z_0-c)\cos\gamma]^2=0.$$

На основаніи тождества Эйлера (см. § 55, слѣдствіе 2), мы получимъ:

$$[(y_0-b)\cos\gamma-(z_0-c)\cos\alpha]^2+[(z_0-c)\cos\alpha-(x_0-a)\cos\beta]^2+$$
$$+[(x_0-a)\cos\beta-(y_0-b)\cos\gamma]^2=0.$$

Отсюда получаемъ пропорцію:

$$\frac{x_0-a}{\cos\alpha}=\frac{y_0-b}{\cos\beta}=\frac{z_0-c}{\cos\gamma}=\frac{\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2}}{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}=r,$$

откуда

$$\cos\alpha=\frac{x_0-a}{r},\ \cos\beta=\frac{y_0-b}{r},\ \cos\gamma=\frac{z_0-c}{r}.$$

Подставляя полученныя выраженія косинусовъ въ уравненіе касательной, получимъ окончательное уравненіе въ такомъ видѣ:

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)+(z-c)(z_0-c)=r^2.$$

89. *Задача*. Черезъ заданную прямую провести плоскость, касательную къ шару.

Пусть уравненія заданной прямой будутъ:

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Уравненіе искомой касательной плоскости имѣетъ видъ:

$$Ax+By+Cz+D-\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0, \qquad (*)$$

гдѣ λ надо будетъ опредѣлить изъ того условія, чтобы плоскость (*) отстояла отъ центра шара на разстояніе r.

Для опредѣленія λ получается квадратное уравненіе. Если оба корня его вещественные, то черезъ заданную прямую можно провести двѣ дѣйствительныя касательныя плоскости; если же корни уравненія совпадаютъ, то данная прямая касается шара и лежитъ, слѣдовательно, въ касательной плоскости къ шару; наконецъ, если корни мнимые, то заданная прямая пересѣкаетъ шаръ въ двухъ точкахъ и черезъ нее нельзя провести ни одной касательной плоскости къ шару.

90. Два шара пересѣкаются по кругу. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0, \qquad (1)$$

$$x^2+y^2+z^2+A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad (2)$$

будутъ уравненія двухъ шаровъ. Линія ихъ пересѣченія опредѣляется двумя написанными уравненіями (1), (2). Систему уравненій (1), (2) можно замѣнить ей равносильною, если, удержавъ одно изъ уравненій, напр. уравненіе (1), вмѣсто уравненія (2) возьмемъ уравненіе, которое получается черезъ вычитаніе (2) изъ (1). Это новое уравненіе имѣетъ видъ:

$$(A-A_1)x+(B-B_1)y+(C-C_1)z+(D-D_1)=0. \qquad (3)$$

Уравненіе (3) опредѣляетъ, очевидно, нѣкоторую плоскость. Итакъ мы видимъ, что задача опредѣленія линіи пересѣченія двухъ шаровъ (1) и (2) приводится къ задачѣ пересѣченія шара плоскостью.

91. Приведенныхъ примѣровъ достаточно, чтобы показать, какъ должны рѣшаться различныя задачи на касательныя плоскости и прямыя къ заданному шару.

91. Соображенія о полюсахъ и полярахъ линій второго порядка, а также теорія взаимныхъ поляръ обобщаются въ пространствѣ для шара. Если мы поставимъ себѣ цѣлью провести черезъ точку M_1 (x_1, y_1, z_1) плоскость, касательную къ данному шару, то вопросъ приведется къ нахожденію координатъ точки касанія искомой касательной плоскости. Обозначимъ координаты искомой точки касанія черезъ x_0, y_0, z_0; уравненіе касательной плоскости будетъ имѣть видъ:

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)+(z-c)(z_0-c)=r^2.$$

Условіемъ того, чтобы эта плоскость проходила черезъ точку M_1, будетъ

$$(x_1-a)(x_0-a)+(y_1-b)(y_0-b)+(z_1-c)(z_0-c)=r^2. \quad (*)$$

Искомыя координаты x_0, y_0, z_0 удовлетворяютъ, кромѣ условія (*), еще уравненію заданнаго шара, а потому эти координаты принадлежатъ точкѣ пересѣченія заданнаго шара съ плоскостью

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)+(z-c)(z_1-c)=r^2. \quad (1)$$

Послѣднее уравненіе (1) есть не что иное, какъ условіе (*), въ которомъ мы отбросили значки у x_0, y_0, z_0. Итакъ, мы видимъ, что черезъ данную точку можно провести безчисленное множество плоскостей, касательныхъ къ заданному шару, точки касанія которыхъ будутъ лежать на кругѣ, по которому пересѣкаетъ шаръ плоскость (1). Плоскость (1) всегда существуетъ, какъ бы ни было задано положеніе точки M_1. Если точка M_1 лежитъ внѣ шара, то плоскость (1) пересѣкаетъ шаръ; если точка M_1 лежитъ на поверхности шара, то плоскость (1) обращается въ касательную плоскость, и, наконецъ, если точка M_1 лежитъ внутри шара, то плоскость (1) не пересѣкается съ нимъ. Плоскость (1) называется *полярной плоскостью* точки M_1 по отношенію къ шару; точка же M_1 называется ея *полюсомъ*.

92. Найти полюсъ заданной плоскости по отношенію къ шару.

Представимъ уравненіе заданной плоскости въ видѣ:

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)+D=0.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ поляры точки M_1, получаемъ слѣдующую пропорцію:

$$\frac{x_1 - a}{A} = \frac{y_1 - b}{B} = \frac{z_1 - c}{C} = -\frac{r^2}{D}.$$

Отсюда искомыя координаты полюса выразятся такъ:

$$x = a - r^2 \frac{A}{D}, \; y = b - r^2 \frac{B}{D}, \; z = c - r^2 \frac{C}{D}. \qquad (*)$$

93. Геометрическое мѣсто полюсовъ плоскостей, проходящихъ черезъ точку M_1, есть полярная плоскость точки M_1.

Условіемъ прохожденія плоскости черезъ точку M_1 является уравненіе:

$$A(x_1 - a) + B(y_1 - b) + C(z_1 - c) + D = 0.$$

Исключая изъ этого уравненія коэффиціенты A, B, C, D при помощи уравненія (*), получаемъ уравненіе:

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) + (z - c)(z_1 - c) = r^2.$$

94. Геометрическое мѣсто полюсовъ плоскостей, проходящихъ черезъ прямую L, есть нѣкоторая прямая l.

Если плоскость

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) + D = 0$$

проходитъ черезъ нѣкоторую прямую L, то коэффиціенты A, B, C, D имѣютъ видъ:

$$A_0 - kA_1, \; B_0 - kB_1, \; C_0 - kC_1, \; D_0 - kD_1.$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (*), получимъ, черезъ исключеніе произвольнаго параметра k, два уравненія первой степени, которыя опредѣлятъ прямую l. Если прямая L не пересѣкаетъ шара, то прямая l проходитъ черезъ двѣ точки касанія касательныхъ плоскостей, проведенныхъ къ шару черезъ прямую L.

Задачи.

1. Найти координаты центра и радіусъ шара:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0.$$

Отв. $(1, -1, 0)$; 3.

2. Найти координаты точекъ пересѣченія шара

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=25^2$$

съ прямою, опредѣляемою уравненіями:

$$8x+5y-5z-141=0$$

и

$$4x+5y+5z-3=0.$$

Отв. Искомыя координаты выражаются цѣлыми числами.

3. Когда плоскость $z=mx+ny+p$ касается къ шару $x^2+y^2+z^2=r^2$?

Отв. $p=r\sqrt{1+m^2+n^2}$.

4. Въ точкахъ встрѣчи шара $x^2+y^2+z^2=r^2$ прямою $x=az+p$, $y=bz+q$ провести къ шару касательныя плоскости, найти прямую ихъ пересѣченія и уголъ, ими образуемый.

5. Найти геометрическое мѣсто точекъ касанія касательныхъ плоскостей, проведенныхъ къ шару $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$ параллельно оси x-овъ.

6. Найти уравненіе шара, касающагося трехъ координатныхъ плоскостей прямоугольной системы.

Отв. $x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0$.

7. Найти уравненіе шара, касающагося трехъ осей координатъ прямоугольной системы.

Отв. $x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+a^2=0$.

8. Опредѣлить шаръ по четыремъ точкамъ: $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ $(1, 1, -1)$, $(0, -1, +1)$.

9. Найти геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ до двухъ данныхъ точекъ находятся въ данномъ отношеніи.

Отв. Шаръ.

10. Найти геометрическое мѣсто точекъ, сумма квадратовъ разстояній которыхъ отъ n заданныхъ постоянна.

Отв. Шаръ, имѣющій центромъ точку, координаты которой суть среднее ариѳметическое координатъ заданныхъ точекъ.

11. Найти геометрическое мѣсто срединъ хордъ шара, параллельныхъ данной прямой.

Отв. Плоскость.

12. Найти геометрическое мѣсто центровъ круговыхъ сѣченій шара плоскостями, параллельными данной плоскости.

Отв. Прямая.

Поверхности второго порядка.

95. Поверхностью второго порядка называется геометрическое мѣсто точекъ, опредѣляемое общимъ уравненіемъ второй степени:

$$(A)\quad A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2zx + 2B_3xy +$$
$$+ 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + F = 0.$$

Мы будемъ получать различныя поверхности второго порядка, измѣняя коэффиціенты A_1, A_2, A_3, B_1 и т. д., причемъ, какъ легко видѣть, шаръ будетъ одною изъ поверхностей второго порядка, ибо его уравненіе получается изъ общаго уравненія (A) въ томъ случаѣ, когда

$$A_1 = A_2 = A_3 = 1,\ B_1 = B_2 = B_3 = 0.$$

Прежде чѣмъ перейти къ классификаціи и изученію основныхъ типовъ поверхностей второго порядка, необходимо указать нѣсколько общихъ ихъ свойствъ.

96. *Теорема I.* Степень уравненія поверхности второго порядка не мѣняется отъ преобразованія координатъ.

Въ самомъ дѣлѣ, въ статьѣ о преобразованіи координатъ мы видѣли, что формулы общаго случая преобразованія координатъ имѣютъ видъ:

$$x = a + \alpha x' + \beta y' + \gamma z';\ y = b + \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z';$$
$$z = c + \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'.$$

Изъ этихъ формулъ видно, что старыя координаты выражаются черезъ новыя при помощи линейныхъ функцій отъ новыхъ координатъ. Подставляя эти выраженія въ уравненіе $f(x, y, z) = 0$, получимъ новое уравненіе $F(x', y', z') = 0$, причемъ функція $F(x', y', z')$ будетъ нѣкоторый полиномъ относительно x', y', z'. Покажемъ, что полиномъ $F(x', y', z')$ будетъ второй степени такъ-же, какъ и полиномъ $f(x, y, z)$. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ преобразованіе линейно, то очевидно, что степень полинома $f(x, y, z)$ отъ этого преобразованія не можетъ повыситься. Равнымъ образомъ мы замѣчаемъ, что

степень не можетъ понизиться, ибо тогда обратное преобразованіе отъ новыхъ координатъ къ старымъ повышало-бы степень уравненія, что невозможно. Итакъ мы видимъ, что какое-бы мы преобразованіе координатъ ни употребляли, всегда поверхность второго порядка будетъ имѣть уравненіе второй степени относительно координатъ.

97. *Теорема II.* Поверхность второго порядка пересѣкается всякою плоскостью по кривой второго порядка.

Разсмотримъ сѣченія поверхности (A) нѣкоторою плоскостью

$$ax + by + cz + д = 0. \qquad (1)$$

Примемъ плоскость (1) за новую координатную плоскость $(x'\,y')$; кромѣ того, примемъ въ этой плоскости двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя за новыя оси x-овъ и y-овъ, прямую-же, перпендикулярную къ плоскости (1), за ось z-овъ и преобразуемъ уравненіе (A) къ новымъ координатамъ, выбраннымъ указаннымъ образомъ. По предыдущей теоремѣ, уравненіе поверхности (A) превращается въ слѣдующее:

$$A'_1x'^2 + A'_2y'^2 + A'_3z'^2 + 2B'_1y'z' + 2B'_2x'z' + 2B'_3x'y' +$$
$$+ 2C'_1x' + 2C'_2y' + 2C'_3z' + F' = 0. \qquad (A')$$

Плоскость (1) въ новой системѣ координатъ будетъ плоскостью $(x'\,y')$, и, слѣдовательно, ея уравненіе будетъ $z' = 0$, откуда уравненіе кривой пересѣченія плоскости (1) съ поверхностью (A') получимъ, если положимъ въ уравненіи (A') $z' = 0$. Уравненіе искомаго сѣченія будетъ, слѣдовательно, имѣть видъ:

$$A'_1x'^2 + A'_2y'^2 + 2B'_3x'y' + 2C'_1x + 2C'_2y' + F' = 0. \qquad (B)$$

Итакъ мы видимъ, что кривая пересѣченія поверхности второго порядка съ плоскостью есть линія второго порядка. Въ частномъ случаѣ уравненіе линіи второго порядка можетъ опредѣлять одну точку; тогда плоскость (1) касается этой поверхности въ одной точкѣ.

Если же уравненіе (B) не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста (въ случаѣ мнимаго эллипса), то плоскость (1) не пересѣкаетъ поверхности A. Если уравненіе (B) опредѣляетъ систему

двухъ прямыхъ, то по этимъ прямымъ встрѣчаетъ поверхность (A) сѣкущая плоскость.

98. *Теорема III*. Прямая пересѣкаетъ поверхность второго порядка не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ.

Возьмемъ нѣкоторую прямую L и проведемъ черезъ нее плоскость P. По предыдущей теоремѣ, плоскость P пересѣкаетъ поверхность второго порядка (A) по коническому сѣченію, и, слѣдовательно, прямая не можетъ имѣть болѣе двухъ общихъ точекъ съ коническимъ сѣченіемъ, что и требовалось показать. Если-же прямая имѣетъ еще третью общую точку, то вся она лежитъ на поверхности второго порядка.

Преобразуемъ уравненіе поверхности (A) къ новымъ координатамъ, причемъ за новую ось z-овъ примемъ прямую L. Пусть послѣ этого преобразованія мы получимъ уравненіе (A'). Для нахожденія искомыхъ точекъ пересѣченія поверхности второго порядка съ прямою L, необходимо рѣшить относительно координатъ x', y', z' уравненіе (A') и два уравненія прямой L, которыя въ данномъ случаѣ будутъ:

$$x' = 0 \text{ и } y' = 0,$$

ибо прямая L есть ось z'-овъ. Для опредѣленія координаты z' точекъ пересѣченія прямой L съ поверхностью получаемъ уравненіе

$$A'_3 z'^2 + 2C'_3 z' + D' = 0,$$

откуда видимъ, что, вообще говоря, не будетъ болѣе двухъ точекъ пересѣченія прямой L съ поверхностью (A). Исключеніе представляетъ случай, когда всѣ три коэффиціента A'_3, C'_3, D' равны нулю. Въ этомъ случаѣ z' совершенно произвольно, и вся ось z'-овъ, т. е. вся прямая L, лежитъ на поверхности второго порядка.

99. *Теорема IV*. Проекція коническаго сѣченія на любую плоскость, неперпендикулярную къ плоскости самого коническаго сѣченія, есть новое коническое сѣченіе того же рода.

На любой плоскости P, уравненіе которой пусть будетъ

$$ax + by + cz + \partial = 0, \tag{1}$$

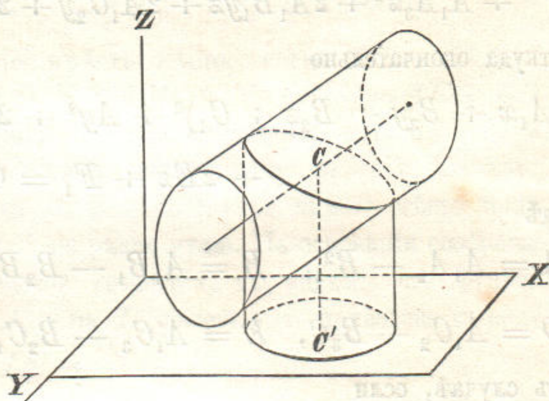
мы можемъ указать коническое сѣченіе, какъ пересѣченіе плоскости (1) съ нѣкоторою поверхностью второго порядка (A) (см. черт. 235).

Если оси координатъ прямоугольны, то мы получимъ уравненіе проекціи коническаго сѣченія, лежащаго въ плоскости P, на плоскость (xy), если изъ уравненія (A) исключимъ z при помощи уравненія (1); въ результатѣ исключенія получается уравненіе второй степени:

$$A_0 x^2 + 2B_0 xy + C_0 y^2 + 2D_0 x + 2E_0 y + F_0 = 0,$$

и, слѣдовательно, искомая проекція есть нѣкоторое коническое сѣченіе.

Покажемъ теперь, что видъ коническаго сѣченія не измѣнится отъ проектированія. Въ самомъ дѣлѣ, если заданная линія второго порядка была системой двухъ прямыхъ, то, очевидно, такова же будетъ и ея проекція; если заданная линія вторага порядка имѣла центръ, то очевидно, что проекція этого центра будетъ центромъ проекціи самой кривой и обратно, парабола, какъ кривая безъ центра, будетъ имѣть проекціею тоже параболу; кромѣ того, если заданная кривая съ центромъ была эллипсомъ, т. е. коническимъ сѣченіемъ конечныхъ размѣровъ, то очевидно, что и проекція должна имѣть конечные размѣры и, слѣдовательно, будетъ тоже эллипсомъ; наконецъ, гипербола даетъ въ проекціи также гиперболу.



Черт. 235.

Преобразованіе первой части уравненія (A) при помощи разложенія на сумму квадратовъ линейныхъ функцій.

100. Предположимъ сначала, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ коэффиціентовъ A_1, A_2, A_3 не обращается въ нуль. Пусть этотъ не равный нулю коэффиціентъ будетъ, напримѣръ, A_1; тогда, умножая на A_1, расположимъ первую часть уравненія (A) по степенямъ x:

$$(A_1x)^2 + 2A_1x\,(B_3y + B_2z + C_1) +$$
$$+ A_1A_2y^2 + A_1A_3z^2 + 2A_1B_1yz +$$
$$+ 2A_1C_2y + 2A_1C_3z + A_1F = 0.$$

Прибавляя къ первой части и вычитая изъ нея квадратъ трехчлена:

$$B_3y + B_2z + C_1,$$

получимъ:

$$[A_1x + (B_3y + B_2z + C_1)]^2 - (B_3y + B_2z + C_1)^2 + A_1A_2y^2 +$$
$$+ A_1A_3z^2 + 2A_1B_1yz + 2A_1C_2y + 2A_1C_3z + A_1F + 0,$$

откуда окончательно

$$(A_1x + B_3y + B_2z + C_1)^2 + Ay^2 + 2Byz + Cz^2 + 2Dy +$$
$$+ 2Ez + F_1 = 0, \qquad (A')$$

гдѣ

$$A = A_1A_2 - B^2{}_3,\quad B = A_1B_1 - B_2B_3,\quad C = A_1A_3 - B^2{}_2,$$
$$D = A_1C_2 - B_3C,\quad E = A_1C_3 - B_2C_1,\quad F_1 = A_1F - C^2{}_1.$$

Въ случаѣ, если

$$A_1A_2 - B^2{}_3 = 0,\ A_1B_1 - B_2B_3 = 0,\ A_1A_3 - B^2{}_2 = 0,$$

такъ что три коэффиціента: A, B, C равны нулю, то разложеніе первой части уравненія (A) окончено, и тогда уравненіе (A) принимаетъ видъ:

$$(A_1x + B_3y + B_2z + C_1)^2 + 2Dy + 2Ez + F_1 = 0. \qquad (B)$$

Уравненіе (B) показываетъ, что въ данномъ случаѣ, по выдѣленіи квадрата линейной функціи $A_1x + B_3y + B_2z + C_1$, въ первой части уравненія (A) остается линейная же функція $2Dy + 2Ez + F_1$. Итакъ, въ случаѣ $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, получаемъ первый классъ поверхностей второго порядка, уравненія которыхъ могутъ быть представлены въ такомъ видѣ:

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

гдѣ

$$\alpha = A_1x + B_3y + B_2z + C_1, \quad \beta = 2Dy + 2Ez + F_1$$

Переходимъ теперь къ случаю, когда по крайней мѣрѣ одинъ изъ коэффиціентовъ A, B, C не равенъ нулю. Тогда, на основаніи разсужденій, приведенныхъ въ плоской геометріи, мы можемъ всегда функцію

$$\varphi(y, z) = Ay^2 + 2Byz + Cz^2 + 2Dy + 2Ez + F,$$

разложеніемъ на сумму квадратовъ привести къ одному изъ двухъ слѣдующихъ видовъ:

$$1)\ \beta^2 + \gamma = 0, \qquad 2)\ L\beta^2 + \gamma^2 + P = 0,$$

причемъ первое разложеніе имѣетъ мѣсто, когда $AC - B^2 = 0$, причемъ $\beta = Ay + Bz + D$, $\gamma = 2Mz + N$, гдѣ $M = AE - BD$, $N = AF_1 - D^2$. Очевидно, что для приведенія функціи $\varphi(y, z)$ къ виду $\beta^2 + \gamma$, слѣдуя способу, изложенному въ геом. дв. изм., мы должны умножить ее на A. Второй случай имѣетъ мѣсто тогда, когда $AC - B^2 = L$, гдѣ L не равно нулю. На основаніи соображеній, приведенныхъ въ плоской геометріи, мы видимъ, что функція $\varphi(y, z)$, по умноженіи на A и на L, можетъ быть приведена къ виду:

$$L\beta^2 + \gamma^2 + P,$$

гдѣ

$$\beta = Ay + Bz + D; \quad \gamma = Lz + M; \quad P = LN - M^2;$$

такъ что окончательно мы замѣчаемъ, что уравненіе (A) можетъ быть приведено къ одному изъ слѣдующихъ трехъ видовъ:

$$1) \qquad \alpha^2 + \beta = 0,$$

$$2) \qquad A\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0,$$

$$3) \qquad AL\alpha^2 + L\beta^2 + \gamma^2 + P = 0.$$

101. Остается показать, какъ поступать въ томъ случаѣ, когда всѣ три коэффиціента A_1, A_2, A_3 равны нулю. Тогда, очевидно, уравненіе (A) имѣетъ видъ:

$$B_1yz + B_2xz + B_3xy + C_1x + C_2y + C_3z + \frac{F}{2} = 0. \quad (1)$$

Это уравненіе, очевидно, первой степени относительно каждой изъ координатъ. Въ самомъ дѣлѣ, его можно написать такъ:

$$x(B_2z + B_3y + C_1) + B_1yz + C_2y + C_3z + \frac{F}{2} = 0,$$

причемъ коэффиціентомъ при буквѣ x является трехленъ $B_3y + B_2z + C_1$. Обозначимъ его черезъ X. Подобнымъ образомъ коэффиціентъ Y при y будетъ трехчленъ $B_3x + B_1z + C_2$, а коэффиціентъ Z при z будетъ: $B_2x + B_1y + C_3$ *). Легко показать, что въ такомъ случаѣ уравненіе (A) можетъ быть представлено въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$XY + Rz^2 + 2Qz + S = 0, \qquad (2)$$

$$XZ + R'y^2 + 2Q'y + S' = 0, \qquad (3)$$

$$YZ + R''x^2 + 2Q''x + S'' = 0. \qquad (4)$$

Уравненіе (1) нельзя представить въ видѣ (2), если $B_3 = 0$. Подобнымъ же образомъ его нельзя представить въ видѣ (3), если $B_2 = 0$, и въ (4), если $B_1 = 0$. Въ этомъ легко убѣдиться. Возьмемъ, напримѣръ,

$$XY = (B_3y + B_2z + C_1)(B_3x + B_1z + C_2) =$$

$$= B_3(B_1yz + B_2xz + B_3xy + C_1x + C_2y) + B_1B_2z^2 +$$

$$+ (B_1C_1 + B_2C_2)z + C_1C_2.$$

Если B_3 не равняется 0, то въ написанномъ тождествѣ выраженіе въ скобкахъ можно, на основаніи уравненія (1), замѣнить черезъ $-C_3z - \frac{F}{2}$. Послѣ подстановки тождество обратится въ уравненіе, равносильное уравненію (1), и, слѣдовательно, уравненіе (1) можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$XY = B_3\left(-C_3z - \frac{F}{2}\right) + B_1B_2z^2 + (B_1C_1 + B_2C_2)z + C_1C_2.$$

*) Черезъ X, Y, Z обозначены, очевидно, частныя производныя первой части уравненія (1) по x, y, z.

Это же уравненіе совпадаетъ съ уравненіемъ (2). Ясно, что въ случаѣ $B_3 = 0$, заданное уравненіе (1) нельзя привести къ виду (2),

Такъ какъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ коэффиціентовъ B_1, B_2, B_3 не равенъ нулю, ибо тогда уравненіе (1) будетъ первой степени, то очевидно, что всегда уравненіе (1) можно представить въ одномъ изъ видовъ (2), (3), (4).

Положимъ, что B_3 не равно нулю, и, слѣдовательно, уравненіе привелось къ виду

$$XY + Rz^2 + 2Qz + S = 0.$$

Обозначая линейныя функціи X, Y черезъ α_1, β_1, мы получимъ:

$$\alpha_1\beta_1 + Rz^2 + 2Qz + S = 0.$$

Умножая на R и обозначая $Rz + Q$ черезъ γ, получимъ:

$$R\,\alpha_1\beta_1 + \gamma^2 + P = 0,$$

гдѣ $P = RS - Q^2$. Это уравненіе можетъ быть переписано такъ:

$$R\left(\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}\right)^2 - R\left(\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}\right)^2 + \gamma^2 + P = 0.$$

Наконецъ, обозначая линейныя функціи $\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} = \alpha$, $\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} = \beta$, получимъ окончательное разложеніе на сумму квадратовъ въ такомъ видѣ:

$$R\alpha^2 - R\beta^2 + \gamma^2 + P = 0.$$

Примѣры.

1) $$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0.$$

$$x^2 + 2x(y + z) + y^2 + 2yz + z^2 - 1 = 0;$$

прибавляя и вычитая квадратъ $(y + z)^2$, получимъ:

$$(x + y + z)^2 - (y + z)^2 + y^2 + 2yz + z^2 - 1 = 0,$$

откуда получаемъ

$$(x + y + z)^2 - 1 = 0.$$

2) $$x^2 + 2xy - 2xz + 2x + 2y - 3z = 0.$$

$$x^2 + 2x(y - z + 1) + 2y - 3z = 0;$$

прибавляя и вычитая квадратъ $(y - z + 1)^2$, получимъ:

$$(x + y - z + 1)^2 - y^2 + 2yz - z^2 - 2y + 2z - 1 + 2y - 3z = 0$$

или

$$(x + y - z + 1)^2 - y^2 + 2yz - z^2 - z - 1 = 0;$$

откуда окончательно

$$(x + y - z + 1)^2 - (y - z)^2 - z - 1 = 0.$$

3) $$3x^2 + 5y^2 + z^2 + 6xy + 6xz + 10yz - 6x - 2y + 2z = 0.$$

Умножаемъ предварительно на 3:

$$(3x)^2 + 2.\,3x(3y + 3z - 3) + 15y^2 + 3z^2 + 30yz + 6z - 6y = 0;$$

прибавляя и вычитая квадратъ $(3y + 3z - 3)^2$, получимъ:

$$(3x + 3y + 3z - 3)^2 + 6y^2 - 6z^2 + 12yz + 12y + 24z - 9 = 0.$$

Дѣлимъ все уравненіе на 3:

$$3(x + y + z - 1)^2 + 2y^2 - 2z^2 + 4yz + 4y + 8z - 3 = 0;$$

умножая на 2, получаемъ:

$$2.\,3(x + y + z - 1)^2 + (2y)^2 +$$

$$+ 2.\,2y(2z + 2) - 4z^2 + 16z - 6 = 0,$$

или

$$6(x + y + z - 1)^2 + (2y + 2z + 2)^2 - 8z^2 + 8z - 10 = 0.$$

Дѣля на 2, получаемъ:

$$3(x + y + z - 1)^2 + 2(y + z + 1)^2 - 4z^2 + 4z - 5 = 0$$

и окончательно

$$3(x + y + z - 1)^2 + 2(y + z + 1)^2 - (2z - 1)^2 - 4 = 0.$$

4) $$xy + xz + yz - 1 = 0.$$

Здѣсь

$$X = y + z;\ Y = x + z;$$

$$(y+z)(x+z) = xy + xz + yz + z^2 = z^2 + 1.$$

Слѣдовательно, заданное уравненіе можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$(y+z)(x+z) - z^2 = 1,$$

что также можно представить такъ:

$$\left(\frac{y+z+x+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+z-x-z}{2}\right)^2 - z^2 = 1;$$

слѣдовательно, заданное уравненіе можно представить окончательно въ такомъ видѣ:

$$\left(z + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\right)^2 - z^2 = 1.$$

5) $$2x^2 - 3y^2 + z^2 - 4xy + 3xz - yz + 5x - 7y + z - 3 = 0.$$

По умноженіи на 2 это уравненіе можемъ написать такъ:

$$(2x)^2 + 2.(2x)\left(-2y + \frac{3}{2}z + \frac{5}{2}\right) -$$

$$-6y^2 + 2z^2 - 2yz - 14y + 2z - 6 = 0.$$

Придавая и отнимая $\left(-2y + \frac{3}{2}z + \frac{5}{2}\right)^2$, получаемъ

$$\left(2x - 2y + \frac{3}{2}z + \frac{5}{2}\right)^2 - 10y^2 - \frac{1}{4}z^2 +$$

$$+ 4yz - 4y - \frac{11}{2}z - \frac{49}{4} = 0.$$

Умножая на -10, можемъ представить это уравненіе въ такомъ

видѣ:

$$-10\left(2x-2y+\frac{3}{2}z+\frac{5}{2}\right)^2+(10y)^2-2.(10y)(2z-2)+$$

$$+\frac{10}{4}z^2+55z+\frac{490}{4}=0.$$

Придавая и отнимая $(2z-2)^2$, получимъ:

$$-10\left(2x-2y+\frac{3}{2}z+\frac{5}{2}\right)^2+(10y-2z+2)^2-\frac{3}{2}z^2+$$

$$+63z+\frac{237}{2}=0.$$

По умноженіи на $-\frac{3}{2}$ имѣемъ:

$$15\left(2x-2y+\frac{3}{2}z+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{2}(10y-2z+2)^2+$$

$$+\left(\frac{3}{2}z\right)^2-2.\left(\frac{3}{2}z\right).\frac{63}{2}-\frac{3.237}{4}=0,$$

откуда окончательно

$$15\left(2x-2y+\frac{3}{2}z+\frac{5}{2}\right)^2-6(5y-z+1)^2+$$

$$+\frac{9}{4}(z-21)^2-1170=0.$$

102. Итакъ мы видимъ, что какъ бы ни было задано уравненіе поверхности второго порядка, при помощи вышеуказаннаго выдѣленія въ первой части квадратовъ линейныхъ функцій, мы можемъ его всегда привести къ одному изъ слѣдующихъ видовъ:

1) $$\alpha^2+\beta=0,$$

2) $$L\alpha^2+\beta^2+\gamma=0,$$

3) $$L\alpha^2+L_1\beta^2+\gamma^2+P=0.$$

Соотвѣтственно этому, поверхности второго порядка можно раздѣлить на три рода.

Поверхности второго порядка перваго рода:

$$\alpha^2 + \beta = 0 .$$

103. Разсмотримъ сначала тотъ простѣйшій случай, когда линейная функція β равна постоянному числу, другими словами, когда всѣ коэффиціенты при координатахъ въ этой функціи равны нулю. Полагая въ этомъ случаѣ $\beta = P$, мы замѣчаемъ, что уравненіе

$$\alpha^2 + P = 0 \qquad (A')$$

не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста, если $P > 0$, если-же $P = 0$, то уравненіе (A') опредѣляетъ плоскость $\alpha = 0$; въ случаѣ-же $P < 0$, можемъ положить $P = -p^2$, гдѣ p нѣкоторое дѣйствительное число, и тогда уравненіе

$$\alpha^2 - p^2 = 0$$

распадается на два:

$$\alpha + p = 0 \text{ и } \alpha - p = 0 ,$$

и, слѣдовательно, геометрическое мѣсто, опредѣляемое этимъ уравненіемъ, есть система двухъ параллельныхъ плоскостей $\alpha + p = 0$ и $\alpha - p = 0$. Напримѣръ,

1) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz - 2x + 4y - 6z + 2 = 0$

по разложеніи даетъ:

$$(x - 2y + 3z - 1)^2 + 1 = 0 .$$

Это уравненіе, очевидно, не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста.

2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$;

по разложеніи получаемъ:

$$(x + y + z + 1)^2 = 0 .$$

Заданное уравненіе, очевидно, опредѣляетъ плоскость

$$x + y + z + 1 = 0 .$$

3) $$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 4 = 0;$$

по разложенiи получаемъ:

$$(x - y + z)^2 - 4 = 0.$$

Это уравненiе опредѣляетъ, очевидно, двѣ параллельныя плоскости:

$$x - y + z + 2 = 0 \text{ и } x - y + z - 2 = 0.$$

104. Обращаемся теперь къ болѣе общему случаю, когда β есть функцiя, линейная относительно координатъ. Поверхность, опредѣляемая уравненiемъ

$$\alpha^2 + \beta = 0, \qquad (1)$$

въ этомъ случаѣ есть такъ называемый *параболическiй цилиндръ.*

105. Покажемъ сначала, что поверхность наша есть цилиндръ. Прежде всего мы замѣчаемъ, что на поверхности лежитъ прямая, опредѣляемая системой уравненiй

$$\alpha = 0 \text{ и } \beta = 0,$$

ибо координаты каждой точки этой прямой удовлетворяютъ заразъ обоимъ уравненiямъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, и, слѣдовательно, удовлетворяютъ также заданному уравненiю (1) поверхности.

Покажемъ теперь, что какою-бы плоскостью, параллельною прямой ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) ни пересѣкали нашу поверхность, въ сѣченiи будутъ всегда двѣ прямыя, параллельныя прямой ($\alpha = 0$, $\beta = 0$); изъ этого мы и заключаемъ, что сама поверхность есть геометрическое мѣсто прямыхъ, параллельныхъ прямой ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), и, слѣдовательно, нѣкоторый цилиндръ, образующiя котораго параллельны прямой ($\alpha = 0$, $\beta = 0$). Для того, чтобы убѣдиться въ сказанномъ, докажемъ предварительно такую лемму:

Лемма. Уравненiе всякой плоскости, параллельной прямой ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$l\alpha + m\beta + n = 0,$$

гдѣ l, m, n нѣкоторыя числа.

Въ самомъ дѣлѣ, если число n не равно нулю, то уравненiе

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

противорѣчитъ совокупности уравненій

$$\alpha = 0 \text{ и } \beta = 0 ,$$

и, слѣдовательно, не существуетъ точки пересѣченія прямой ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) съ плоскостью

$$l\alpha + m\beta + n = 0 ,$$

что показываетъ, что прямая и плоскость взаимно параллельны; въ случаѣ-же если $n = 0$, то прямая ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) вся лежитъ въ плоскости

$$l\alpha + m\beta = 0,$$

и, слѣдовательно, можно сказать и въ этомъ случаѣ, что прямая параллельна плоскости.

Итакъ, пересѣчемъ нашу поверхность

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

плоскостью

$$l\alpha + m\beta + n = 0 .$$

Линія пересѣченія будетъ опредѣляться двумя уравненіями

$$l\alpha + m\beta + n = 0, \ \alpha^2 + \beta = 0$$

или

$$\beta = -\frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m}, \ \alpha^2 - \frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m} = 0 .$$

Рѣшая послѣднее уравненіе относительно α, получимъ:

$$\alpha = \frac{l}{2m} \pm \sqrt{R_n} ,$$

гдѣ

$$R_n = \frac{l^2}{4m^2} + \frac{n}{m} .$$

Итакъ, линія пересѣченія поверхности $\alpha^2 + \beta = 0$ плоскостью

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

будетъ представлять систему двухъ параллельныхъ прямыхъ L и L' (см. черт. 236)

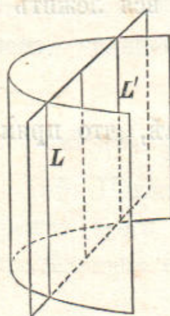
$$L \; . \; . \; . \; . \; . \; l\alpha + m\beta + n = 0, \; \alpha = \frac{l}{2m} + \sqrt{R_n}$$

$$L' \; . \; . \; . \; . \; . \; l\alpha + m\beta + n = 0, \; \alpha = \frac{l}{2m} - \sqrt{R_n}.$$

Объ прямыя L и L' параллельны одной изъ образующихъ цилиндра $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ибо уравненія обѣихъ этихъ прямыхъ могутъ быть написаны въ такомъ видѣ:

$$\alpha = k, \; \beta = k_1,$$

гдѣ k и k_1 суть нѣкоторыя постоянныя, независящія отъ координатъ, числа. Числа k и k_1 получаются черезъ рѣшеніе уравненій прямыхъ L и L' относительно α и β.



Черт. 236.

106. Покажемъ теперь, что въ сѣченіи нашего цилиндра всякою плоскостью, не параллельною образующимъ цилиндра, получается парабола.

Возьмемъ плоскость $\gamma = 0$, причемъ функція γ предполагается такою, что она не можетъ быть представлена въ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, выборъ функціи γ возможенъ на безчисленное множество способовъ; стоитъ только на прямой $\alpha = 0$, $\beta = 0$ выбрать какую нибудь точку и черезъ эту точку провести плоскость, составляющую съ прямою $\alpha = 0$, $\beta = 0$ какой нибудь уголъ, отличный отъ нуля, напримѣръ, хоть 90^0. Тогда и получимъ плоскость, уравненіе которой $\gamma = 0$, навѣрное, не можетъ быть представлено въ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0.$$

Въ сѣченіи заданной поверхности $\alpha^2 + \beta = 0$ плоскостью $\gamma = 0$ получается геометрическое мѣсто, опредѣляемое системой уравненій

$$\alpha^2 + \beta = 0 \text{ и } \gamma = 0. \qquad (*)$$

Если мы изъ послѣдней системы исключимъ какую нибудь изъ координатъ, напримѣръ, z, то получимъ одно уравненіе, заключающее только двѣ координаты x и y. Это уравненіе будетъ опредѣлять кри-

вую линію, представляющую проекцію линіи сѣченія заданной поверхности $\alpha^2 + \beta = 0$ плоскостью $\gamma = 0$. Такъ какъ уравненіе $\gamma = 0$ имѣетъ видъ

$$ax + by + cz + д = 0,$$

то для произведенія сказаннаго исключенія изъ послѣдняго уравненія можно будетъ выразить z черезъ x и y. Получаемъ

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{д}{c}.$$

Подставляя полученное выраженіе въ функціи α и β, обратимъ послѣднія въ линейныя функціи α_1 и β_1 отъ однѣхъ только буквъ x и y.

Итакъ, исключая изъ системы (*) букву z, получаемъ уравненіе:

$$\alpha_1^2 + \beta_1 = 0. \qquad (**)$$

На основаніи изложеннаго въ геометріи двухъ измѣреній, мы заключаемъ, что послѣдняя представляетъ на плоскости xy параболу.

Итакъ, мы видимъ, что разсматриваемый цилиндръ есть дѣйствительно параболическій и, слѣдовательно, встрѣчается всякою плоскостью, не параллельной образующей, по параболамъ, ибо проекція подобнаго сѣченія на плоскости xy всегда парабола.

Необходимо еще остановиться на весьма важномъ обстоятельствѣ. Если въ функціяхъ α_1 и β_1 входятъ въ обѣихъ обѣ перемѣнныя x и y, то необходимо показать, что прямыя $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 0$ пересѣкаются, ибо въ обратномъ случаѣ уравненіе (**) опредѣлило-бы не параболу, а систему двухъ прямыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если плоскость $\gamma = 0$ не параллельна прямой $\alpha = 0$, $\beta = 0$, то три плоскости

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

встрѣчаются въ одной точкѣ M, вершинѣ трехграннаго угла, образованнаго ими.

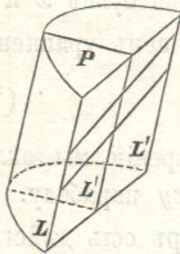
Два ребра разсматриваемаго трехграннаго угла, опредѣляемыя системами ($\alpha = 0$, $\gamma = 0$), ($\beta = 0$, $\gamma = 0$), встрѣчаются въ вершинѣ M, а потому и проекціи этихъ реберъ

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0$$

на плоскости xy должны встрѣчаться въ точкѣ N — проекціи точки M и, слѣдовательно, уравненіе (**) дѣйствительно опредѣляетъ параболу, а не систему двухъ прямыхъ.

Если функція $\gamma = 0$ не заключаетъ координаты z, то пришлось бы исключать въ предыдущихъ разсужденіяхъ не координату z, а какую нибудь другую, напримѣръ, x, что будетъ соотвѣтствовать разсмотрѣнію проекціи сѣченія на плоскости yz.

107. Покажемъ теперь, что средины всѣхъ хордъ, параллельныхъ нѣкоторому направленію, лежатъ въ одной плоскости, называемой *діаметральной*. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ черезъ какую нибудь изъ хордъ заданнаго направленія плоскость, параллельную образующей ($\alpha = 0$, $\beta = 0$); пусть уравненіе этой плоскости будетъ $l\alpha + m\beta + n = 0$. Эта плоскость, какъ мы видѣли, пересѣкаетъ цилиндръ по двумъ образующимъ L и L' (см. черт. 237). Средины хордъ заданнаго направленія, лежащихъ въ плоскости $l\alpha + m\beta + n = 0$, находятся на прямой L'', лежащей въ указанной плоскости по срединѣ между прямыми L и L' и параллельно этимъ послѣднимъ; мы легко замѣтимъ, принимая въ соображеніе выведенныя уравненія прямыхъ сѣченія L и L', что прямая L'' будетъ имѣть уравненія



Черт. 237.

$$l\alpha + m\beta + n = 0, \ \alpha = \frac{l}{2m}. \qquad (*)$$

Геометрическое мѣсто прямыхъ L'', лежащихъ на плоскостяхъ, параллельныхъ между собою и проведенныхъ параллельно образующей ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), а также параллельно заданному направленію хордъ, будетъ искомая діаметральная плоскость для хордъ заданнаго направленія. Для опредѣленія уравненія искомаго геометрическаго мѣста необходимо изъ уравненій (*) исключить произвольный параметръ n. Уравненіе $\alpha = \frac{l}{2m}$, какъ не заключающее параметра n, и есть искомое уравненіе діаметральной плоскости, соотвѣтствующей тому направленію хордъ, для котораго уравненіе плоскости, проведенной черезъ образующую ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) параллельно этому направленію хордъ, будетъ $l\alpha + m\beta = 0$.

108. Если мы поставимъ себѣ теперь задачу опредѣлить l и m, или, лучше сказать, ихъ отношеніе $\frac{l}{m}$ такъ, чтобы двѣ плоскости $\alpha = \frac{l}{2m}$ и $l\alpha + m\beta = 0$ были взаимно перпендикулярны, тогда мы получимъ такъ называемую *главную діаметральную плоскость* нашего цилиндра.

Такъ какъ уравненіе, выражающее условіе перпендикулярности, будетъ первой степени относительно отношенія $\frac{l}{m}$, то мы, рѣшая это уравненіе относительно $\frac{l}{m}$ и подставляя полученное значеніе въ уравненіе $\alpha = \frac{l}{2m}$, получимъ уравненіе главной діаметральной плоскости. Эта плоскость будетъ плоскостью симметріи заданнаго цилиндра и геометрическимъ мѣстомъ осей параболъ, получаемыхъ въ пересѣченіи поверхности плоскостями, перпендикулярными образующимъ.

Примѣръ. Разсмотримъ параболическій цилиндръ, опредѣляемый уравненіемъ

$$(x - y + 3z - 1)^2 + 2y - z + 3 = 0.$$

Прямоугольныя образующія его опредѣляются уравненіями

$$x - y + 3z - 1 = k, \quad 2y - z + 3 = k_1,$$

гдѣ k и k_1 различныя числа, между которыми существуетъ только одна зависимость: $k^2 + k_1 = 0$, такъ что, напримѣръ $k = 1$, $k_1 = -1$ или $k = 2$, $k_1 = -4$, и т. д. Существуетъ безчисленное множество паръ чиселъ k и k_1; каждой опредѣленной парѣ соотвѣтствуетъ одна вполнѣ опредѣленная образующая.

Возьмемъ теперь какую нибудь прямую въ пространствѣ, напримѣръ,

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3 &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и будемъ разсматривать хорды, параллельныя этой прямой. Укажемъ діаметральную плоскость, дѣлящую эти хорды пополамъ. Для этой цѣли проведемъ черезъ образующія ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) плоскость $l\alpha + m\beta = 0$, параллельную заданной прямой (1). Для этой цѣли надо будетъ такъ опредѣлить коэффиціенты l и m въ уравненіи

$$l(x - y + 3z - 1) + m(2y - z + 3) = 0, \qquad (2)$$

чтобы послѣдняя плоскость (2) не встрѣчалась съ прямою (1), другими словами, чтобы систему трехъ уравненій (1) и (2) нельзя было рѣшить относительно трехъ координатъ x, y, z. Выражая при помощи уравненій (1) x и z черезъ y, получимъ

$$x = 2y - 3,\ z = x + y = 3y - 3.$$

Подставляя въ уравненіе (2), получимъ

$$l(10y - 13) + m(-y + 6) = 0,$$

откуда

$$(10l - m)y - 13l + 6m = 0.$$

Чтобы послѣднее уравненіе нельзя было рѣшить относительно y, необходимо положить $10l - m = 0$, откуда получаемъ $\frac{l}{2m} = \frac{1}{20}$, и, слѣдовательно, уравненіе искомой діаметральной плоскости имѣетъ видъ:

$$x - y + 3z - 1 = \frac{1}{20}.$$

Найдемъ теперь плоскость симметріи. Для этого надо будетъ опредѣлить отношеніе $\frac{l}{m}$ такъ, чтобы двѣ плоскости

$$l(x - y + 3z - 1) + m(2y - z + 3) = 0,$$

$$x - y + 3z - 1 = \frac{l}{2m},$$

были взаимно перпендикулярны. Переписывая послѣднія два уравненія въ такомъ видѣ

$$lx + (-l + 2m)y + (3l - m)z + \ldots = 0,$$

$$x - y + 3z + \ldots = 0,$$

можемъ написать условіе перпендикулярности въ такомъ видѣ:

$$l.1 + (-l + 2m).(-1) + (3l - m).3 = 0,$$

или

$$11l - 5m = 0,$$

откуда

$$\frac{l}{2m} = \frac{5}{22}.$$

Искомое уравненіе плоскости симметріи имѣетъ слѣдующій видъ:

$$x - y + 3z - 1 = \frac{5}{22}.$$

Поверхности второго порядка второго рода:

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0.$$

109. Остановимся при изученіи поверхностей этого рода, подобно тому какъ мы дѣлали для поверхностей перваго рода, сначала на томъ простѣйшемъ случаѣ, когда, по выдѣленіи двухъ квадратовъ, остается въ первой части уравненія постоянное число, другими словами, когда въ функціи γ обращаются въ нуль всѣ коэффиціенты при координатахъ, такъ что $\gamma = P$, гдѣ P постоянное число. Уравненіе поверхности въ этомъ случаѣ имѣетъ видъ:

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0.$$

Если L и P числа положительныя, то это уравненіе не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста. Напримѣръ,

$$(x - y + z)^2 + (2y + z - 1)^2 + 3 = 0.$$

110. Въ случаѣ $P = 0$ уравненіе $L\alpha^2 + \beta^2 = 0$ при $L > 0$ опредѣляетъ прямую $\alpha = 0$, $\beta = 0$, при L же отрицательномъ, двѣ плоскости, ибо, полагая $L = -\lambda^2$, получимъ $\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = 0$. Это уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$(\beta + \lambda\alpha) . (\beta - \lambda\alpha) = 0,$$

и, слѣдовательно, опредѣляетъ двѣ плоскости $\beta + \lambda\alpha = 0$, $\beta - \lambda\alpha = 0$, пересѣкающіяся по прямой $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Резюмируя сказанное для случая $P = 0$, мы замѣчаемъ, что въ этомъ случаѣ получается всегда равенство нулю или суммы двухъ квадратовъ линейныхъ функцій, или разности такихъ квадратовъ. Въ первомъ случаѣ получается прямая, во второмъ двѣ плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ, если, напримѣръ, задано уравненіе

$$(x+2y+3z+4)^2+(y-z+1)^2=0, \tag{1}$$

то понятно, что ему удовлетворятъ координаты только такихъ точекъ, которыя лежатъ на прямой пересѣченія двухъ плоскостей

$$x+2y+3z+4=0 \tag{2}$$

и

$$y-z+1=0, \tag{3}$$

и заданное уравненіе (1) ни какими другими точками сказанныхъ двухъ плоскостей не удовлетворяется. Слѣдовательно, это уравненіе опредѣляетъ прямую линію.

Если бы въ заданномъ уравненіи квадраты были съ разными знаками, то есть, другими словами, если бы было задано уравненіе

$$(x+2y+3z+4)^2-(y-z+1)^2=0, \tag{4}$$

то происходитъ совсѣмъ другое: первая часть можетъ быть разложена на два множителя:

$$[(x+2y+3z+4)+(y-z+1)]\times$$
$$\times[(x+2y+3z+4)-(y-z+1)]=0,$$

или

$$(x+3y+2y+5)\,(x+y+4z+3)=0.$$

Произведеніе можетъ равняться нулю, когда одинъ изъ множителей равенъ нулю, причемъ другой можетъ и не обращаться въ нуль, такъ что въ этомъ случаѣ должно быть одно изъ двухъ: или

$$x+3y+2y+5=0, \tag{5}$$

или же

$$x+y+4z+3=0. \tag{6}$$

Слѣдовательно, заданное уравненіе (4) опредѣляетъ двѣ плоскости (5) и (6).

111. Итакъ, мы разсмотрѣли случаи, когда L и P оба положи-

тельны и когда $P=0$. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ уравненіе

$$L\alpha^2+\beta^2+P=0, \qquad (1)$$

опредѣляетъ *цилиндръ*, причемъ при $L>0$ цилиндръ будетъ *эллиптическій*, а при $L<0$—*гиперболическій*.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы пересѣчемъ поверхность плоскостью $\gamma=0$, не параллельною направленію ($\alpha=0$, $\beta=0$), то линія пересѣченія опредѣлится уравненіями:

$$L\alpha^2+\beta^2+P=0,\ \gamma=0. \qquad (*)$$

Мы получимъ уравненіе проекціи сѣченія на плоскость (x, y), если исключимъ z изъ уравненій (*). Рѣшая уравненіе первой степени $\gamma=0$ относительно z и подставляя полученное значеніе для z въ уравненіе $L\alpha^2+\beta^2+P=0$, получимъ такое уравненіе

$$L\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+P=0,$$

гдѣ α_1 и β_1 линейныя функціи относительно двухъ только перемѣнныхъ x и y. На основаніи изложеннаго въ геометріи двухъ измѣреній, мы замѣчаемъ, что при $L>0$ разсматриваемая проекція будетъ эллипсъ, а при $L<0$—гипербола.

Итакъ, мы видимъ, что сѣченіе поверхности (1) всякою плоскостью $\gamma=0$, не параллельною направленію ($\alpha=0$, $\beta=0$), будетъ всегда эллипсъ, если $L>0$, и всегда гипербола, если $L<0$.

112. Покажемъ теперь, что поверхность

$$L\alpha^2+\beta^2+P=0, \qquad (1)$$

цилиндръ. Будемъ пересѣкать ее плоскостями, параллельными направленію ($\alpha=0$, $\beta=0$); уравненія такихъ плоскостей будутъ

$$l\alpha+m\beta+n=0.$$

Линія пересѣченія опредѣлится двумя уравненіями

$$L\alpha^2+\beta^2+P=0 \text{ и } l\alpha+m\beta+n=0.$$

Эта система можетъ быть преобразована такъ: второе уравненіе оставимъ безъ перемѣны, изъ перваго же исключимъ функцію β при помощи второго; тогда получимъ систему:

$$l\alpha+m\beta+n=0,\ L\alpha^2+\left(\frac{l}{m}\alpha+\frac{n}{m}\right)^2+P=0.$$

Второе уравненіе изъ числа послѣднихъ можно преобразовать такъ

$$\alpha^2\left(L+\frac{l^2}{m^2}\right)+\frac{2ln}{m^2}\alpha+P+\frac{n^2}{m^2}=0,$$

откуда

$$\alpha=-\frac{ln}{Lm^2+l^2}\pm R_n,$$

гдѣ

$$R_n=\frac{m\sqrt{-L(Pm^2+n^2)-Pl^2}}{Lm^2+l^2}.$$

Итакъ мы видимъ, что плоскость $l\alpha+m\beta+n=0$ пересѣкаетъ поверхность по двумъ прямолинейнымъ образующимъ, параллельнымъ направленію ($\alpha=0$, $\beta=0$), уравненія которыхъ

$$l\alpha+m\beta+n=0,\ \alpha=-\frac{ln}{Lm^2+l^2}+R_n$$

и

$$l\alpha+m\beta+n=0,\ \alpha=-\frac{ln}{Lm^2+l^2}-R_n$$ (см. черт. 238).

113. Покажемъ теперь, какъ найти діаметральную плоскость, дѣлящую хорды заданнаго направленія пополамъ. Черезъ любую изъ заданныхъ хордъ проводимъ плоскость

$$l\alpha+m\beta+n=0,$$

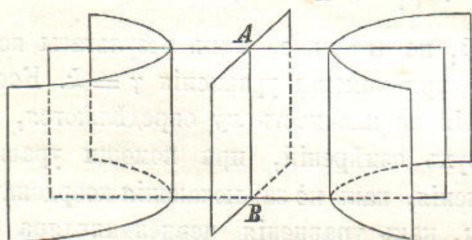
параллельную направленію ($\alpha=0$, $\beta=0$). На основаніи соображеній уже извѣстныхъ, середины хордъ, лежащихъ въ плоскости $l\alpha+m\beta+n=0$, лежатъ на прямой

$$l\alpha+m\beta+n=0,\ \alpha=-\frac{ln}{Lm^2+l^2}. \qquad (*)$$

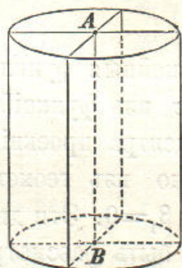
Итакъ, мы видимъ, что уравненіе діаметральной плоскости, дѣлящей хорды, параллельныя плоскости $l\alpha+m\beta+n=0$ пополамъ, получится черезъ исключеніе параметра n изъ двухъ уравненій (*). Это уравненіе будетъ

$$Lm\alpha-l\beta=0.$$

Мѣняя величину коэффиціентовъ l, m, мы будемъ получать всевозможныя діаметральныя плоскости. Всѣ эти плоскости будутъ проходить черезъ прямую ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), ибо координаты послѣдней прямой удовлетворяютъ уравненію $Lm\alpha - l\beta = 0$. Прямая ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) есть такъ называемая *осъ* цилиндра. Отношеніе $\frac{l}{m}$ можно подобрать такъ, чтобы діаметральная плоскость была перпендикулярна къ плоскости $l\alpha + m\beta = 0$ (2). Для этой цѣли придется написать условіе перпендикулярности плоскостей (1) и (2). Это условіе даетъ квадратное уравненіе для отношенія $u = \frac{l}{m}$, и, слѣдовательно, у эллиптическаго и гиперболическаго цилиндровъ существуютъ двѣ діаметраль-



Черт. 238.



Черт. 239.

ныя плоскости, или *плоскости симметріи*. Эти плоскости суть не что иное, какъ геометрическое мѣсто осей эллипсовъ и гиперболъ, получаемыхъ въ сѣченіи цилиндра плоскостями, перпендикулярными образующимъ (см. черт. 238 и 239).

114. При разсмотрѣніи цилиндровъ до сихъ поръ выкладки были тождественны съ выкладками, относящими къ линіямъ второго порядка на плоскости. Разница состоитъ лишь въ геометрическомъ толкованіи формулъ, а также въ томъ, что для опредѣленія плоскостей симметріи условіе перпендикулярности надо писать уже въ иномъ видѣ.

115. Прямая AB, имѣющая уравненіе $\alpha=0$, $\beta=0$, можетъ быть разсматриваема, какъ геометрическое мѣсто центровъ эллипсовъ и гиперболъ, лежащихъ въ указанныхъ перпендикулярныхъ сѣченіяхъ. Геометрическое мѣсто центровъ сѣченій поверхности второго порядка

параллельными между собою плоскостями называется *діаметромъ* поверхности.

Діаметръ поверхности, перпендикулярный къ направленію соотвѣтственныхъ сѣкущихъ плоскостей, называется *осью* поверхности. На основаніи этого опредѣленія мы замѣчаемъ, что прямая AB ($\alpha=0$, $\beta=0$) есть ось цилиндра. Покажемъ теперь, какъ найти діаметръ, соотвѣтствующій сѣкущимъ плоскостямъ, параллельнымъ плоскости $\gamma=0$, проведенной не параллельно образующимъ. Пересѣчемъ нашу поверхность какою нибудь изъ плоскостей указаннаго направленія, напримѣръ плоскостью $\gamma=k$, гдѣ k нѣкоторое произвольное постоянное число. Уравненіе проекціи сѣченія на плоскость xy, какъ мы видѣли, будетъ

$$L\alpha_1^2+\beta_1^2+P=0,$$

гдѣ линейныя функціи α_1, β_1 не что иное, какъ результаты исключенія z изъ функцій α и β при помощи уравненія $\gamma=k$. Координаты центра проекціи сѣченія на плоскость xy опредѣляются, какъ извѣстно изъ геометріи двухъ измѣреній, при помощи уравненій $\alpha_1=0$, $\beta_1=0$. Эти два уравненія, какъ не заключающія координаты z, могутъ быть разсматриваемы, какъ уравненія перпендикуляра CC_1, проектирующаго центръ C сѣченія плоскости $\gamma=0$ на плоскость xy; координаты же искомаго центра C получимъ, рѣшая относительно x, y, z три слѣдующихъ уравненія:

$$\gamma=k,\ \alpha_1=0,\ \beta_1=0.$$

Итакъ, мѣняя k, будемъ получать центры различныхъ сѣченій цилиндра плоскостью $\gamma=k$. Геометрическое мѣсто этихъ центровъ есть прямая $\alpha=0$, $\beta=0$, ибо уравненія этого мѣста получаются черезъ исключеніе k при помощи уравненія $\gamma=0$ изъ уравненій $\alpha_1=0$, $\beta_1=0$. Очевидно, что черезъ подобнаго рода исключеніе получаются обратно функціи α и β (см. черт. 240).

Итакъ, мы видимъ, что ось цилиндра $\alpha=0$, $\beta=0$ есть въ то же самое время діаметръ, соотвѣтствующій всевозможнымъ направленіямъ параллельныхъ сѣченій.

116. Покажемъ въ заключеніе, что ось цилиндра есть геометрическое мѣсто его *центровъ*.

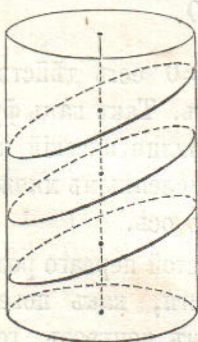
Центромъ поверхности второго порядка называется такая точка C,

что всѣ хорды MM' поверхности (см. черт. 241) дѣлятся этою точкою C пополамъ.

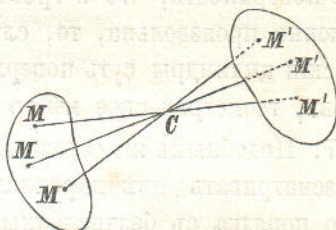
Итакъ, покажемъ, что каждая точка оси цилиндра можетъ быть разсматриваема какъ центръ его. Возьмемъ на оси какую нибудь точку, напримѣръ, ту, въ которой пересѣкаетъ эту ось какая нибудь плоскость $\gamma = 0$. Покажемъ тогда, что точка ($\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$) есть центръ поверхности. Проведемъ черезъ эту точку любую прямую; уравненія этой прямой могутъ быть написаны такъ:

$$\alpha = k\gamma, \quad \beta = k_1\gamma. \qquad (1)$$

Мѣняя k и k_1, получимъ всевозможныя



Черт. 240.



Черт. 241.

хорды, проходящія черезъ разсматриваемую точку. Точки сѣченія цилиндра хордою (1) опредѣлятся при помощи уравненій

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0, \quad \alpha = k\gamma, \quad \beta = k_1\gamma.$$

Послѣдняя система можетъ быть замѣнена слѣдующею:

$$\gamma^2 (Lk^2 + k_1^2) + P = 0, \quad \alpha = k\gamma, \quad \beta = k_1\gamma.$$

Изъ этихъ уравненій видно, что получаются двѣ точки сѣченія цилиндра хордою (1). Одна точка опредѣляется уравненіями

$$\alpha = k\gamma, \quad \beta = k_1\gamma, \quad \gamma = +\sqrt{\frac{-P}{Lk^2 + k_1^2}},$$

а другая уравненіями

$$\alpha = k\gamma, \quad \beta = k_1\gamma, \quad \gamma = -\sqrt{\frac{-P}{Lk^2 + k_1^2}}.$$

Конечно, обѣ точки существуютъ только тогда, когда подъ корнемъ

стоитъ положительная величина; если подъ корнемъ выходитъ отрицательное число, то хорда не пересѣкаетъ поверхности. Всякій же разъ, когда хорда MM' пересѣкаетъ поверхность, средина C этой хорды опредѣлятся уравненіями

$$\alpha = k\gamma,\ \beta = k_1\gamma,\quad \gamma = 0 \text{ (см. черт. 241).}$$

Уравненія эти равносильны такой системѣ уравненій:

$$\alpha = 0,\quad \beta = 0,\quad \gamma = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что точка $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ есть дѣйствительно центръ поверхности, что и требовалось доказать. Такъ какъ функція γ совершенно произвольна, то, слѣдовательно, эллиптическій и гиперболическій цилиндры суть поверхности съ безчисленнымъ множествомъ центровъ, геометрическое мѣсто которыхъ есть ось.

117. Подобнымъ же образомъ изъ поверхностей перваго рода могли бы разсматривать двѣ параллельныя плоскости, какъ поверхность второго порядка съ безчисленнымъ множествомъ центровъ, геометрическое мѣсто которыхъ есть плоскость, лежащая по seрединѣ между заданными двумя плоскостями.

118. Итакъ мы видѣли, что уравненіе:

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0$$

при $L < 0$ опредѣляетъ гиперболическій цилиндръ. Полагая $L = -\lambda^2$, получаемъ уравненіе въ такомъ видѣ

$$\beta - \lambda^2\alpha^2 + P = 0.$$

Отбрасывая P, получаемъ уравненіе

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = 0,$$

опредѣляющее двѣ плоскости

$$\beta + \lambda\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \beta - D\alpha = 0.$$

Эти двѣ плоскости представляютъ систему такъ называемыхъ *асимптотическихъ плоскостей*.

Гиперболическій цилиндръ состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ полъ, заключенныхъ въ двухъ противоположныхъ двугранныхъ углахъ между

ассимптотическими плоскостями. Обѣ полы гиперболическаго цилиндра, расходясь приближаются къ асимптотическимъ плоскостямъ.

Мѣняя знакъ у коэффиціента P, получаемъ другой цилиндръ, сопряженный съ первымъ и расположенный въ другихъ двухъ двугранныхъ углахъ между асимптотическими плоскостями.

Асимптотическія плоскости представляютъ собою геометрическое мѣсто асимптотъ гиперболъ, получаемыхъ въ сѣченіи цилиндра различными плоскостями.

Примѣръ.

$$(x-2y+3z+1)^2-3(y+z)^2-4=0.$$

Квадраты съ разными знаками, слѣдовательно, заданная поверхность гиперболическій цилиндръ. Уравненіе можно переписать такъ:

$$-\frac{1}{3}(x-2y+3z+1)^2+(y+z)^2+\frac{4}{3}=0. \qquad (1)$$

Согласно нашему обозначенію, въ данномъ случаѣ

$$L=-\frac{1}{3},\ \alpha=x-2y+3z+1,\ \beta=y+z,\ P=\frac{4}{3}.$$

Асимптотическія плоскости опредѣляются уравненіемъ

$$(x-2y+3z+1)^2-3(y+z)^2=0,$$

которое получается изъ заданнаго, отбрасывая членъ -4. Уравненія этихъ плоскостей суть:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z+1-\sqrt{3}\,(y+z)=0,\\ x-2y+3z+1+\sqrt{3}\,(y+z)=0. \end{aligned}\right\}$$

Возьмемъ какое нибудь направленіе хорды; пусть, напримѣръ, заданы хорды, параллельныя прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{-1}. \qquad (2)$$

Чтобы получить діаметральную плоскость, дѣлящую хорды, параллельныя прямой (2), пополамъ, проведемъ черезъ прямую $\alpha=0$, $\beta=0$ плоскость, параллельную прямой (2). Это будетъ одна изъ

діаметральныхъ плоскостей; ея уравненіе есть:

$$l\,(x - 2y + 3z + 1) + m\,(y + z) = 0. \tag{3}$$

Если мы подберемъ такъ отношеніе $\frac{l}{m}$, чтобы уравненіе (3) опредѣляло плоскость, параллельную прямой (2), то ея сопряженная діаметральная плоскость, опредѣляемая уравненіемъ

$$Lm\,(x - 2y + 3z + 1) - l(y + z) = 0,$$

будетъ искомая діаметральная плоскость, дѣлящая разсматриваемыя хорды пополамъ. Чтобы найти требуемое отношеніе $\frac{l}{m}$, перепишемъ систему (2) въ видѣ

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+1}{-1} = u,$$

гдѣ черезъ u обозначена общая величина отношеній. Отсюда

$$x = 2u + 1, \quad y = 4u + 3, \quad z = -u - 1. \tag{4}$$

Каждому значенію перемѣннаго u соотвѣтствуетъ опредѣленная точка на прямой (2). Чтобы найти точку встрѣчи прямой (2) съ діаметральной плоскостью (3), необходимо подставить выраженія ординатъ (4) въ уравненіе (3) и затѣмъ рѣшить послѣднее относительно u. Сдѣлавъ сказанную подстановку, получаемъ уравненіе

$$l\,(2u + 1 - 8u - 6 - 3u - 3 + 1) + m\,(3u + 2) = 0,$$

откуда

$$u\,(-9l + 3m) - 7l + 2m = 0. \tag{5}$$

Если мы желаемъ теперь l и m подобрать такъ, чтобы діаметральная плоскость (3) была параллельна прямой (2), другими словами, чтобы она не встрѣчалась съ этою прямою, необходимо l и m выбрать такими, чтобы уравненіе (5) нельзя было рѣшить относительно u, что возможно лишь въ томъ случаѣ, когда коэффиціентъ при u равенъ нулю, и, слѣдовательно, u пропадаетъ. Итакъ, получается уравненіе

$$-9l + 3\,m = 0,$$

откуда

$$\frac{l}{m} = \frac{1}{3}.$$

Искомая діаметральная плоскость опредѣляется, слѣдовательно, уравненіемъ

$$-\frac{1}{3}\, 3\,(x - 2y + 3z + 1) - (y + z) = 0.$$

Найдемъ теперь плоскости симметріи нашего цилиндра. Уравненія двухъ сопряженныхъ діаметральныхъ плоскостей суть

$$\left.\begin{aligned} l\,(x - 2y + 3z + 1) + m\,(y + z) = 0 \\ \frac{1}{3}\, m\,(x - 2y + 3z + 1) + l(y + z) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Обозначая $\frac{l}{m} = u$, напишемъ уравненія (6) въ видѣ

$$u\,(x - 2y + 3z + 1) + (y + z) = 0,$$

$$(x - 2y + 3z + 1) + 3u\,(y + z) = 0,$$

или еще такъ

$$u.\, x + (1 - 2u)\, y + (1 + 3u)\, z + \ldots.. = 0,$$

$$x + (3u - 2)\, y + (3u + 3)\, z + \ldots.. = 0.$$

Условіе перпендикулярности имѣетъ видъ:

$$u.\, 1 + (3u - 2)\,(1 - 2u) + (3u + 3)\,(1 + 3u) = 0,$$

или

$$u^2 + \frac{20}{3}\, u + \frac{1}{3} = 0,$$

откуда

$$u = \frac{-10 \pm \sqrt{97}}{3}.$$

Слѣдовательно, плоскости симметріи опредѣляются уравненіями:

$$x - 2y + 3z + 1 + (-10 \pm \sqrt{97})\,(y + z) = 0.$$

Легко замѣтить, что эти плоскости взаимно перпендикулярны.

119. Подобно тому, какъ въ § 161 геом. двухъ измѣреній мы доказывали, что оси гиперболы дѣлятъ пополамъ углы между асимптотами, такъ и для гиперболическаго цилиндра можно доказать, разсужденіями, вполнѣ аналогичными приведеннымъ въ упомянутомъ параграфѣ, что плоскости симметріи дѣлятъ пополамъ двугранные углы между асимптотическими плоскостями.

120. Резюмируя сказанное о цилиндрахъ, мы видимъ, что выкладки тожественны съ тѣми, которыя мы производили въ геометріи двухъ измѣреній. Это слѣдуетъ изъ того, что всѣ разсужденія о линіяхъ второго порядка, тамъ приведенныя, могутъ быть разсматриваемы, какъ относящіяся къ цилиндрамъ, съ образующими, параллельными оси z-овъ, построенными на кривыхъ линіяхъ второго порядка, лежащихъ въ плоскости xy.

121. Переходимъ теперь къ изученію вида и свойствъ поверхностей второго рода, въ случаѣ, когда функція γ въ уравненіи

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0.$$

не приводится къ постоянному, а есть, при нашемъ способѣ разложенія на сумму квадратовъ, линейная функція относительно z. Въ этомъ случаѣ получаются поверхности, называется *параболоидами*.

122. Уравненіе параболоидовъ представляется въ видѣ

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0 \qquad (^*)$$

на безчисленное множество манеровъ: α, β, γ могутъ быть какія угодно линейныя функціи отъ координатъ, лишь бы только между этими функціями не существовало *тождественнаго* линейнаго соотношенія вида

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \rho = 0,$$

гдѣ λ, μ, ν, ρ нѣкоторыя числа; другими словами, необходимо, чтобы ни одна изъ функцій α, β, γ не могла быть выражена линейно черезъ другія. При такомъ разложеніи на сумму квадратовъ линейныхъ функцій, какое положено въ основу нашего изученія линій и поверхностей второго порядка, сказаннаго исключительнаго случая быть не можетъ, ибо α заключаетъ три координаты: x, y, z, β — только двѣ: y, z, а γ — только одну: z, и, слѣдовательно, α, заключая въ себѣ координату x, не можетъ тождественно равняться нѣко-

торой линейной функціи отъ β и γ, этой координаты не заключающихъ.

Въ случаѣ, если

$$\gamma = k_1\alpha + k_2\beta + k_3,$$

то ясно, что заданная поверхность будетъ не параболоидъ, а цилиндръ, ибо уравненіе (*) перепишется тогда такъ:

$$L\alpha^2 + \beta^2 + k_1\alpha + k_2\beta + k_3 = 0.$$

или

$$L\left(\alpha + \frac{k_1}{2L}\right)^2 + \left(\beta + \frac{k_2}{2}\right)^2 + k_3 - \frac{k_1^2}{4L} - \frac{k_2^2}{4} = 0.$$

Обозначая теперь линейныя функціи

$$\alpha + \frac{k_1}{2L}, \beta + \frac{k_2}{2} \text{ черезъ } \alpha_1, \beta_1,$$

а число

$$k_3 - \frac{k_1^2}{4L} - \frac{k_2^2}{4} \text{ черезъ } P_1,$$

получимъ уравненіе цилиндра

$$L\alpha_1^2 + \beta_1^2 + P_1 = 0.$$

Если заданы функціи α, β, γ, то легко увидѣть, существуетъ-ли между ними линейное соотношеніе: если $\gamma = k_1\alpha + k_2\beta + k_3$, то уравненіе $\gamma = 0$ опредѣляетъ плоскость, параллельную прямой пересѣченія двухъ плоскостей $\alpha = 0$, $\beta = 0$, въ случаѣ если k_3 не $= 0$, и плоскость, проходящую черезъ прямую $\alpha = 0$, $\beta = 0$ въ случаѣ $k_3 = 0$. Слѣдовательно функція γ лишь въ томъ случаѣ не выражается линейно черезъ двѣ другія α и β, когда плоскость $\gamma = 0$ пересѣкаетъ прямую $\alpha = 0$, $\beta = 0$ въ одной точкѣ, что имѣетъ мѣсто, очевидно, когда система уравненій

$$\alpha = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\beta = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\gamma = a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

даетъ для x, y, z одно рѣшеніе. Итакъ, между функціями α, β, γ тогда не существуетъ линейнаго соотношенія, если опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю.

123. Для изученія вида поверхности

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0$$

будемъ пересѣкать ее различными плоскостями. Разсмотримъ сначала сѣченія, получаемыя въ плоскостяхъ, параллельныхъ плоскостямъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Общее уравненіе плоскости, параллельной $\alpha = 0$, есть $\alpha = k$, гдѣ k есть какое нибудь постоянное число, не указывая какое именно. Въ сѣченіи поверхности плоскостью $\alpha = k$ получается линія, опредѣляемая системой уравненій

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0,\ \alpha + k. \qquad (*)$$

Видоизмѣняя систему (*), получимъ:

$$\beta^2 + (\gamma + Lk^2) = 0,\ \alpha = k.$$

Сумма линейной функціи γ съ постояннымъ числомъ Lk^2 будетъ новая линейная функція, которую назовемъ черезъ γ_1; тогда $\gamma + Lk^2 = \gamma_1$ и, слѣдовательно, уравненія кривой нашего сѣченія будутъ $\beta^2 + \gamma_1 = 0$, $\alpha = k$. Итакъ, въ сѣченіи получается такая же линія, какъ въ сѣченіи параболическаго цилиндра $\beta^2 + \gamma_1 = 0$ плоскостью $\alpha = k$, не параллельною образующимъ цилиндра, слѣдовательно, искомое сѣченіе есть парабола.

124. Мы сказали, что плоскость $\alpha = k$ не параллельна образующимъ цилиндра. Это видно изъ того, что, если бы существовало обратное, то α выражалось-бы черезъ β и γ_1 слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha = \lambda\beta + \mu\gamma_1 + \nu = \lambda\beta + \mu\ (\gamma + Lk^2) + \nu,$$

и, слѣдовательно, между функціями α, β, γ существовало-бы линейное соотношеніе.

125. Подобнымъ-же образомъ сѣченія плоскостями, параллельными плоскости $\beta = 0$, будутъ также параболы. Можно сказать, что,

вообще, сѣченіе поверхости

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0$$

всякою плоскостью $l\alpha + m\beta + n = 0$, параллельною прямой $\alpha = 0$, $\beta = 0$, будетъ парабола.

Въ самомъ дѣлѣ, сѣченіе опредѣляется уравненіями

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma + 0,\ l\alpha + m\beta + n + 0;$$

исключая изъ перваго уравненія β при помощи второго, получимъ

$$L\alpha^2 + \frac{l^2}{m^2}\alpha^2 + \frac{2\,ln}{m^2}\alpha + \frac{n^2}{m^2} + \gamma = 0.$$

Обозначая линейныя функціи

$$\alpha.\sqrt{L + \frac{l^2}{m^2}},\quad \gamma + \frac{2\,ln}{m^2}\alpha + \frac{n^2}{m^2}$$

черезъ α_1 и γ_1, мы получимъ уравненія сѣченія въ слѣдующемъ видѣ

$$\alpha_1{}^2 + \gamma_1 = 0,\ l\alpha + m\beta + n = 0$$

и, слѣдовательно, сѣченіе есть парабола, ибо оно получается черезъ пересѣченіе параболическаго цилиндра $\alpha_1{}^2 + \gamma_1 = 0$ плоскостью $l\alpha + m\beta + n = 0$, не параллельной образующимъ.

На основаніи этихъ параболическихъ сѣченій и сама поверхность называется *параболоидомъ*.

126. Разсмотримъ теперь сѣченія плоскостями, параллельными плоскостями $\gamma = 0$. Возьмемъ сначала саму плоскость $\gamma = 0$. Сѣченіе въ этой плоскости опредѣлится двумя уравненіями

$$\gamma = 0,\ L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0,$$

или такими:

$$\gamma = 0,\ L\alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

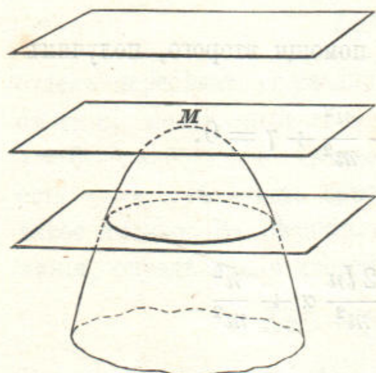
Второе изъ послѣднихъ уравненій при $L > 0$ распадается на два совмѣстныхъ:

$$\alpha = 0,\ \beta = 0$$

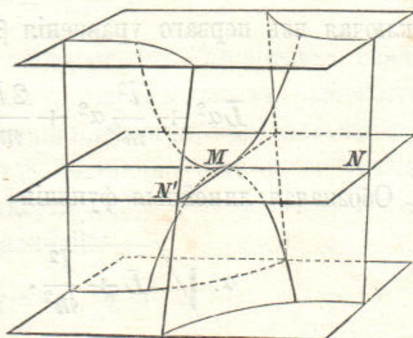
и, слѣдовательно, въ сѣченіи получается точка M (см. черт. 242), опредѣляемая какъ пересѣченіе трехъ плоскостей $\alpha = 0$, $\beta + 0$ $\gamma = 0$. Въ случаѣ-же $L = -\lambda^2$ уравненіе $-\lambda^2\alpha^2 + \beta^2 = 0$ распадается на два слѣдующихъ:

$$\beta + \lambda\alpha = 0 \text{ и } \beta - \lambda\alpha = 0$$

и, слѣдовательно, въ сѣченіи поверхности плоскостью $\lambda = 0$, полу-



Черт. 242.



Черт. 243.

чаются двѣ прямыя MN и MN' (см. черт. 243), которыя опредѣляются уравненіями

$$MN \ldots\ \gamma = 0,\ \beta + \lambda\alpha = 0,$$

$$MN' \ldots\ \gamma = 0,\ \beta - \lambda\alpha = 0.$$

Обѣ прямыя MN и MN' пересѣкаются въ точкѣ M, опредѣляемой уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Возьмемъ теперь нѣкоторую плоскость $\gamma = k$, параллельную плоскости $\gamma = 0$. Кривая сѣченія плоскостью $\gamma = 0$ опредѣляется уравненіями

$$\gamma = k,\quad L\alpha^2 + \beta + \gamma = 0$$

или такими:

$$\gamma = k,\ L\alpha^2 + \beta^2 + k = 0.$$

Послѣднія два уравненія опредѣляютъ линію пересѣченія плоскостью $\gamma = k$ нѣкотораго цилиндра $L\alpha^2 + \beta^2 + k = 0$. При $L > 0$

уравненіе $L\alpha^2 + \beta^2 + k = 0$ опредѣляетъ эллиптическій цилиндръ (если $k < 0$), а потому при $L > 0$ поверхность $L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0$ пересѣкается плоскостями $\gamma = k$ по эллипсамъ, если только $k < 0$; если же $k > 0$, то плоскость $\gamma = k$ не пересѣкаетъ поверхности (см. черт. 242).

При $L < 0$ уравненіе $L\alpha^2 + \beta^2 + k = 0$ опредѣляетъ гиперболическій цилиндръ и, слѣдовательно, плоскости $\gamma = k$ пересѣкаютъ поверхность

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0$$

по гиперболѣ (см. черт. 243). На этомъ основаніи параболоидъ

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0$$

при $L > 0$ называется *эллиптическимъ*, а при $L < 0$ *гиперболическимъ*.

127. *Лемма*. Если три линейныя функціи α, β, γ не связаны между собою тождественнымъ линейнымъ соотношеніемъ, то уравненіе всякой плоскости соотвѣтственнымъ подборомъ коэффиціентовъ l, m, n, q можетъ быть приведено къ виду:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + q = 0 \,. \tag{*}$$

Эта лемма вполнѣ соотвѣтствуетъ леммѣ, доказанной въ § 110 геометріи двухъ измѣреній.

Пусть уравненіе заданной плоскости будетъ

$$A_0 x + B_0 y + C_0 z + D_0 = 0 \,, \tag{1}$$

требуется привести его къ виду (*). На основаніи условія, три плоскости

$$\alpha = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \,,$$

$$\beta = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \,,$$

$$\gamma = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

пересѣкаются въ одной точкѣ, координаты которой получаются черезъ рѣшеніе этихъ трехъ уравненій относительно x, y, z. Согласно условію, для x, y, z получаются вполнѣ опредѣленныя значенія.

Ясно, что уравненія

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = \alpha\,,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = \beta\,,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = \gamma\,,$$

въ которыхъ во вторыхъ частяхъ вмѣсто нулей подставлены буквы α, β, γ, допускаютъ также опредѣленное рѣшеніе относительно x, y, z, причемъ эти послѣдніе выражаются линейными функціями отъ α, β, γ.

Итакъ, получаемъ

$$x = r_1\alpha + s_1\beta + t_1\gamma + u_1\,,$$

$$y = r_2\alpha + s_2\beta + t_2\gamma + u_2\,,$$

$$z = r_3\alpha + s_3\beta + t_3\gamma + u_3\,.$$

Подставляя эти выраженія x, y, z въ уравненіе (1), представимъ его въ видѣ (*).

Въ частномъ случаѣ, когда разложеніе на сумму квадратовъ произведено такъ, какъ это положено въ основаніе нашей теоріи, а именно: функція α заключаетъ три координаты: x, y, z, функція β — только двѣ, напримѣръ y, z, а функція γ — одну, напримѣръ: z, то уравненіе

$$\gamma = Dz + E$$

позволяетъ z выразить черезъ γ. Вставляя это значеніе z въ уравненіе

$$\beta = Gy + Hz + K,$$

выразимъ y черезъ β и γ и, подставляя, наконецъ, въ уравненіе

$$\alpha = Ax + By + Cz + D$$

выраженіе y и z, выразимъ также послѣднюю координату x черезъ α, β, γ. Подставляя полученныя выраженія для x, y, z въ уравненіе (1), напишемъ его въ видѣ (*).

Напримѣръ, требуется представить плоскость

$$2x - 4y + 7z - 1 = 0$$

въ видѣ (*), если

$$\alpha = 3x - y + z - 1\,,\ \ \beta = y + 2z,\ \ \gamma = z - 3\,.$$

Изъ послѣднихъ равенствъ имѣемъ:

$$z = \gamma + 3\,,\ \ y = \beta - 2\gamma - 6,\ \ x = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta - \gamma - \frac{8}{3}\,.$$

Подставляя послѣднія выраженія въ уравненіе

$$2x - 4y + 7z - 1 = 0\,,$$

получимъ

$$2\alpha - 10\beta + 39\gamma + 116 = 0\,.$$

128. Найдемъ теперь уравненіе діаметральныхъ плоскостей параболоида.

Уравненіе хордъ любого направленія, не параллельнаго направленію $\alpha = 0$, $\beta = 0$, могутъ быть написаны въ такомъ видѣ:

$$\alpha = k\gamma + l,\quad \beta = k_1\gamma + l_1. \tag{1}$$

Въ самомъ дѣлѣ, одна изъ разсматриваемыхъ хордъ имѣетъ уравненія:

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma + q_1 = 0,\ \ l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma + q_2 = 0\,.$$

Эта система черезъ рѣшеніе относительно буквъ α и β можетъ быть приведена къ виду (1).

Мы будемъ получать, очевидно, всевозможныя параллельныя между собою хорды, измѣняя l и l_1 и оставляя безъ перемѣны k и k_1. Точки пересѣченія параболоида съ прямою (1) опредѣлятся изъ уравненій

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0\,,\ \ \alpha = k\gamma + l,\ \ \beta = k_1\gamma + l_1\,.$$

Эти уравненія можно написать въ такомъ видѣ:

$$\alpha = k\gamma + l\,,\ \ \beta = k_1\gamma + l_1\,,$$

$$(Lk^2 + k_1{}^2)\gamma^2 + 2\left(Lkl + k_1 l_1 + \frac{1}{2}\right)\gamma + Ll^2 + l_1{}^2 = 0\,,$$

или еще такъ:

$$\alpha = k\gamma + l,\ \ \beta = k_1\gamma + l_1,\ \ \gamma = -\frac{Lkl + k_1l_1 + \frac{1}{2}}{Lk^2 + k_1^2} \pm \sqrt{R},$$

гдѣ R нѣкоторое выраженіе изъ коэффиціентовъ L, k, k_1, l, l_1. Средина хорды опредѣлится, очевидно, уравненіями

$$(1)\qquad \alpha = k\gamma + l,\ \beta = k_1\gamma + l_1,\ \gamma = -\frac{Lkl + k_1l_1 + \frac{1}{2}}{Lk^2 + k_1^2}.\ (2)$$

Мѣняя l и l_1, будемъ получать средины различныхъ хордъ, параллельныхъ прямой ($\alpha = k\gamma$, $\beta = k_1\gamma$). Уравненіе геометрическаго мѣста срединъ хордъ мы получимъ, исключая изъ трехъ уравненій (1) и (2) два произвольныхъ параметра l и l_1. Получаемое въ результатѣ уравненіе будетъ уравненіемъ діаметральной плоскости, дѣлящій пополамъ хорды, параллельныя прямой ($\alpha = k\gamma$, $\beta = k_1\gamma$).

Сдѣлаемъ сказанное исключеніе. Уравненіе (2) можетъ быть написано такъ:

$$\gamma(Lk^2 + k_1^2) + Lkl + k_1l_1 + \frac{1}{2} = 0,$$

или

$$Lk(\gamma k + l) + k_1(\gamma k_1 + l_1) + \frac{1}{2} = 0.$$

Принимая въ соображеніе уравненіе (1), мы получимъ результатъ исключенія въ такомъ видѣ:

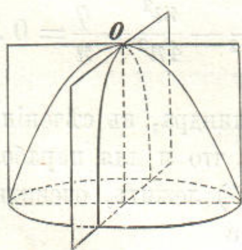
$$Lk\alpha + k_1\beta + \frac{1}{2} = 0. \qquad (3)$$

Послѣднее уравненіе и есть уравненіе искомой діаметральной плоскости. Уравненіе (3) показываетъ, что всѣ діаметральныя плоскости, параллельны прямой ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) и, слѣдовательно, пересѣкаютъ параболоидъ по параболамъ.

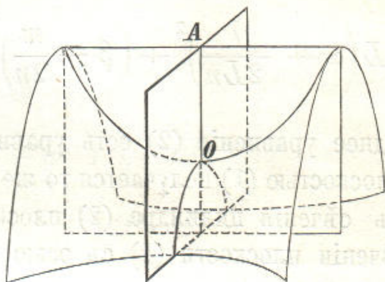
Для полученія такъ называемой главной діаметральной плоскости или плоскости симметріи надо выразить условія перпендикулярности плоскости (3) къ соотвѣтственнымъ хордамъ (1). Условія перпендикулярности дадутъ два уравненія для опредѣленія коэффиціентовъ k

и k_1, изъ которыхъ получаются для параболоидовъ двѣ пары рѣшеній для k и k_1, что показываетъ, что параболоидъ имѣетъ двѣ плоскости симметріи (см. черт. 244).

129. Прямая OA пересѣченія двухъ главныхъ діаметральныхъ плоскостей есть такъ называемая ось параболоида (см. черт. 245),



Черт. 244.



Черт. 245.

т. е. діаметръ, перпендикулярный къ соотвѣтствующимъ сѣченіямъ. Выведемъ общее уравненіе діаметра для сѣченій, параллельныхъ нѣкоторой плоскости

$$A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0 .$$

Уравненіе данной плоскости можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + q = 0 \qquad (1)$$

(см. § 127). Условіе же, чтобы плоскость (1) не была параллельна направленію ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), приведетъ просто къ тому, чтобы не считать коэффиціентъ n равнымъ нулю. Итакъ, разсмотримъ сѣченіе параболоида плоскостью (1), причемъ n не равно нулю. Мы знаемъ уже, что это сѣченіе будетъ эллипсъ для эллиптическаго параболоида и гипербола для гиперболическаго. Найдемъ центръ сѣченія параболоида плоскостью (1), а затѣмъ, мѣняя коэффиціентъ q и оставляя другіе коэффиціенты l, m, n безъ перемѣны, будемъ получать центры различныхъ сѣченій, образованныхъ параллельными плоскостями. Сѣченіе плоскостью (1) опредѣляется двумя уравненіями (A) и (1); исключая изъ уравненія (A) функцію γ при помощи

уравненія (1), получимъ:

$$L\alpha^2 + \beta^2 - \frac{l}{n}\alpha - \frac{m}{n}\beta - \frac{q}{n} = 0\,.$$

Такое исключеніе сдѣлать всегда возможно, ибо коэффиціентъ n не нуль. Послѣднее уравненіе легко написать въ такомъ видѣ:

$$L\left(\alpha - \frac{l}{2Ln}\right)^2 + \left(\beta - \frac{m}{2n}\right)^2 - \frac{l^2}{4Ln^2} - \frac{m^2}{4n^2} - \frac{q}{n} = 0\,. \quad (2)$$

Послѣднее уравненіе (2) есть уравненіе цилиндра, въ сѣченіи котораго плоскостью (1) получается то же сѣченіе, что и для параболоида. Центръ сѣченія цилиндра (2) плоскостью (1) лежитъ, очевидно, на пересѣченіи плоскости (1) съ осью цилиндра

$$\alpha - \frac{l}{2Ln} = 0\,,\ \ \beta - \frac{m}{2n} = 0\,.$$

Итакъ, центръ сѣченія параболоида плоскостью (1) опредѣляется системою трехъ уравненій

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + q = 0\,,\ \ \alpha = \frac{l}{2Ln}\,,\ \ \beta = \frac{m}{2n}\,.$$

Для опредѣленія искомаго геометрическаго мѣста центровъ, т. е. для опредѣленія уравненій діаметра, необходимо исключить параметръ q изъ трехъ приведенныхъ выше уравненій. Два же послѣднихъ уравненія не содержатъ параметра q, а потому ихъ можно разсматривать, какъ результатъ исключенія, что даетъ для искомаго діаметра слѣдующія уравненія:

$$\alpha = \frac{l}{2Ln}\,,\ \ \beta = \frac{m}{2n}\,.$$

Послѣднія уравненія показываютъ намъ, что всѣ діаметры параллельны нѣкоторому направленію ($\alpha = 0$, $\beta = 0$). Для нахожденія оси придется опредѣлить два отношенія $\frac{l}{n}$ и $\frac{m}{n}$ изъ двухъ условій перпендикулярности прямой ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) съ плоскостью $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$.

Эти условія линейны относительно l, m, n, а потому изъ этихъ двухъ условій мы получимъ для отношеній $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$ одну пару значеній λ_0, μ_0. Такъ что уравненіе единственной оси параболоида получится въ такомъ видѣ:

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{2L}, \quad \beta = \frac{\mu_0}{2}.$$

130. Приведенныя разсужденія претерпѣваютъ исключеніе, а именно, когда уравненія заданной хорды

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + q = 0,$$

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma + q_1 = 0$$

не допускаютъ рѣшенія относительно α и β, какъ мы это предполагали въ § 128, что имѣетъ мѣсто, очевидно, когда $lm_1 - ml_1 = 0$. Въ этомъ случаѣ нахожденіе діаметральной плоскости упрощается, ибо уравненіе хорды можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\beta = k\alpha + l, \ \gamma = l_1 \ \text{(См. § 60)}.$$

Оставляя k безъ перемѣны и мѣняя l и l_1, будемъ получать параллельныя хорды даннаго направленія. Точки встрѣчи хорды съ поверхностью параболоида опредѣляются при помощи уравненія:

$$L\alpha^2 + k^2\alpha^2 + 2kl\alpha + l^2 + l_1 = 0,$$

откуда

$$\alpha = -\frac{kl}{L + k^2} \pm \sqrt{R}.$$

Средины хордъ опредѣлятся уравненіемъ

$$\alpha = -\frac{kl}{L + k^2},$$

которое можно переписать такъ:

$$L\alpha + k(k\alpha + l) = 0;$$

отсюда получаемъ окончательное уравненіе діаметральной плоскости

въ видѣ:

$$L\alpha + k\beta = 0.$$

131. При опредѣленіи оси параболоида намъ приходилось разсматривать условія перпендикулярности діаметра къ соотвѣтственнымъ плоскостямъ. Пусть будетъ

$$\alpha = Ax + By + Cz + D,\ \beta = by + cz + d,\ \gamma = \varepsilon z + \eta.$$

Приходится разсматривать условія перпендикулярности плоскости

$$l(Ax + By + Cz + D) + m(by + cz + d) + n(\varepsilon z + \eta) = 0,$$

съ прямою

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ by + cz + d = 0. \qquad (*)$$

Чтобы написать условіе перпендикулярности указанной прямой съ плоскостью

$$lAx + (lB + mb)y + (lC + mc + n\varepsilon)z + lD + md + n\eta = 0,$$

выразимъ два условія перпендикулярности послѣдней плоскости съ обѣими плоскостями (*), опредѣляющими данную прямую. Эти условія имѣютъ видъ:

$$lA^2 + B(lB + mb) + C(lC + mc + n\varepsilon) = 0,$$

$$b(lB + mb) + c(lC + mc + n\varepsilon) = 0.$$

Изъ этихъ двухъ уравненій, однородныхъ первой степени относительно l, m, n, можно будетъ получить одну опредѣленную пару значеній для отношеній $\frac{l}{n}$ и $\frac{m}{n}$, если только не равно нулю выраженіе (см. прибавленіе).

$$(A^2 + B^2 + C^2)(b^2 + c^2) - (Bb + Cc)^2 = 0. \qquad (**)$$

Послѣднее же равенство можно переписать такъ:

$$A^2(b^2 + c^2) + (Bc - Cb)^2 = 0.$$

Для того, чтобы удовлетворить послѣднему равенству, надо оба

члена приравнять нулю отдѣльно:

$$A^2(b^2+c^2)=0,\ Bc-Cb=0.$$

A не можетъ равняться нулю, ибо тогда въ уравненіе не входила бы координата x и, слѣдовательно, оно опредѣляло бы цилиндръ, образующая котораго параллельна оси x-овъ, что противорѣчитъ предположенію. Слѣдовательно, долженъ равняться нулю множитель (b^2+c^2); онъ же будетъ равенъ нулю, когда одновременно обращаются въ нуль b и c. Этотъ случай также не можетъ имѣть мѣста, ибо тогда получался бы не параболоидъ, а параболическій цилиндръ.

Итакъ, мы видимъ, что уравненіе (**) не удовлетворяется, и, слѣдовательно, для отношеній $\frac{l}{n}$ и $\frac{m}{n}$ получаемъ всегда опредѣленную пару численныхъ значеній, а потому параболоидъ имѣетъ всегда одну ось симметріи, опредѣляемую уравненіями:

$$\alpha=\frac{l}{2Ln},\ \beta=\frac{m}{2n}.$$

132. Въ § 130 мы дополнили наши разсужденія для нахожденія главныхъ діаметральныхъ плоскостей, приведенныя въ § 128, гдѣ указано было нами, что такихъ плоскостей каждый параболоидъ имѣетъ двѣ, ибо условія перпендикулярности даютъ для произвольныхъ параметровъ k и k_1 уравненія діаметральной плоскости двѣ системы значеній. Существуетъ, однако, одинъ видъ параболоидовъ, а именно параболоидъ вращенія, происходящій отъ вращенія параболы вокругъ ея оси, который имѣетъ не одну пару, а безчисленное множество плоскостей симметріи, ибо каждая плоскость, проходящая черезъ ось вращенія, будучи такъ называемымъ *меридіаномъ* поверхности вращенія, есть въ то же время для этой поверхности плоскость симметріи.

133. Покажемъ, когда сказанное обстоятельство будетъ имѣть мѣсто. Будемъ разсуждать нѣсколько иначе, чѣмъ мы это дѣлали въ § 128. Введемъ нѣкоторую вспомогательную величину u, причемъ координаты точки, лежащей на прямой, будемъ выражать въ функціяхъ отъ этого u. Такъ какъ уравненія всякой прямой въ пространствѣ, рѣшеніемъ относительно двухъ изъ числа координатъ (см. § 60), могутъ быть представлены въ такомъ видѣ, что двѣ изъ числа этихъ

координатъ, напримѣръ, x и y, выражены линейно черезъ третью, z, то зададимъ z въ видѣ нѣкоторой, совершенно произвольной функціи первой степени отъ u, напримѣръ,

$$z = gu + h.$$

Подставляя сказанное выраженіе z въ выраженія x и y, мы ихъ представимъ въ подобномъ же видѣ:

$$x = g_1 u + h_1, \; y = g_2 u + h_2.$$

Понятно, что и всякая линейная функція первой степени отъ координатъ представится въ такомъ же видѣ:

$$Gu + H.$$

Итакъ, всякая прямая линія въ пространствѣ можетъ быть задаваема тремя уравненіями:

$$x = g_1 u + h_1, \; y = g_2 u + h_2, \; z = gu + h, \qquad (*)$$

или же, болѣе общимъ образомъ, тремя слѣдующими:

$$\alpha = l\,u + \lambda, \; \beta = m\,u + \mu, \; \gamma = n\,u + \nu. \qquad (**)$$

Каждому значенію u соотвѣтствуетъ на прямой вполнѣ опредѣленная точка, ибо, если уравненія прямой заданы въ видѣ (*), то они даютъ возможность прямо по значенію u вычислить соотвѣтственныя значенія трехъ координатъ. Подобнымъ же образомъ и система (**) опредѣляетъ по данному значенію u соотвѣтственное значеніе координатъ, ибо, согласно нашему предположенію, между функціями α, β, γ не существуетъ линейнаго соотношенія. Что касается коэффиціентовъ g, g_1, g_2, h, h_1, h_2 въ уравненіи (*), то ихъ геометрическій смыслъ очевиденъ изъ того соображенія, что систему (*) можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{x - h_1}{g_1} = \frac{y - h_2}{g_2} = \frac{z - h}{g} = u.$$

Если g_1, g_2, g будутъ косинусами угловъ, то перемѣнное u будетъ представлять взятое съ тѣмъ или другимъ знакомъ разстояніе точки отъ начальной (h_1, h_2, h). Итакъ, будемъ брать уравненія

хордъ въ видѣ (**). Два значенія перемѣннаго u, соотвѣтствующія точкамъ пересѣченія хорды (**) съ поверхностью параболоида, опредѣлятся изъ квадратнаго уравненія:

$$L(lu+\lambda)^2+(mu+\mu)^2+(nu+\nu)=0. \tag{1}$$

Что касается коэффиціентовъ l, m, n, то ихъ можно называть угловыми, ибо, если мы не будемъ мѣнять въ уравненіяхъ (**) эти коэффиціенты, а мѣнять коэффиціенты λ, μ, ν, то будемъ получать различныя хорды, параллельныя между собою. Такъ, напримѣръ, одну изъ числа этихъ параллельныхъ хордъ получимъ, полагая $\lambda=0$, $\mu=0$, $\nu=0$. Эта хорда, опредѣляясь уравненіями

$$\alpha=lu,\ \beta=mu,\ \gamma=nu,$$

проходитъ черезъ точку, лежащую на параболоидѣ и опредѣляемую уравненіями $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$.

Квадратное уравненіе относительно u (1) можетъ быть переписано въ видѣ:

$$(Ll^2+m^2)u^2+2\left(Ll\lambda+m\mu+\frac{n}{2}\right)u+L\lambda^2+\mu^2+\nu=0.$$

Рѣшая это уравненіе относительно u, получаемъ:

$$u=-\frac{Ll\lambda+m\mu+\frac{n}{2}}{Ll^2+m^2}\pm\sqrt{R}.$$

Для средины хорды получимъ значеніе u въ видѣ:

$$u=-\frac{Ll\lambda+m\mu+\frac{n}{2}}{Ll^2+m^2}.$$

134. Почему это такъ—ясно изъ слѣдующихъ соображеній. Положимъ, что концы хорды опредѣляются значеніями u_1 и u_2. Черезъ эти концы проходятъ двѣ параллельныя плоскости

$$\alpha=lu_1+\lambda,\ \alpha=lu_2+\lambda. \tag{2}$$

Кромѣ этой пары, еще двѣ пары плоскостей проходятъ черезъ

концы хорды, но ихъ мы не будемъ разсматривать, ибо все, что будетъ сказано относительно пары плоскостей (2), будетъ также относиться и къ тѣмъ. Средина хорды опредѣлится въ пересѣченіи этой хорды съ плоскостью, параллельною плоскостямъ (2) и лежащею по срединѣ между ними. Уравненіе же такой плоскости имѣетъ видъ:

$$\alpha = \frac{(lu_1 + \lambda) + (lu_2 + \lambda)}{2},$$

(см. § 59). Это уравненіе можно переписать такъ:

$$\alpha = l\frac{u_1 + u_2}{2} + \lambda.$$

Итакъ, мы видимъ, что если концы хорды опредѣляются значеніями u_1 и u_2 параметра u, то средина хорды опредѣляется значеніемъ этого параметра, равнымъ среднему ариѳметическому $\frac{u_1 + u_2}{2}$. Итакъ, мы дѣйствительно были въ правѣ отбросить, для нахожденія средины хорды, $\sqrt{R}$.

135. Возвращаясь къ нашему разсужденію, мы замѣчаемъ, что придется исключить, для полученія геометрическаго мѣста срединъ хордъ, параллельныхъ между собою и, слѣдовательно, получаемыхъ при измѣненіи величины коэффиціентовъ λ, μ, ν, эти послѣдніе коэффиціенты при помощи уравненій (**) § 133 и уравненія

$$u = -\frac{Ll\lambda + m\mu + \frac{n}{2}}{Ll^2 + m^2}.$$

Это послѣднее можно переписать въ такомъ видѣ:

$$u(Ll^2 + m^2) + Ll\lambda + m\mu + \frac{n}{2} = 0,$$

или

$$Ll(lu + \lambda) + m(mu + \mu) + \frac{n}{2} = 0,$$

но, на основаніи уравненій (**), это послѣднее уравненіе, по исключеніи λ, μ, ν, обращается въ уравненіе діаметральной плоскости:

$$Ll\alpha + m\beta + \frac{n}{2} = 0,$$

дѣлящей пополамъ хорды, параллельныя хордѣ

$$\frac{\alpha}{l}=\frac{\beta}{m}=\frac{\gamma}{n}.$$

Разсужденія, приведенныя нами въ § 128, относились къ предположенію $l=k$, $m=k_1$, $n=1$ и, понятно, допускали, какъ исключительный случай, тотъ, при которомъ n должно равняться нулю.

136. Обращаемся теперь къ опредѣленію коэффиціентовъ l, m, n такимъ образомъ, чтобы діаметральная плоскость была перпендикулярна къ соотвѣтственнымъ хордамъ, другими словами, къ опредѣленію плоскостей симметріи.

Пусть функціи α, β, γ имѣютъ видъ, указанный въ § 131. Требуется написать условія параллельности плоскости

$$Ll(Ax+By+Cz+D)+m(by+cz+\partial)+\frac{n}{2}=0 \qquad (1)$$

съ прямою

$$\left.\begin{aligned} n(Ax+By+Cz+D)-l(\varepsilon z+\eta)=0\,, \\ n(by+cz+\partial)-m(\varepsilon z+\eta)=0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Уравненіе (1) можетъ быть написано въ видѣ

$$LlAx+(LlB+mb)y+(LlC+mc)z+\ldots=0,$$

уравненія же (2) могутъ быть переписаны такъ:

$$\frac{x-x_0}{n(Bc-bC)+\varepsilon(bl-mB)}=\frac{y-y_0}{Am\varepsilon-Anc}=\frac{z-z_0}{Abn}.$$

Отсюда условія перпендикулярности будутъ:

$$LlA=\rho\left[n(Bc-bC)+\varepsilon(bl-mB)\right],$$

$$LlB+mb=\rho\,(Am\varepsilon-Acn)\,,$$

$$LlC+mc=\rho\,Abn,$$

гдѣ ρ нѣкоторая, пока произвольная, величина.

Эти уравненія могутъ быть написаны такъ:

$$\left.\begin{aligned} l(LA-\varepsilon b\rho)+mB\varepsilon\rho+n\rho(bC-Bc)&=0\\ lLB+m(b-A\varepsilon\rho)+nAc\rho&=0\\ lLC+mc-nAb\rho&=0\,. \end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Исключая изъ этихъ уравненій три величины l, m, n, мы получимъ квадратное уравненіе для опредѣленія ρ. Если мы обозначимъ $A\varepsilon\rho$ черезъ ξ, то получимъ для предѣленія ξ такое квадратное уравненіе

$$\xi^2-\left[L(A^2+B^2+C^2)+b^2+c^2\right]\xi+$$
$$+L\left[A^2(b^2+c^2)+(bC-Bc)^2\right]=0\,.$$

Это уравненіе имѣетъ всегда два вещественныхъ корня, ибо

$$\left[L(A^2+B^2+C^2)+b^2+c^2\right]^2-4L\left[A^2(b^2+c^2)+(bC-Bc)^2\right]>0,$$

такъ какъ это выраженіе можно представить въ такомъ видѣ:

$$(LM+N)^2-4LR\,,\qquad (*)$$

гдѣ

$$M=A^2+B^2+C^2,\ N=b^2+c^2,\ R=A^2(b^2+c^2)+$$
$$+(bC-Bc)^2.$$

Но выраженіе (*) можно представить окончательно такъ:

$$\left(LM+N-2\frac{R}{M}\right)^2+4\frac{R}{M^2}(MN-R)\,,$$

но

$$MN-R=(bB+cC)^2;$$

слѣдовательно, квадратное уравненіе для ξ даетъ два дѣйствительныхъ значенія для ξ, а также, слѣдовательно, для ρ. Каждому значенію ρ соотвѣтствуетъ плоскость симметріи, которыхъ, вообще говоря, будетъ двѣ.

Что касается опредѣленія коэффиціентовъ l, m, n плоскости симметріи, или, лучше сказать, двухъ отношеній $\frac{l}{n}$ и $\frac{m}{n}$, то, когда ρ найдено, для опредѣленія этихъ отношеній могутъ служить любыя два изъ уравненій (1). Въ случаѣ параболоида вращенія эти коэффиціенты остаются неопредѣленными. Такъ, напримѣръ, можно написать такую пропорцію для коэффиціентовъ l, m, n, взявъ два послѣднихъ изъ уравненій (1). Получаемъ:

$$\frac{l}{A\rho[Ab\varepsilon\rho-(b^2+c^2)]}=\frac{m}{LA\rho(Bb+Cc)}=\frac{n}{L(Bc-Cb+Ac\varepsilon\rho)}.$$

Подставляя соотвѣтственное выраженіе для ρ черезъ ξ, получимъ:

$$\frac{l\varepsilon}{\xi^2-\xi(b^2+c^2)}=\frac{m\varepsilon}{L\xi(Bb+Cc)}=\frac{n}{L[b(Bc-Cb)+C\xi]}.$$

На основаніи квадратнаго уравненія для ξ первое отношеніе можетъ быть переписано въ такомъ видѣ:

$$\frac{l\varepsilon}{L[(A^2+B^2+C^2)\xi-A^2(b^2+c^2)-(Bc-Cb)^2]}.$$

Обозначая для краткости знаменателя послѣдней дроби черезъ $L[\xi]$, получимъ уравненія главныхъ діаметральныхъ плоскостей, подставляя въ уравненіе

$$Ll\varepsilon\alpha+m\varepsilon\beta+\frac{n\varepsilon}{2}=0$$

вмѣсто $l\varepsilon$, $m\varepsilon$, n числа имъ пропорціональныя. Получается уравненіе

$$L\alpha[\xi]+\beta(Bb+Cc)\xi+\frac{\varepsilon}{2}[b(Bc-Cb)+C\xi]=0\,,$$

которое даетъ обѣ діаметральныя плоскости, если вмѣсто ξ подставлять оба корня квадратнаго уравненія.

137. Докажемъ, что двѣ главныя діаметральныя плоскости взаимно перпендикулярны и пересѣкаются по оси симметріи поверхности.

Обозначая черезъ ξ_0 и ξ_1 два корня квадратнаго уравненія, на-

пишемъ уравненія главныхъ діаметральныхъ плоскостей въ такомъ видѣ:

$$L(Ax+By+Cz)\,[\xi_0]+(by+cz)\,(Bb+Cc)\,\xi_0+\mathfrak{A}=0\,,$$

$$L(Ax+By+Cz)\,[\xi_1]+(by+cz)\,(Bb+Cc)\,\xi_1+\mathfrak{B}=0\,,$$

Условіе перпендикулярности будетъ имѣть видъ:

$$L^2A^2[\xi_0][\xi_1]+$$

$$+\{BL[\xi_0]+b\xi_0(Bb+Cc)\}\,.\,\{BL[\xi_1]+b\xi_1(Bb+Cc)\}+$$

$$+\{LC[\xi_0]+c\xi_0(Bb+Cc)\}\,.\,\{LC[\xi_1]+c\xi_1(Bb+Cc)\}=0\,,$$

или

$$L^2[\xi_0][\xi_1](A^2+B^2+C^2)+$$

$$+L\{[\xi_0]\xi_1+[\xi_1]\xi_0\}(Bb+Cc)^2+$$

$$+\xi_0\xi_1(b^2+c^2)(Bb+Cc)^2=0\,. \qquad (1)$$

Но на основаніи квадратнаго уравненія для ξ сумма корней $\xi_0+\xi_1$ и ихъ произведеніе $\xi_0\xi_1$ выражаются по формуламъ:

$$\xi_0+\xi_1=L(A^2+B^2+C^2)+b^2+c^2,$$

$$\xi_0\xi_1=L\,[A^2(b^2+c^2)+(Bc-bC)^2]\,.$$

Отсюда легко вычислить $[\xi_0]\,.\,[\xi_1]$:

$$[\xi_0]\,.\,[\xi_1]=(A^2+B^2+C^2)^2\xi_0\xi_1-$$

$$-(\xi_0+\xi_1)\,(A^2+B^2+C^2)[\,A^2(b+c^2)+(Bc-bC)^2]+$$

$$+[\,A^2(b^2+c^2)+(Bc-Cb)^2]^2.$$

Подобнымъ-же образомъ можно вычислить и $[\xi_0]\,.\,\xi_1+[\xi_1]\,.\,\xi_0$. Это выраженіе равно

$$2(A^2+B^2+C^2)\,\xi_0\xi_1-(\xi_0+\xi_1)\,[\,A^2(b^2+c^2)+(Bc-Cb)^2]\,.$$

Подставляя вмѣсто $\xi_0+\xi_1$ и $\xi_0\xi_1$ ихъ выраженія, замѣчаемъ, что равенство (1) обращается въ тождество, что показываетъ, что глав-

ныя діаметральныя плоскости дѣйствительно взаимно-перпендикулярны.

138. Линія пересѣченія двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей симметріи опредѣлится, очевидно, изъ тѣхъ двухъ уравненій, которыя получаются по уравненію

$$L\alpha[\xi] + \beta(Bb + Cc)\xi + \frac{\varepsilon}{2}[b(Bc - Cb) + C\xi] = 0,$$

которое можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$\mathfrak{M}\xi + \mathfrak{N} = 0,$$

приравнивая нулю выраженія $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Эти два уравненія будутъ имѣть видъ:

$$L\alpha[A^2(b^2 + c^2) + (Bc - Cb)^2] - \frac{\varepsilon b}{2}(Bc - Cb) = 0,$$

$$L\alpha(A^2 + B^2 + C^2) + \beta(Bb + Cc) + \frac{C\varepsilon}{2} = 0.$$

Рѣшая эту систему относительно α и β, получимъ, обозначая черезъ R выраженіе

$$A^2(b^2 + c^2) + (Bc - Cb)^2,$$

слѣдующія уравненія линіи пересѣченія двухъ плоскостей симметріи:

$$\alpha = \frac{\varepsilon b(Bc - Cb)}{2LR}, \quad \beta = \frac{\varepsilon[B(Cb - Bc) - cA^2]}{2R}.$$

Не трудно убѣдиться, что послѣднія уравненія опредѣляютъ какъ разъ ось симметріи, ибо мы получимъ эти уравненія, проведя до конца выкладку § 131, что предоставляемъ сдѣлать читателю, ибо это не представляетъ никакихъ затрудненій.

139. Исключеніе коэффиціентовъ l, m, n изъ уравненій (1) параграфа 136 весьма просто совершается при помощи теоріи опредѣлителей. Получается уравненіе

$$\rho \cdot \begin{vmatrix} LA - \varepsilon b\rho, & B\varepsilon\rho, & bC - Bc \\ LB, & b - A\varepsilon\rho, & Ac \\ LC, & c, & -Ab \end{vmatrix} = 0.$$

Сокращая на ρ и подставляя ξ вмѣсто ρ, получаемъ квадратное уравненіе для ξ, приведенное уже въ § 136.

140. Пояснимъ теорію параболоидовъ примѣрами.

Примѣръ 1.

$$(x-2y+3z-2)^2-4(y+z-1)^2+2z-3=0.$$

Такъ какъ коэффиціенты при квадратахъ съ разными знаками, то, слѣдовательно, это уравненіе опредѣляетъ гиперболическій параболоидъ. Дѣля уравненіе на -4, получаемъ

$$-\frac{1}{4}(x-2y+3z-2)^2+(y+z-1)^2-\frac{1}{2}z+\frac{3}{4}=0,$$

такъ что имѣемъ:

$$L=-\frac{1}{4},\ \alpha=x-2y+3z-2,\ \beta=y+z-1,\ \gamma=-\frac{z}{2}+\frac{3}{4}.$$

Найдемъ діаметральную плоскость, дѣлящую пополамъ хорды, параллельныя прямой

$$\left.\begin{aligned} x-y+2=0 \\ 2x+z-1=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Перепишемъ послѣднія уравненія, введя въ нихъ α, β, γ вмѣсто x, y, z. Изъ выраженій для α, β, γ получаемъ:

$$z=\frac{3}{2}-2\gamma,\ y=\beta+2\gamma-\frac{1}{2},\ x=\alpha+2\beta+10\gamma-\frac{7}{2}.$$

Подставляя въ уравненіе (1), получимъ:

$$\alpha+\beta+8\gamma-1=0,$$

$$2\alpha+4\beta+18\gamma-\frac{13}{2}=0.$$

Эту систему можно рѣшить относительно α и β. Получаемъ:

$$\alpha=-7\gamma-\frac{5}{4},\ \beta=-\gamma+\frac{9}{4}.$$

Слѣдовательно, $k=-7$, $k_1=-1$. Діаметральная плоскость

имѣетъ уравненіе:

$$Lk\alpha + k_1\beta + \frac{1}{2} = 0,$$

или

$$-\frac{1}{4}(-7)\alpha + (-1)\beta + \frac{1}{2} = 0,$$

откуда

$$7\alpha - 4\beta + 2 = 0,$$

или окончательно

$$7(x - 2y + 3z - 2) - 4(y + z - 1) + 2 = 0.$$

Найдемъ теперь діаметръ, соотвѣтствующій плоскостямъ, параллельнымъ плоскости:

$$3x - 4y + z - 3 = 0.$$

Подставляя выраженія x, y, z черезъ α, β, γ, представимъ уравненіе заданной плоскости въ слѣдующемъ видѣ:

$$3\left(\alpha + 2\beta + 10\gamma - \frac{7}{2}\right) - 4\left(\beta + 2\gamma - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} - 2\gamma - 3 = 0,$$

или

$$3\alpha + 2\beta + 20\gamma + \ldots. = 0.$$

Слѣдовательно, $l = 3$, $m = 2$, $n = 20$, откуда уравненіе діаметра $\alpha = \frac{l}{2Ln}$, $\beta = \frac{m}{2n}$ имѣютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z - 2 &= -\frac{3}{10} \\ y + z - 1 &= \frac{1}{20} \end{aligned}\right\}$$

Показавъ, какъ находить діаметральныя плоскости и діаметры, найдемъ ось поверхности и ея главныя діаметральныя плоскости. Что касается оси, то выкладка, относящаяся къ ней, весьма проста. Въ самомъ дѣлѣ, придется выразить условія перпендикулярности плоскости

$$l(x - 2y + 3z - 2) + m(y + z - 1) + n\left(-\frac{z}{2} + \frac{3}{4}\right) = 0 \quad (2)$$

съ прямою

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 2 = \dfrac{l}{2Ln}, & (3) \\ y + z - 1 = \dfrac{m}{2n}. & (4) \end{cases}$$

Уравненіе (2) можетъ быть переписано такъ:

$$lx + (m - 2l)y + \left(3l + m - \frac{n}{2}\right)z + \ldots = 0.$$

Выражая условія перпендикулярности плоскости (2) съ плоскостями (3) и (4), получимъ:

$$l - 2(m - 2l) + 3\left(3l + m - \frac{n}{2}\right) = 0,$$

$$m - 2l + 3l + m - \frac{n}{2} = 0.$$

Послѣднія уравненія могутъ быть переписаны такъ

$$28l + 2m - 3n = 0,$$

$$2l + 4m - n = 0,$$

откуда, исключая m, получимъ:

$$\frac{l}{2L\,n} = -2\frac{l}{n} = -\frac{5}{27}.$$

Исключая же l, получимъ:

$$\frac{m}{2n} = \frac{11}{108}.$$

Слѣдовательно, ось имѣетъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z - 2 &= -\frac{5}{27} \\ y + z - 1 &= \frac{11}{108} \end{aligned}\right\}. \qquad (*)$$

Найдемъ теперь уравненія плоскостей симметріи. Слѣдуя теоріи, изложенной въ § 135, мы должны опредѣлить l, m, n изъ условій

перпендикулярности діаметральной плоскости

$$Ll\alpha + m\beta + \frac{n}{2} = 0$$

и хорды, имѣющей уравненія

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}.$$

Примѣнительно къ данному случаю имѣемъ уравненіе діаметральной плоскости

$$-\frac{1}{4} l\,(x - 2y + 3z - 2) + m\,(y + z - 1) + \frac{n}{2} = 0,$$

или

$$l\,(x - 2y + 3z - 2) - 4m\,(y + z - 1) - 2n = 0,$$

или окончательно

$$lx + (-2l - 4m)\,y + (3l - 4m)\,z + \ldots = 0. \qquad (5)$$

Уравненія хорды имѣютъ видъ:

$$n\,(x - 2y + 3z - 2) - l\left(-\frac{z}{2} + \frac{3}{4}\right) = 0,$$

$$n\,(y + z - 1) - m\left(-\frac{z}{2} + \frac{3}{4}\right) = 0,$$

или

$$nx + (-2n)\,y + \left(3n + \frac{l}{2}\right) z + \ldots = 0,$$

$$ny + \left(n + \frac{m}{2}\right) z + \ldots = 0,$$

или окончательно

$$\frac{x - x_0}{-\frac{l}{2} - m - 5n} = \frac{y - y_0}{-n - \frac{m}{2}} = \frac{z - z_0}{n},$$

гдѣ x_0, y_0, z_0 координаты какой нибудь точки на хордѣ. Чтобы послѣдняя хорда была перпендикулярна къ плоскости (5), необходимо, чтобы угловые коэффиціенты были пропорціональны.

Получаемъ

$$\frac{l}{-\frac{l}{2}-m-5n}=\frac{-2l-4m}{-n-\frac{m}{2}}=\frac{3l-4m}{n}=\rho,$$

откуда

$$l=\rho\left(-\frac{l}{2}-m-5n\right),$$

$$-2l-4m=\rho\left(-n-\frac{m}{2}\right),$$

$$3l-4m=\rho n.$$

Эти уравненія можно написать такъ:

$$l\left(1+\frac{\rho}{2}\right)+m\rho+5\rho n=0, \tag{6}$$

$$l(-2)+m\left(-4+\frac{\rho}{2}\right)+n\rho=0, \tag{7}$$

$$l(3)+m(-4)+n(-\rho)=0. \tag{8}$$

Исключая l, m и n, получимъ:

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{\rho}{2}, & \rho, & 5\rho \\ -2, & -4+\frac{\rho}{2}, & \rho \\ 3, & -4, & -\rho \end{vmatrix}=0,$$

откуда для опредѣленія ρ получается квадратное уравненіе

$$\rho^2+12\rho-432=0. \tag{9}$$

Двумъ корнямъ его ρ_0, ρ_1 соотвѣтствуютъ двѣ искомыя плоскости симметріи. Изъ уравненій (7) и (8) получаемъ:

$$\frac{l}{8\rho-\frac{\rho^2}{2}}=\frac{m}{\rho}=\frac{n}{20-\frac{3}{2}\rho}.$$

Исключая ρ^2 изъ перваго отношенія, на основаніи квадратнаго уравненія (9), получаемъ:

$$\frac{l}{14\rho - 216} = \frac{m}{\rho} = \frac{n}{20 - \frac{3}{2}\rho}.$$

Итакъ, уравненія главныхъ діаметральныхъ плоскостей имѣютъ видъ:

$$(14\rho_0 - 216)(x - 2y + 3z - 2) - 4\rho_0(y + z - 1) - 40 + 3\rho_0 = 0,$$

$$(14\rho_1 - 216)(x - 2y + 3z - 2) - 4\rho_1(y + z - 1) - 40 + 3\rho_1 = 0.$$

Легко убѣдиться, что полученныя такія плоскости перпендикулярны между собою.

Выражая условія перпендикулярности, мы получимъ равенство:

$$(7^2 + 16^2 + 19^2)\,\rho_0\rho_1 -$$

$$-(\rho_0 + \rho_1)(7\,.\,108 + 16\,.\,216 + 19\,.\,324) +$$

$$+ 108^2 + 216^2 + 324^2 = 0,$$

которое тождественно удовлетворяется, принимая въ соображаніе, что

$$\rho_0\rho_1 = -432, \text{ a } \rho_0 + \rho_1 = -12.$$

Что касается уравненій оси, то эти уравненія мы получимъ, приравнивая нулю отдѣльно коэффиціентъ при ρ и члены, не зависящіе отъ ρ. Получаемъ

$$14\alpha - 4\beta + 3 = 0, - 216\alpha - 40 = 0,$$

откуда

$$\alpha = -\frac{5}{27}, \beta = \frac{11}{108}.$$

Получились какъ разъ уравненія (*) оси.

Примѣръ 2. Заданъ эллиптическій параболоидъ:

$$(x + y + z + 1)^2 + (y + z + 1)^2 + z + 1 = 0.$$

Здѣсь

$$L = 1, \alpha = x + y + z + 1, \beta = y + z + 1, \gamma = z + 1.$$

Для хордъ, параллельныхъ направленію

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+1 &= k\,(z+1) \\ y+z+1 &= k_1\,(z+1) \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

уравненіе соотвѣтствующей діаметральной плоскости будетъ:

$$k\,(x+y+z+1)+k_1\,(y+z+1)+\frac{1}{2}=0. \tag{2}$$

Выражая условіе перпендикулярности прямой (1) съ плоскостью (2), получимъ:

$$\frac{k-k_1}{k}=\frac{k_1-1}{k+k_1}=\frac{1}{k+k_1};$$

отсюда

$$k_1-1=1,\ k_1=2.$$

Для k получаемъ уравненіе

$$k^2-k_1{}^2=k\,(k_1-1) \text{ или } k^2-k-4=0,$$

откуда

$$k=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Уравненіе двухъ главныхъ діаметральныхъ плоскостей получается, слѣдовательно, въ такомъ видѣ:

$$\frac{\sqrt{17}+1}{2}\,(x+y+z+1)+2\,(y+z+1)+\frac{1}{2}=0,$$

$$\frac{\sqrt{17}-1}{2}\,(x+y+z+1)-2\,(y+z+1)-\frac{1}{2}=0.$$

Ясно, что ось параболоида опредѣляется уравненіями:

$$x+y+z+1=0 \text{ и } y+z+\frac{5}{4}=0.$$

Примѣръ 3. Найти главныя діаметральныя плоскости параболоида

$$x^2+y^2+z=0.$$

Здѣсь

$$L = 1,\ \alpha = x,\ \beta = y,\ \gamma = z.$$

Діаметральная плоскость, соотвѣтствующая хордамъ, параллельнымъ прямой

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n},$$

имѣетъ уравненіе

$$2lx + 2my + n = 0.$$

Условія перпендикулярности имѣютъ видъ

$$\frac{2l}{l} = \frac{2m}{m} = \frac{0}{n},$$

откуда замѣчаемъ, что $n = 0$, а l и m совершенно произвольны. Слѣдовательно, разсматриваемый параболоидъ есть параболоидъ вращенія, и всякая плоскость

$$mx + ny = 0$$

есть плоскость симметріи.

141. Резюмируя сказанное о цилиндрахъ и параболоидахъ, мы замѣчаемъ, что, когда найдены плоскости симметріи этихъ поверхностей, тогда можно уравненія ихъ привести къ простѣйшему виду, принявъ эти плоскости симметріи за координатныя плоскости. При помощи разсужденій, подобныхъ изложеннымъ въ §§ 113 и 146 геометріи двухъ измѣреній, мы замѣчаемъ, что уравненіе параболическаго цилиндра можетъ быть приведено къ виду

$$y^2 = 2px,$$

причемъ плоскость симметріи цилиндра принята за плоскость z, плоскость xy пересѣкаетъ цилиндръ перпендикулярно образующимъ, и начало координатъ лежитъ на поверхности цилиндра вмѣстѣ съ осью z-овъ; плоскость-же yz касается поверхности по оси z-овъ.

Цилиндръ образованъ прямыми, проведенными черезъ различныя точки параболы

$$y = 2px$$

параллельно оси z-овъ.

142. Подобнымъ-же образомъ эллиптическій и гиперболическій

цилиндры имѣютъ уравненія, приведенныя къ простѣйшему виду, такія:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Цилиндры образованы прямыми, проходящими параллельно оси z-овъ черезъ различныя точки эллипса или гиперболы, опредѣляемыхъ на плоскости xy вышеприведеннымъ уравненіемъ.

143. То же самое относится и къ параболоидамъ. Если примемъ за ось z-овъ ось параболоида, за начало координатъ его *вершину*, то есть ту точку, въ которой ось встрѣчаетъ поверхность, плоскости-же zx, zy расположимъ по плоскостямъ симметріи параболоида, а за плоскость xy возьмемъ касательную плоскость къ вершинѣ параболоида,—тогда уравненіе поверхности представится въ такомъ простѣйшемъ видѣ

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} - z = 0.$$

Этотъ параболоидъ встрѣчаетъ координатныя плоскости xz, yz по параболамъ

$$x^2 = 2pz, \quad y^2 = 2qz.$$

Что касается вычисленія параметровъ p и q, то это вычисленіе не трудно произвести на основаніи слѣдующихъ соображеній. Пусть уравненіе параболоида имѣетъ видъ:

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0. \tag{1}$$

Уравненія плоскостей симметріи суть:

$$L[\xi_0]\alpha + \beta(Bb + Cc)\xi_0 + \frac{\varepsilon}{2}[b(Bc - Cb) + C\xi_0] = \alpha_1 = 0,$$

$$L[\xi_1]\alpha + \beta(Bb + Cc)\xi_1 + \frac{\varepsilon}{2}[b(Bc - Cb) + C\xi_1) = \beta_1 = 0.$$

Рѣшая эти уравненія относительно α и β, получимъ:

$$\alpha = M\alpha_1 + N\beta_1 + S,$$

$$\beta = M'\alpha_1 + N'\beta_1 + S'.$$

Подставляя полученныя выраженія въ уравненіе (1), получимъ

$$K_1 \alpha_1^2 + Q\alpha_1\beta_1 + K_2\beta_1^2 + K_3\alpha_1 + K_4\beta_2 + \gamma + K_5 = 0.$$

Легко убѣдиться, что $Q = 0$, и тогда, обозначая черезъ γ_1 функцію

$$K_3\alpha_1 + K_4\beta_1 + \gamma + K_5,$$

получимъ уравненіе нашей поверхности въ видѣ

$$K_1\alpha_1^2 + K_2\beta_1^2 + \gamma_1 = 0.$$

Плоскости $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ суть новыя координатныя плоскости.

Возьмемъ какую нибудь точку на параболоидѣ. Три новыя координаты ξ, η, ζ этой точки будутъ разстояніями ея отъ плоскостей α_1, β_1, γ_1, слѣдовательно,

$$\xi = \frac{\alpha_1}{\Delta_1}, \quad \eta = \frac{\beta_1}{\Delta_2}, \quad \zeta = \frac{\gamma_1}{\Delta_3},$$

гдѣ Δ_1, Δ_2, Δ_3 суть корни квадратные изъ суммъ квадратовъ угловыхъ коэффиціентовъ каждой изъ плоскостей $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$. Подставляя въ уравненіе, получимъ

$$K_1\Delta^2_1\xi^2 + K_2\Delta^2_2\eta^2 + \Delta_3\zeta = 0,$$

откуда

$$2p = -\frac{\Delta_3}{K_1\Delta^3_1}, \qquad 2q = -\frac{\Delta_3}{K_2\Delta^2_2}.$$

Поверхности второго порядка третьяго рода:

$$L\alpha^2 + L_1\beta^2 + \gamma^2 + P = 0.$$

145. Поверхности этого рода обыкновенно называются поверхностями съ центромъ, причемъ центромъ будетъ точка, лежащая въ пересѣченіи трехъ плоскостей:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0. \tag{1}$$

Проведемъ черезъ точку (1) хорду, опредѣляемую уравненіями

$$\alpha = k\gamma, \quad \beta = k_1\gamma, \tag{2}$$

и докажемъ, что эта хорда будетъ дѣлиться въ этой точкѣ пополамъ. Точка пересѣченія прямой (2) съ поверхностью

$$L\alpha^2 + L_1\beta^2 + \gamma^2 + P = 0 \qquad (A)$$

опредѣлится при помощи уравненій (2) и (A); уравненіе (A) можно замѣнить слѣдующимъ:

$$(Lk^2 + L_1k^2_1 + 1)\gamma^2 + P = 0,$$

откуда

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{-P}{Lk^2 + L_1k^2_1 + 1}}.$$

Отсюда мы видимъ, что, если подкоренная величина положительная, то конца хорды (2) опредѣлятся, какъ точки пересѣченія хорды двумя параллельными плоскостями:

$$\gamma = +\sqrt{\frac{-P}{Lk^2 + L_1k_1{}^2 + 1}} \text{ и } \gamma = -\sqrt{\frac{-P}{Lk^2 + L_1k_1{}^2 + 1}}.$$

Средина хорды опредѣлится пересѣченіемъ хорды и плоскости $\gamma = 0$, лежащей по срединѣ между этими двумя плоскостями.
Итакъ, средина хорды опредѣляется уравненіями

$$\alpha = k\gamma, \quad \beta = k_1\gamma, \quad \gamma = 0,$$

или, что одно и то же (при всякихъ k и k_1) уравненіями

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

что и требовалось доказать.

146. Подобно тому, какъ мы это дѣлали съ поверхностями первыхъ двухъ родовъ, разсмотримъ сначала простѣйшій случай $P = 0$. Уравненіе

$$L\alpha^2 + L_1\beta^2{}_1 + \gamma^2 = 0,$$

въ случаѣ, если оба коэффиціента L и L_1 положительны, опредѣляетъ *точку*: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Напримѣръ, уравненіе:

$$-(x - 2y + z - 1)^2 - 3(y + 2z - 4)^2 - 2(z - 1)^2 = 0,$$

которое можетъ быть переписано такъ:

$$\frac{1}{2}(x-2y+z-4)^2+\frac{3}{2}(y+2z-4)^2+(z-1)^2=0,$$

опредѣляетъ точку:

$$x-2y+z-1=0,\quad y+2z-4=0,\quad z-1=0,$$

координаты которой суть, очевидно, $x=4$, $y=2$, $z=1$.

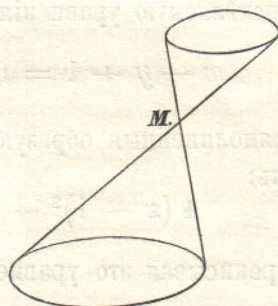
147. Покажемъ теперь, что, если одинъ изъ коэффиціентовъ L и L_1, или же оба, отрицательны, то поверхность будетъ *конусомъ*.

Достаточно разсмотрѣть одинъ изъ случаевъ, напримѣръ, $L>0$, $L_1<0$. Другіе случаи, умноженіемъ на -1 уравненія и перемѣщеніемъ порядка членовъ, приведутся къ разсматриваемому, т. е. когда первый и третій квадратъ съ положительными коэффиціентами, а второй съ отрицательнымъ. Обозначая $L=\lambda^2$, $L_1=-\lambda^2{}_1$, получимъ уравненіе поверхности въ такомъ видѣ:

$$\lambda^2{}_1\beta^2-\lambda^2\alpha^2=\gamma^2.$$

Это уравненіе можно переписать въ такомъ видѣ:

$$(\lambda_1\beta+\lambda\alpha)(\lambda_1\beta-\lambda\alpha)=k\gamma\frac{\gamma}{k},$$



Черт. 246.

гдѣ k совершенно произвольное число. Каждому множителю первой части приравняемъ множитель второй; получимъ систему прямыхъ, лежащихъ на разсматриваемой поверхности, въ такомъ видѣ:

$$\lambda\alpha+\lambda_1\beta=k\gamma,\qquad \lambda_1\beta-\lambda\alpha=\frac{\gamma}{k}. \tag{3}$$

Мѣняя постоянное число k, мы будемъ получать различныя прямолинейныя образующія конуса. Чтобы убѣдиться въ томъ, что поверхность есть конусъ, достаточно замѣтить, что всѣ образующія (3) проходятъ черезъ точку $M\,(=\alpha\,0,\ \beta=0,\ \gamma=0)$ — вершину конуса (см. черт. 246).

Если бы приравняли множители въ обратномъ порядкѣ, то

могли бы написать уравненія прямолинейныхъ образующихъ въ такомъ видѣ:

$$\lambda\alpha + \lambda_1\beta = \frac{\gamma}{k}, \quad \lambda_1\beta - \lambda\alpha = k\gamma. \qquad (3')$$

Легко убѣдиться, что уравненія (3') даютъ ту же систему образующихъ, что и уравненія (3), ибо система (3') переходитъ въ систему (3) простою замѣною произвольнаго постояннаго числа k черезъ $\frac{1}{k}$.

Разсматриваемый здѣсь конусъ называется *конусомъ второго порядка* и имѣетъ своимъ частнымъ случаемъ прямой круговой конусъ, разсматриваемый въ элементарной геометріи.

148. *Примѣръ.*

$$2(x-y+1)^2 + (y+z-2)^2 - 4(z-1)^2 = 0.$$

Это уравненіе опредѣляетъ конусъ, имѣющій своей вершиною точку, опредѣляемую уравненіями:

$$x - y + 1 = 0, \quad y + z - 2 = 0, \quad z - 1 = 0.$$

Прямолинейныя образующія получатся, если уравненіе перепишемъ такъ:

$$4(z-1)^2 - (y+z-2)^2 = 2(x-y+1)^2$$

Переписывая это уравненіе въ такомъ видѣ:

$$[2(z-1) + (y+z-2)][2(z-1) - (y+z-2)] =$$
$$= k(x-y+1) \cdot \frac{2}{k}(x-y+1),$$

получимъ окончательно уравненія прямолинейныхъ образующихъ въ такомъ видѣ:

$$y + 3z - 4 = k(x-y+1), \quad z - y = \frac{2}{k}(x-y+1).$$

149. Обращаемся теперь къ случаю, когда P не равно нулю.

Этотъ случай распадается на два: когда всѣ три квадрата одного знака и когда коэффиценты при этихъ квадратахъ разныхъ знаковъ.

150. Уравненіе

$$L\alpha^2 + L_1\beta^2 + \gamma^2 + P = 0$$

будетъ имѣть три квадрата съ одинаковыми знаками, когда L и L_1 оба положительны. Если, кромѣ того, знакъ P совпадаетъ со знакомъ коэффиціентовъ при квадратахъ, то есть въ данномъ случаѣ P положительно, то уравненіе, очевидно, не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста. Напримѣръ,

$$-(x + y - z + 3)^2 - 2(y + z - 4)^2 - 3(z - 2)^2 - 4 = 0.$$

150. Въ случаѣ же если знакъ P обратный знаку коэффиціентовъ при квадратахъ, то получается поверхность, называемая *эллипсоидомъ*. Напримѣръ:

$$-(x + y - 2z)^2 - y^2 - 4(z - 1)^2 + 3 = 0 .$$

Эллипсоидъ.

151. Итакъ, разсмотримъ случай, когда въ уравненіи

$$L\alpha^2 + L_1\beta^2 + \gamma^2 + P = 0 .$$

$L > 0$, $L_1 > 0$, а $P < 0$. Перенося P во вторую часть, получаемъ:

$$L\alpha^2 + L_1\beta^2 + \gamma^2 = -P .$$

Дѣля обѣ части уравненія на $-P$ и обозначая

$$\frac{-P}{L} = a^2, \ \frac{-P}{L_1} = b^2, \ -P = c^2,$$

представимъ уравненіе эллипсоида въ такомъ видѣ:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

152. Для изученія вида поверхности будемъ пересѣкать ее плоскостями, параллельными плоскостямъ:

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = 0 .$$

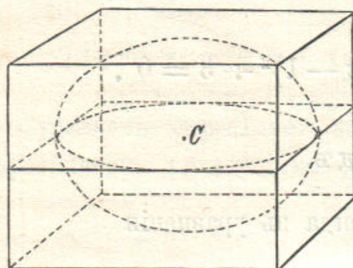
Пересѣчемъ плоскостью $\alpha = k$. Въ сѣченіи будетъ эллипсъ, ибо уравненіе

$$\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

опредѣляетъ эллиптическій цилиндръ. Пока k по численной величинѣ меньше a, сѣченіе будетъ существовать, когда $k = \pm a$, сѣченіе обратится въ точку:

$$\alpha = \pm a, \ \beta = 0, \ \gamma = 0;$$

наконецъ, когда $k > a$, то сѣченіе перестаетъ существовать, и плоскость $\alpha = k$ не пересѣкаетъ поверхности. Слѣдовательно, вся поверхность лежитъ между двумя плоскостями $\alpha = -a$, $\alpha = +a$ (см. черт. 247). Точно также покажемъ, что вся поверхность лежитъ между плоскостями $\beta = -b$, $\beta = +b$, а также между плоскостями $\gamma = -c$ и $\gamma = +c$, и, слѣдовательно, поверхность имѣетъ конечные размѣры и лежитъ вся въ параллелепипедѣ, образуемомъ шестью указанными плоскостями. Не трудно убѣдиться, что всякое сѣченіе эллипсоида есть эллипсъ.



Черт. 247.

153. Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію діаметральныхъ плоскостей и діаметровъ эллипсоида.

Найдемъ діаметральную плоскость, дѣлящую хорды, параллельныя нѣкоторой прямой

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}, \tag{1}$$

проходящей черезъ центръ, пополамъ. Обозначая черезъ u общую величину отношеній пропорціи (1), можемъ уравненіе прямой написать такъ:

$$\alpha = lu, \ \beta = mu, \ \gamma = nu. \tag{2}$$

Получили три уравненія прямой, но зато входитъ лишній параметръ u, подлежащій исключенію. Мы видѣли уже, что получимъ уравненія

хордъ, параллельныхъ прямой (2), если напишемъ уравненія:

$$\alpha = lu + \lambda,\ \beta = mu + \mu,\ \gamma = nu + \nu\,. \qquad (3)$$

Оставляя l, m, n безъ перемѣны и мѣняя λ, μ, ν, будемъ получать всевозможныя хорды, параллельныя прямой (1), или, что одно и то же, (2). Подставляя выраженіе (3) въ уравненіе эллипсоида, получимъ для опредѣленія u, соотвѣтствующаго концамъ хорды, уравненіе:

$$u^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)+2u\left(\frac{l\lambda}{a^2}+\frac{m\mu}{b^2}+\frac{n\nu}{c^2}\right)+\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}=1.$$

Отсюда

$$u = -\frac{\dfrac{l\lambda}{a^2}+\dfrac{m\mu}{b^2}+\dfrac{n\nu}{c^2}}{\dfrac{l^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}+\dfrac{n^2}{c^2}} \pm \sqrt{R}\,.$$

Средина хорды дастъ для u выраженіе

$$u = -\frac{\dfrac{l\lambda}{a^2}+\dfrac{m\mu}{b^2}+\dfrac{n\nu}{c^2}}{\dfrac{l^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}+\dfrac{n^2}{c^2}}\,.$$

Уравненіе діаметральной плоскости получится черезъ исключеніе четырехъ буквъ: u, λ, μ, ν изъ уравненій (3) и (4). Сдѣлаемъ это исключеніе. Уравненіе (4) можетъ быть написано такъ:

$$u\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)+\frac{l\lambda}{a^2}+\frac{m\mu}{b^2}+\frac{n\nu}{c^2}=0,$$

или еще такъ:

$$\frac{l}{a^2}(ul+\lambda)+\frac{m}{b^2}(um+\mu)+\frac{n}{c^2}(un+\nu)=0,$$

откуда окончательно получимъ уравненіе діаметральной плоскости, дѣлящей пополамъ хорды направленія

$$\frac{\alpha}{l}=\frac{\beta}{m}=\frac{\gamma}{n}$$

въ такомъ видѣ:

$$\frac{l\alpha}{a^2} + \frac{m\beta}{b^2} + \frac{n\gamma}{c^2} = 0. \qquad (5)$$

Всѣ діаметральныя плоскости проходятъ, очевидно, черезъ центръ.

154. Найдемъ теперь уравненія діаметра, соотвѣтствующаго плоскостямъ

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + q = 0, \qquad (1)$$

получаемымъ при измѣненіи коэффиціента q.

Напишемъ уравненіе діаметральныхъ плоскостей, дѣлящихъ пополамъ хорды, параллельныя направленію плоскости

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0. \qquad (2)$$

Эти діаметральныя плоскости будутъ пересѣкать плоскость (1) по діаметрамъ ея сѣченія, и, слѣдовательно, центръ сѣченія плоскости (1) будетъ лежать на всѣхъ этихъ плоскостяхъ; другими словами, всѣ разсматриваемыя діаметральныя плоскости будутъ пересѣкаться по геометрическому мѣсту центровъ сѣченій (1) (при разныхъ, конечно, q) или по искомому діаметру эллипсоида. Любое направленіе хордъ разсматриваемаго случая получимъ, присоединяя къ уравненію (2) уравненіе

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0. \qquad (3)$$

Совокупность уравненій (2) и (3) можно написать такъ:

$$\frac{\alpha}{-mn_1 + nm_1} = \frac{\beta}{-nl_1 + ln_1} = \frac{\gamma}{-lm_1 + ml_1}. \qquad (4)$$

Уравненіе діаметральной плоскости, дѣлящей пополамъ хорды, параллельныя направленію (4), будетъ

$$\frac{(mn_1 + nm_1)\,\alpha}{a^2} + \frac{(nl_1 + ln_1)\,\beta}{b^2} + \frac{(lm_1 + ml_1)\,\gamma}{c^2} = 0.$$

Это уравненіе можно написать такъ:

$$l_1\left(\frac{n\beta}{b^2} - \frac{m\gamma}{c^2}\right) + m_1\left(\frac{l\gamma}{c^2} - \frac{n\alpha}{a^2}\right) + n_1\left(\frac{m\alpha}{a^2} - \frac{l\beta}{b^2}\right) = 0. \qquad (5)$$

Уравненіе (5) должно удовлетворяться при всевозможныхъ l_1, m_1, n_1; отсюда мы замѣчаемъ, что должны имѣть мѣсто слѣдующія равенства:

$$\frac{n\beta}{b^2}-\frac{m\gamma}{c^2}=0,\ \frac{l\gamma}{c^2}-\frac{n\alpha}{a^2}=0,\ \frac{m\alpha}{a^2}-\frac{l\beta}{b^2}=0.$$

Послѣднія уравненія, изъ которыхъ третье есть слѣдствіе первыхъ двухъ, могутъ быть написаны такъ:

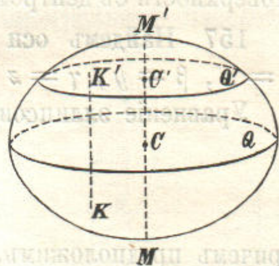
$$\frac{\alpha}{la^2}=\frac{\beta}{mb^2}=\frac{\gamma}{nc^2}. \tag{6}$$

Это и есть уравненіе діаметра плоскостей направленія

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0.$$

Уравненіе (6) показываетъ, что всѣ діаметры эллипсоида проходятъ черезъ его центръ.

155. *Теорема*. Проведемъ діаметръ MM', соотвѣтствующій плоскостямъ, параллельнымъ нѣкоторой діаметральной плоскости Q; тогда этотъ діаметръ будетъ параллеленъ хордамъ, которыя дѣлитъ плоскость Q пополамъ (см. черт. 248). Такія плоскости Q и діаметръ MM' называются *сопряженными*.



Черт. 248.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть уравненіе плоскости Q будетъ

$$\frac{l\alpha}{a^2}+\frac{m\beta}{b^2}+\frac{n\gamma}{c^2}=0,$$

причемъ эта плоскость, очевидно, дѣлитъ пополамъ хорды направленія

$$\frac{\alpha}{l}=\frac{\beta}{m}=\frac{\gamma}{n}.$$

На основаніи доказаннаго, если мы обозначимъ черезъ

$$l_1=\frac{l}{a^2},\quad m_1=\frac{m}{b^2},\quad n_1=\frac{n}{c^2},$$

то получимъ для плоскостей, параллельныхъ плоскости

$$l_1\alpha+m_1\beta+n_1\gamma=0,$$

уравненіе діаметра въ такомъ видѣ:

$$\frac{\alpha}{l_1 a^2} = \frac{\beta}{m_1 b^2} = \frac{\gamma}{n_1 c^2},$$

откуда получаемъ искомое уравненіе діаметра въ такомъ видѣ:

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n},$$

что и требовалось доказать.

156. Если выразимъ условіе перпендикулярности сопряженнаго діаметра и плоскости, то получимъ для опредѣленія двухъ отношеній $\frac{l}{n}$ и $\frac{m}{n}$ два уравненія. Діаметръ, перпендикулярный къ сопряженной съ нимъ плоскости, называется *осью* поверхности, а плоскость — *главною діаметральною плоскостью*, или *плоскостью симметріи*. Если подставимъ въ уравненія діаметра вмѣсто $\frac{l}{n}$ и $\frac{m}{n}$ полученныя изъ условій перпендикулярности значенія, то получимъ уравненіе оси. Поверхности съ центромъ имѣютъ три взаимно-перпендикулярныхъ оси.

157. Найдемъ оси эллипсоида въ томъ частномъ случаѣ, когда $\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = z$

Уравненіе эллипсоида будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

причемъ предположимъ, что a, b и c не равны между собою и что $a^2 > b^2 > c^2$.

Діаметру

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

будетъ сопряжена плоскость

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = 0.$$

Условія перпендикулярности будутъ

$$\frac{la^2}{l} = \frac{mb^2}{m} = \frac{nc^2}{n}. \qquad (*)$$

Если, какъ мы это предположили, a, b, c не равны между собою, то этимъ уравненіямъ (*) можно удовлетворить только тремя предположеніями:

1) $l = 0$, $m = 0$, n не $= 0$,

2) $l = 0$, m не $= 0$, $n = 0$,

3) l не $= 0$, $m = 0$, $n = 0$,

ибо, если бы два изъ коэффиціентовъ не были равны нулю, напримѣръ, если бы было l не$=0$, m не$=0$, то уравненіе

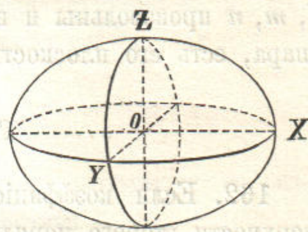
$$\frac{la^2}{l} = \frac{mb^2}{m}$$

давало бы $a^2 = b^2$, что противорѣчитъ нашему предположенію.

Первое предположеніе даетъ ось ($x = 0$, $y = 0$) и главную діаметральную плоскость $z = 0$; второе — ось ($x = 0$, $z = 0$) и главную діаметральную плоскость $y = 0$; наконецъ, третье предположеніе даетъ ось ($y = 0$, $z = 0$) и главную діаметральную плоскость $x = 0$. Итакъ, мы видимъ, что эллипсоидъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

имѣетъ осями координатныя оси (см. черт. 249).



Черт. 249.

158. Точки, въ которыхъ оси пересѣкаютъ поверхность, называются *вершинами*. Разстояніе отъ центра до вершины есть длина соотвѣтственной полуоси. Легко видѣть, что a есть длина полуоси, совпадающей съ осью x-овъ, b — полуоси, совпадающей съ осью y-овъ, и c — длина полуоси, совпадающей съ осью z-овъ.

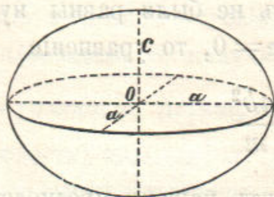
159. Если двѣ изъ полуосей равны между собою, напримѣръ, $a = b$, то эллипсоидъ есть эллипсоидъ вращенія; причемъ эллипсоидъ будетъ *сжатый* (см. черт. 250), если $c < a$ и, наоборотъ, *удлиненный*, если $c > a$ (см. черт. 251).

160. Если всѣ три полуоси равны между собою $a = b = c$, то

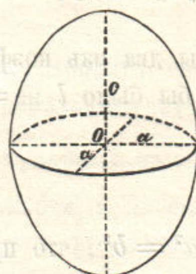
эллипсоидъ обращается въ шаръ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=0 \text{ или } x^2+y^2+z^2=a^2.$$

161. Если $a=b$ и, слѣдовательно, эллипсоидъ есть эллипсоидъ вращенія, то коэффиціентъ n (см. § 157) долженъ равняться нулю, два же другихъ коэффиціента l и m совершенно произвольны, а по-



Черт. 250.



Черт. 251.

тому всякая плоскость, проходящая черезъ осъ z-овъ, есть плоскость симметріи этого эллипсоида.

Для шара $a=b=c$, и, слѣдовательно, всѣ три коэффиціента l, m, n произвольны и всякая плоскость, проходящая черезъ центръ шара, есть его плоскость симметріи.

Гиперболоиды.

162. Если коэффиціенты при квадратахъ общаго уравненія поверхности второго порядка съ центромъ

$$L\alpha^2+L_1\beta^2+\gamma^2+P=0$$

разныхъ знаковъ, то получаются поверхности, называемыя *гиперболоидами*. Основныхъ типовъ такихъ гиперболоидовъ два: *однополый* и *двуполый*.

Однополый гиперболоидъ состоитъ изъ одной полы поверхности, а двуполый изъ двухъ отдѣльныхъ полъ.

Однополый гиперболоидъ пересѣкается со всѣми тремя плоскостями $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, тогда какъ двуполый гиперболоидъ одною изъ этихъ плоскостей не пересѣкается.

На этомъ основаніи легко отличить одинъ случай отъ другого. Напримѣръ,

$$-(x-y+3z-1)^2+2(y-4z+1)^2+3(z-1)^2+4=0.$$

Это уравненіе опредѣляетъ одинъ изъ гиперболоидовъ, ибо квадраты съ разными знаками.

Посмотримъ теперь, который изъ гиперболоидовъ получается.

Пересѣкая плоскостью $x-y+3z-1=0$, получаемъ невозможное уравненіе

$$2(y-4z+1)^2+3(z-1)^2+4=0,$$

и, слѣдовательно, поверхность будетъ двуполымъ гиперболоидомъ.

Уравненіе же

$$-(x-y+3z-1)^2+2(y-4z+1)^2+3(z-1)^2-4=0.$$

будетъ опредѣлять однополый гиперболоидъ, ибо, которою бы изъ плоскостей

$$x-y+3z-1=0, \quad y-4z+1=0, \quad z-1=0$$

ни пересѣкать поверхность, невозможныхъ уравненій не получается.

163. Разсуждая подобно тому, какъ это было сдѣлано въ § 151, можно привести уравненіе однополаго гиперболоида къ виду

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=1.$$

Для изученія вида этой поверхности будемъ пересѣкать ее различными плоскостями, параллельными плоскостямъ

$$\alpha=0, \ \beta=0, \ \gamma=0.$$

Въ сѣченіяхъ плоскостью $\beta=k$ получатся эллипсы, въ сѣченіяхъ же $\alpha=k$, $\gamma=k$ — гиперболы.

Конусъ

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=0$$

есть такъ называемый *асимптотическій конусъ* (см. черт. 252), полы котораго сближаются, по мѣрѣ удаленія отъ центра, съ поверхностью гиперболоида.

164. На основаніи соображеній, подобныхъ тѣмъ, какія мы привели по поводу эллипсоида, мы замѣчаемъ, что діаметру

$$\frac{\alpha}{l}=\frac{\beta}{m}=\frac{\gamma}{n}$$

будетъ сопряжена діаметральная плоскость

$$\frac{l\alpha}{a^2}-\frac{m\beta}{b^2}+\frac{n\gamma}{c^2}=0 .$$

Однополый гиперболоидъ имѣетъ три оси.

Если возьмемъ уравненіе поверхности въ видѣ

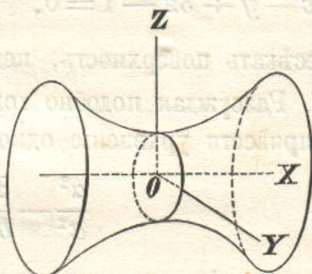
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

то осями будутъ оси координатъ (см. черт. 253).

Если $a=c$, то гиперболоидъ будетъ гиперболоидъ вращенія.



Черт. 252.



Черт. 253.

165. Уравненіе двуполаго гиперболоида можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}=1 .$$

Плоскость $\alpha=0$ не пересѣкаетъ поверхности, точно также и всякая плоскость $\alpha=k$, пока k будетъ меньше a.

Поверхность состоитъ изъ двухъ полъ, лежащихъ по обѣ стороны двухъ параллельныхъ плоскостей

$$\alpha=-a,\ \alpha=+a$$

(см. черт. 254). Асимптотическій конусъ двуполаго гиперболоида имѣетъ уравненіе

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}=0$$

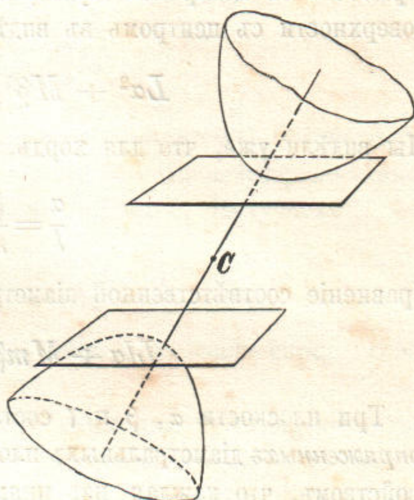
(см. черт. 255). Діаметру

$$\frac{\alpha}{l}=\frac{\beta}{m}=\frac{\gamma}{n}$$

будетъ соотвѣтствовать діаметральная плоскость

$$\frac{l\alpha}{a^2}-\frac{m\beta}{b^2}-\frac{n\gamma}{c^2}=0\,.$$

Двуполый гиперболоидъ имѣетъ три оси.

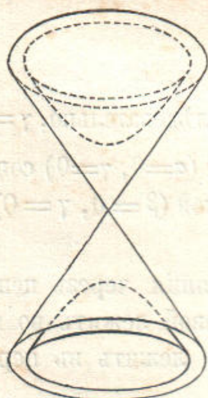


Черт. 254.

Если возьмемъ уравненіе поверхности въ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$ то осями будутъ оси координатъ.

Если $a=c$, то гиперболоидъ будетъ поверхностью вращенія (см. черт. 256).



Черт. 255.



Черт. 256.

166. Обратимся теперь къ нахожденію главныхъ діаметральныхъ плоскостей и осей поверхностей съ центромъ.

Мы видѣли уже на уравненіяхъ въ простѣйшемъ видѣ, что осей для поверхностей съ центромъ три. Покажемъ, что это обстоятельство

имѣетъ мѣсто, въ какомъ бы видѣ ни было написано уравненіе поверхности съ центромъ. Пусть, напримѣръ, задано будетъ уравненіе поверхности съ центромъ въ видѣ:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = P.$$

Мы видѣли уже, что для хордъ, параллельныхъ діаметру

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n},$$

Уравненіе соотвѣтственной діаметральной плоскости имѣетъ видъ:

$$Ll\alpha + Mm\beta + Nn\gamma = 0.$$

Три плоскости α, β и γ составляютъ систему такъ называемыхъ *сопряженныхъ* діаметральныхъ плоскостей. Эта система обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что каждая изъ прямыхъ пересѣченія двухъ изъ числа этихъ трехъ плоскостей есть діаметръ, сопряженный съ третьей плоскостью. Въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ, полагая $l = 0$ и $m = 0$, а n не $= 0$, получаемъ съ одной стороны, уравненіе діаметра

$$\alpha = 0, \ \beta = 0,$$

а съ другой стороны, уравненіе сопряженной съ этимъ діаметромъ діаметральной плоскости

$$Nn\gamma = 0,$$

но N не $= 0$, n тоже не считаемъ равнымъ нулю, слѣдовательно, $\gamma = 0$.

Подобнымъ же образомъ видно, что для прямой ($\alpha = 0$, $\gamma = 0$) сопряженная плоскость есть $\beta = 0$, и наконецъ, для прямой ($\beta = 0$, $\gamma = 0$) — плоскость $\alpha = 0$.

167. *Теорема.* Даны двѣ плоскости, проходящія черезъ центръ поверхности второго порядка; если діаметръ первой лежитъ во второй плоскости, то и обратно, діаметръ второй лежитъ въ первой плоскости.

Для доказательства представимъ уравненія заданныхъ плоскостей въ видѣ:

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0,$$

$$l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma = 0.$$

Уравненія діаметра, сопряженнаго съ первой плоскостью, имѣютъ видъ:

$$\frac{\frac{\alpha}{l_1}}{L}=\frac{\frac{\beta}{m_1}}{M}=\frac{\frac{\gamma}{n_1}}{N}.$$

Для того чтобы этотъ діаметръ лежалъ во второй плоскости, необходимо, чтобы уравненіе этой плоскости удовлетворялось значеніями α, β, γ, взятыми изъ уравненія діаметра. Получаемъ:

$$\frac{l_1 l_2}{L}+\frac{m_1 m_2}{M}+\frac{n_1 n_2}{N}=0.$$

Полнѣйшая симметрія этого уравненія доказываетъ справедливость предложенной теоремы.

168. *Обратная теорема.* Если даны двѣ прямыя, проходящія черезъ центръ поверхности второго порядка, и если діаметральная плоскость, сопряженная съ первой прямой, проходитъ черезъ вторую, то и обратно, діаметральная плоскость, сопряженная со второй, проходитъ черезъ первую.

Въ самомъ дѣлѣ, предполагая несправедливость этой послѣдней теоремы, приходимъ къ противорѣчію съ предыдущей.

169. Итакъ мы видимъ, что если уравненіе поверхности второго порядка съ центромъ написано въ видѣ:

$$L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2=P, \tag{1}$$

то три плоскости $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ составляютъ систему сопряженную. Докажемъ теперь теорему обратную, а именно, что какую бы ни выбрали сопряженную систему трехъ плоскостей $\alpha_1=0$, $\beta_1=0$, $\gamma_1=0$, уравненіе заданной поверхности можетъ быть представлено въ видѣ:

$$L_1\alpha_1{}^2+M_1\beta_1{}^2+N_1\gamma_1{}^2=P,$$

гдѣ L_1, M_1, N_1, P_1 суть нѣкоторыя числа, такъ подобранныя, что это уравненіе тождественно съ уравненіемъ (1).

Пусть функціи α_1, β_1, γ_1 имѣютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=l_1\alpha+m_1\beta+n_1\gamma,\\ \beta_1&=l_2\alpha+m_2\beta+n_2\gamma,\\ \gamma_1&=l_3\alpha+m_3\beta+n_3\gamma.\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Уравненіе діаметра, сопряженнаго съ плоскостью

$$\alpha_1 = 0,$$

есть

$$\frac{\frac{\alpha}{l_1}}{L} = \frac{\frac{\beta}{m_1}}{M} = \frac{\frac{\gamma}{n_1}}{N}. \qquad (*)$$

По условіямъ заданія прямая ($\gamma_1 = 0$, $\beta_1 = 0$) есть діаметръ, сопряженный съ плоскостью $\alpha_1 = 0$, а потому его уравненія должны совпадать съ уравненіями (*).

Систему уравненій $\gamma_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, можно переписать въ такомъ видѣ:

$$\frac{\alpha}{l_1{}^0} = \frac{\beta}{m_1{}^0} = \frac{\gamma}{n_1{}^0}, \qquad (**)$$

гдѣ

$$l_1{}^0 = m_2 n_3 - n_2 m_3, \; m_1{}^0 = n_2 l_3 - l_2 n_3, \; n_1{}^0 = l_2 m_3 - m_2 l_3.$$

Отсюда, сравнивая пропорціи (*) и (**) получаемъ, пропорцію:

$$\frac{l_1{}^0 L}{l_1} = \frac{m_1{}^0 M}{m_1} = \frac{n_1{}^0 N}{n_1}, \qquad (2)$$

но мы замѣчаемъ, что

$$l_1 l_1{}^0 + m_1 m_1{}^0 + n_1 n_1{}^0 = \Delta; \; l_2 l_1{}^0 + m_2 m_1{}^0 + n_2 n_1{}^0 = 0;$$

$$l_3 l_1{}^0 + m_3 m_1{}^0 + n_3 n_1{}^0 = 0,$$

$$l_1 l_2{}^0 + m_1 m_2{}^0 + n_1 n_2{}^0 = 0; \; l_2 l_2{}^0 + m_2 m_2{}^0 + n_2 n_2{}^0 = \Delta;$$

$$l_3 l_2{}^0 + m_3 m_2{}^0 + n_3 n_2{}^0 = 0,$$

$$l_1 l_3{}^0 + m_1 m_3{}^0 + n_1 n_3{}^0 = 0; \; l_2 l_3{}^0 + m_2 m_3{}^0 + n_2 n_3{}^0 = 0;$$

$$l_3 l_3{}^0 + m_3 m_3{}^0 + n_3 n_3{}^0 = \Delta,$$

гдѣ

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix},$$

а

$$l_2{}^0 = m_3 n_1 - n_3 m_1\,,\; m_2{}^0 = n_3 l_1 - l_3 n_1\,,\; n_2{}^0 = l_3 m_1 - m_3 l_1\,,$$

$$l_3{}^0 = m_1 n_2 - n_1 m_2\,,\; m_3{}^0 = n_1 l_2 - l_1 n_2\,,\; n_3{}^0 = l_1 m_2 - m_1 l_2\,,$$

а потому изъ пропорціи (2) получаемъ

$$l_1{}^0 l_2{}^0 L + m_1{}^0 m_2{}^0 M + n_1{}^0 n_2{}^0 N = 0\,, \tag{3}$$

$$l_1{}^0 l_3{}^0 L + m_1{}^0 m_3{}^0 M + n_1{}^0 n_3{}^0 N = 0\,; \tag{4}$$

но такъ какъ по предположенію всѣ три плоскости $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ составляютъ сопряженную систему и, слѣдовательно, суть плоскости, сопряженныя съ соотвѣтствующими прямыми, то тò, что мы продѣлали для одной изъ плоскостей $\alpha_1 = 0$, можно произвести и для другихъ двухъ, откуда получимъ, кромѣ выведенныхъ уравненій (3) и (4), еще слѣдующее:

$$l_2{}^0 l_3{}^0 L + m_2{}^0 m_3{}^0 M + n_2{}^0 n_3{}^0 N = 0\,. \tag{5}$$

Уравненія (3), (4), (5) представляютъ тѣ условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, чтобы три плоскости $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ составляли сопряженную систему. Такъ какъ коэффиціентовъ девять, а условій три, то понятно, что существуетъ безчисленное множество сопряженныхъ системъ.

Итакъ, предположимъ, что коэффиціенты подобраны такъ, что система плоскостей $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ сопряженная. Тогда, чтобы преобразовать уравненіе (1) къ новымъ функціямъ α_1, β_1, γ_1, выразимъ α, β, γ черезъ α_1, β_1, γ_1 и подставимъ полученныя выраженія въ уравненіе (1). Тогда мы получаемъ слѣдующее. Умножая уравненія системы (A) на $l_1{}^0$, $l_2{}^0$, $l_3{}^0$, получимъ:

$$\Delta\alpha = l_1{}^0 \alpha_1 + l_2{}^0 \beta_1 + l_3{}^0 \gamma_1\,.$$

Умножая подобнымъ же образомъ уравненія системы (A) на $m_1{}^0$, $m_2{}^0$, $m_3{}^0$ и складывая, получимъ:

$$\Delta\beta = m_1{}^0 \alpha_1 + m_2{}^0 \beta_1 + m_3{}^0 \gamma_1$$

и по умноженіи тѣхъ же уравненій на $n_1{}^0$, $n_2{}^0$, $n_3{}^0$ и сложеніи ихъ,

получимъ

$$\Delta\gamma = n_1{}^0\alpha_1 + n_2{}^0\beta_1 + n_3{}^0\gamma_1 .$$

Умножая уравненіе (1) на Δ^2 и производя замѣну, получимъ:

$$L(l_1{}^0\alpha_1 + l_2{}^0\beta_1 + l_3{}^0\gamma_1)^2 + M(m_1{}^0\alpha_1 + m_2{}^0\beta_1 + m_3{}^0\gamma_1)^2 +$$
$$+ N(n_1{}^0\alpha_1 + n_2{}^0\beta_1 + n_3{}^0\gamma_1)^2 = P\Delta^2.$$

Раскрывая скобки и припоминая условія (3), (4) и (5), получимъ окончательно уравненіе въ такомъ видѣ:

$$L_1\alpha_1{}^2 + M_1\beta_1{}^2 + N_1\gamma_1{}^2 = P_1 ,$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= Ll_1{}^0l_1{}^0 + Mm_1{}^0m_1{}^0 + Nn_1{}^0n_1{}^0, \text{*)} \\ M_1 &= Ll_2{}^0l_2{}^0 + Mm_2{}^0m_2{}^0 + Nn_2{}^0n_2{}^0, \\ N_1 &= Ll_3{}^0l_3{}^0 + Mm_3{}^0m_3{}^0 + Nn_3{}^0n_3{}^0, \end{aligned}\right\} P_1 = \Delta^2 P.$$

Итакъ мы видимъ, что разложеніе на квадраты первой части уравненія поверхности втораго порядка съ центромъ соотвѣтствуетъ выбору нѣкоторой сопряженной системы плоскостей, а такъ какъ подобныхъ системъ существуетъ безчисленное множество, то слѣдовательно, разложеніе первой части уравненія поверхности съ центромъ на квадраты возможно на безчисленное число манеровъ.

170. Чтобы покончить съ теоріей поверхностей второго порядка, остается показать, что между безчисленнымъ числомъ сопряженныхъ системъ существуетъ, вообще говоря, только одна система взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей. Эти плоскости суть плоскости симметріи поверхности, а линіи ихъ пересѣченія суть оси.

171. Мы сказали, что, вообще говоря, существуетъ одна такая система. Исключительнымъ случаемъ будетъ тотъ, когда поверхность второго порядка есть поверхность вращенія. Въ этомъ послѣднемъ

*) Здѣсь мы приняли старинный способъ обозначенія kk вмѣсто k^2, ибо неудобно писать показатель 2 надъ буквой, имѣющей уже надъ собою значекъ 0. Этотъ способъ писанія практиковался еще въ срединѣ настоящаго столѣтія. (Напр., въ сочиненіяхъ Гаусса).

случаѣ главныхъ сопряженныхъ системъ безчисленное множество, причемъ ось вращенія поверхности есть общая ось, принадлежащая всѣмъ главнымъ системамъ, и безчисленное множество главныхъ системъ получается отъ вращенія одной изъ главныхъ системъ около оси вращенія.

172. Наконецъ, еще болѣе исключительнымъ является случай шара, который представляетъ изъ себя центральную поверхность второго порядка, для которой всякій прямоугольный трехгранный уголъ, имѣющій вершину въ центрѣ, образуетъ главную сопряженную систему.

Приступая къ нахожденію главной сопряженной системы діаметровъ для поверхностей съ центромъ, мы оставимъ нашъ способъ изложенія и будемъ поступать, пользуясь свойствами инваріантовъ, подобно тому какъ мы рѣшали аналогичный вопросъ отнесенія уравненія эллипса и гиперболы къ осямъ.

Предварительно докажемъ теорему:

Теорема. Если перенести начало координатъ въ центръ, не мѣняя направленія осей, то уравненіе поверхности второго порядка

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + 2C_1x + \\ + 2C_2y + 2C_3z + F = 0 \qquad (1)$$

преобразуется въ слѣдующее:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + P = 0, \quad (2)$$

причемъ пропадаютъ члены съ первыми степенями координатъ, коэффиціенты же при членахъ второй степени остаются прежніе. Коэффиціентъ P равенъ результату подстановки въ первую часть уравненія координатъ центра.

Для доказательства предположимъ, что уравненіе (1) разложеніемъ на сумму квадратовъ представлено въ видѣ:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P = 0. \qquad (3)$$

Предположимъ, кромѣ того, что уравненіе (3) не только равносильно, но и тождественно съ уравненіемъ (1), т. е., если для удобства выкладки мы умножали уравненіе на какія нибудь постоянныя

числа, какъ это, напримѣръ, дѣлалось въ § 100, то мы предполагаемъ, что въ уравненіи (3) по выдѣленіи всѣхъ квадратовъ всѣ коэффиціенты L, M, N, P раздѣлены на произведеніе всѣхъ вышеупомянутыхъ чиселъ. Такимъ образомъ, по раскрытіи скобокъ въ первой части уравненія, эта часть тождественно обращается въ первую часть уравненія (1).

Положимъ, что

$$\alpha = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4,\ \beta = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4,$$
$$\gamma = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4.$$

Тогда, согласно сказанному предположенію, будемъ имѣть

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = L\alpha_1^2 + M\beta_1^2 + N\gamma_1^2;\ B_1 = L\alpha_2\alpha_3 + M\beta_2\beta_3 + N\gamma_2\gamma_3; \\ A_2 = L\alpha_2^2 + M\beta_2^2 + N\gamma_2^2;\ B_2 = L\alpha_3\alpha_1 + M\beta_3\beta_1 + N\gamma_3\gamma_1; \\ A_3 = L\alpha_3^2 + M\beta_3^2 + N\gamma_3^2;\ B_3 = L\alpha_1\alpha_2 + M\beta_1\beta_2 + N\gamma_1\gamma_2; \\ C_1 = L\alpha_1\alpha_4 + M\beta_1\beta_4 + N\gamma_1\gamma_4;\ C_2 = L\alpha_2\alpha_4 + M\beta_2\beta_4 + N\gamma_2\gamma_4; \\ C_3 = L\alpha_3\alpha_4 + M\beta_3\beta_4 + N\gamma_3\gamma_4\ F = L\alpha_4^2 + M\beta_4^2 + N\gamma_4^2 + P. \end{array}\right\} (4)$$

Координаты центра a, b, c, согласно разсужденіямъ § 145, опредѣляются при помощи уравненій:

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,$$

т. е.

$$\alpha_1 a + \alpha_2\ b + \alpha_3\ c + \alpha_4 = 0,$$
$$\beta_1 a + \beta_2\ b + \beta_3\ c + \beta_4 = 0,$$
$$\gamma_1 a + \gamma_2\ b + \gamma_3\ c + \gamma_4 = 0;$$

послѣднія уравненія удовлетворяются тождественно. Принимая центръ за новое начало координатъ и не мѣняя направленіе осей, получимъ формулы преобразованія:

$$x = a + x',\ y = b + y',\ z = c + z'.$$

Отъ подстановки функція α преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 = \alpha_1 (a + x') + \alpha_2 (b + y') +$$
$$+ \alpha_3 (c + z') + \alpha_4 = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + (\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c + \alpha_4);$$

но выраженіе, стоящее въ скобкахъ, равняется нулю тождественно, слѣдовательно, функція α обращается въ такую:

$$\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z';$$

другими словами, послѣ преобразованія координатъ функція α обращается въ такую, гдѣ надъ координатами x, y, z поставлены штрихи, а α_4 пропало. Подобнымъ же образомъ отъ того же самого преобразованія координатъ пропадутъ въ функціяхъ β и γ коэффиціенты β_4 и γ_4, такъ что эти функціи обратятся въ выраженія:

$$\beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \ \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'.$$

Такимъ образомъ, если мы не будемъ обращать вниманіе на штрихи, стоящіе надъ координатами, то замѣтимъ, что измѣненіе уравненія (3) отъ сказаннаго преобразованія координатъ состоитъ въ томъ, что коэффиціенты α_4, β_4, γ_4 обращаются въ нуль. Послѣднее же обстоятельство отражается на уравненіи въ раскрытомъ видѣ такимъ образомъ, какъ это высказано въ теоремѣ. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи формулъ (4), коэффиціенты A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, какъ не зависящіе отъ коэффиціентовъ α_4, β_4, γ_4, не мѣняютъ своей величины, коэффиціенты C_1, C_2, C_3 обращаются въ нуль, коэффиціентъ же F обращается въ P. Остается показать, что P есть результатъ подстановки въ уравненіе (1) или, что одно и то же, въ уравненіе (3), координатъ центра. Но это очевидно, ибо первая часть имѣетъ видъ:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P,$$

координаты же центра обращаютъ въ нуль всѣ три функціи α, β, γ и, слѣдовательно, эта первая часть послѣ подстановки, обращается въ P.

173. Итакъ, возьмемъ уравненіе поверхности съ центромъ, отнесенное къ этому послѣднему. Мы видѣли уже, что, если выберемъ за оси координатъ оси поверхности, то уравненіе приметъ еще болѣе простой видъ:

$$\mathfrak{A}_1 x^2 + \mathfrak{A}_2 y^2 + \mathfrak{A}_3 z^2 + P = 0. \qquad (1)$$

Чтобы привести къ виду (1) уравненіе поверхности, отнесенное къ центру, необходимо повернуть систему координатъ такъ вокругъ

начала, совпадающаго съ центромъ, чтобы направленіе осей координатъ совпало съ направленіемъ осей поверхности. Съ этой цѣлью нужно будетъ примѣнить преобразованіе одной прямоугольной системы координатъ въ другую, тоже прямоугольную, при помощи поворота вокругъ начала координатъ.

Формулы преобразованія имѣютъ видъ:

$$x = k_1x' + k_2y' + k_3z'$$

$$y = l_1x' + l_2y' + l_3z' \qquad (2)$$

$$z = m_1x' + m_2y' + m_3z',$$

причемъ между девятью коэффиціентами существуютъ шесть зависимостей, оставляющихъ произвольными только три изъ нихъ; за эти произвольные коэффиціенты могутъ быть приняты, напримѣръ, три Эйлеровскихъ угла (см. § 34). Поставляя вмѣсто x, y и z ихъ выраженія при помощи уравненій (2) въ уравненіе поверхности, отнесенное къ центру:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3yz + P = 0, \quad (3)$$

получимъ новое уравненіе того же вида, что и (3), причемъ коэффиціентъ P не измѣнится; что же касается до другихъ коэффиціентовъ, то они будутъ новые. Задача будетъ состоять въ томъ, чтобы подобрать три Эйлеровыхъ угла такъ, чтобы коэффиціенты B_1, B_2 B_3 пропадали и уравненіе (3) обращалось въ уравненіе (1).

174. Посмотримъ теперь, къ какимъ выкладкамъ приводитъ нахожденіе коэффиціентовъ $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$. Для этой цѣли мы будемъ поступать подобно тому, какъ мы это дѣлали въ §§ 148, 149, 162 и 299 геом. двухъ измѣреній.

Возьмемъ уравненіе поверхности втораго порядка съ центромъ, отнесенное къ этому послѣднему:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + P = 0. \quad (1)$$

Если мы повернемъ систему координатъ вокругъ начала, то коэффиціентъ P не будетъ мѣнять своей величины, что же касается до остальныхъ шести членовъ, то они обратятся въ подобные же шесть членовъ.

Такъ какъ наши выкладки будутъ имѣть большую аналогію съ тѣмъ, что мы говорили о дискриминантѣ уравненія коническаго сѣченія, то уравненіе (1) пере-

пишемъ въ такомъ видѣ:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 + H = 0, \qquad (2)$$

причемъ мы измѣнили только обозначенія коэффиціентовъ для большей аналогіи съ тѣмъ видомъ уравненія, подъ которымъ мы писали въ геом. дв. изм. общее уравненіе коническихъ сѣченій.

Разсмотримъ отдѣльно два случая:

I. $A = 0, C = 0, F = 0$. Въ этомъ случаѣ уравненіе (2) будетъ представлять поверхность съ центромъ, когда ни одинъ изъ коэффиціентовъ B, D, E не равенъ нулю, ибо иначе квадратичная форма

$$2Bxy + 2Dxz + 2Eyz$$

разлагается на два квадрата, и, слѣдовательно, мы будемъ предполагать коэффиціенты D, B, E не равными нулю.

II. Если по крайней мѣрѣ одинъ изъ коэффиціентовъ A, C, F не равенъ нулю, напримѣръ, A не равняется 0, то, умножая на A уравненіе (2), получимъ

$$(Ax + By + Dz)^2 + Ly^2 + 2Myz + Nz^2 + AH = 0\ ^*).$$

175. Если поверхность съ однимъ центромъ, какъ мы это предполагаемъ, то три коэффиціента L, M, N не должны всѣ вмѣстѣ равняться нулю, и можетъ равняться нулю лишь который нибудь одинъ изъ нихъ, или же $L = 0$, $N = 0$, а M не равняется 0.

Положимъ, что L не равняется 0, тогда, продолжая разложеніе на сумму квадратовъ далѣе, получимъ окончательно:

$$L\,(Ax + By + Dz)^2 + (Ly + Mz)^2 + Pz^2 + ALH = 0,$$

гдѣ

$$P = LN - M^2 = A\,(ACF - AE^2 - CD^2 - BF^2 + BDE)\ ^{**}).$$

Для того, чтобы поверхность была съ однимъ центромъ, необходимо, чтобы P не равнялось нулю, другими словами, чтобы не равнялся нулю дискриминантъ

$$ACF - AE^2 - CD^2 - BF^2 + BDE.$$

Это условіе, какъ легко замѣтить, есть общее, ибо въ случаѣ $A = 0$, $C = 0$, $F = 0$ дискриминантъ равенъ BDE и, слѣдовательно, обращается въ нуль, когда одинъ изъ коэффиціентовъ B, D, E равенъ нулю, что мы уже видѣли; въ случаѣ же $L = 0$, $M = 0$ и $N = 0$, дискриминантъ также равенъ нулю.

---

*) Значенія коэффиціентовъ L, M, N см. въ § 96 геом. дв. изм. стр. 92.

**) P обозначеніе § 96 геом. дв. изм.

Если мы въ уравненіи (2) положимъ $H = 0$, то получимъ уравненіе конуса второго порядка, уравненіе котораго, по разложеніи на сумму квадратовъ, можетъ быть приведено къ виду

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0. \qquad (3)$$

Конечно, если всѣ коэффиціенты L, M, N одного знака, то получается точка, или, какъ иногда говорятъ, *мнимый конусъ*. Если дискриминантъ нашей формы будетъ равенъ нулю, то уравненіе (2) при $H = 0$ уже не будутъ приводиться къ виду (3), а въ первой части его будутъ не три квадрата, а только два или даже одинъ. Слѣдовательно, равенство нулю дискриминанта обращаетъ уравненіе конуса въ уравненіе двухъ дѣйствительныхъ, совпадающихъ или мнимыхъ плоскостей; другими словами, первая часть уравненія

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

при равенствѣ нулю дискриминанта можетъ быть разложена на два множителя первой степени такимъ образомъ:

$$(ax + by + cz)(a_1x + b_1y + c_1z) = 0.$$

176. Сдѣлавъ сказанное замѣчаніе относительно значенія равенства нулю дискриминанта, обращаемся къ преобразованію уравненія

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 + H = 0$$

къ виду

$$\mathfrak{A}_1x'^2 + \mathfrak{A}_2y'^2 + \mathfrak{A}_3z'^2 + H = 0,$$

при помощи преобразованія координатъ:

$$x = k_1x' + k_2y' + k_3z'$$
$$y = l_1x' + l_2y' + l_3z'$$
$$z = m_1x' + m_2y' + m_3z'.$$

Начало координатъ при этомъ преобразованіи не мѣняется, а такъ какъ мы предполагаемъ старую и новую системы прямоугольными, то между коэффиціентами k_1, k_2,... существуютъ соотношенія, данныя въ § 31. Итакъ, сдѣлавъ преобразованіе координатъ, мы получаемъ равенство:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = \mathfrak{A}_1x'^2 + \mathfrak{A}_2y'^2 + \mathfrak{A}_3z'^2. \qquad (1)$$

Такъ какъ начало координатъ остается безъ измѣненія, то разстояніе точки отъ начала координатъ, выраженное въ новыхъ координатахъ, должно равняться тако-

вому же разстоянію, выраженному въ новыхъ, слѣдовательно, должно быть

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \qquad (2)$$

Умножая уравненіе (2) на λ и вычитая изъ уравненія (1), получимъ:

$$(A - \lambda)\,x^2 + 2Bxy + (C - \lambda)\,y^2 + 2Dxz + 2Eyz + (F - \lambda)\,z^2 =$$
$$= (\mathfrak{A}_1 - \lambda)\,x'^2 + (\mathfrak{A}_2 - \lambda)\,y'^2 + (\mathfrak{A}_3 - \lambda)\,z'^2. \qquad (*)$$

Но такъ какъ дискриминантъ формы, разсматривавшейся нами, можетъ быть слѣдующимъ образомъ написанъ въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix},$$

то подберемъ λ такъ, чтобы уничтожался дискриминантъ первой части уравненія (*). Получаемъ для опредѣленія λ кубическое уравненіе

$$\begin{vmatrix} A-\lambda, & B, & D, \\ B, & C-\lambda, & E, \\ D, & E, & F-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Уравненіе кубическое всегда имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень, тогда для этого значенія λ первая часть уравненія разлагается на два множителя первой степени съ дѣйствительными или мнимыми коэффиціентами.

Формулы преобразованія координатъ линейныя, какъ относительно старыхъ, такъ и относительно новыхъ координатъ, а потому каждый изъ линейныхъ множителей первой части обратится въ линейную же функцію новыхъ координатъ, а потому и во второй части должно быть произведеніе двухъ линейныхъ множителей. Итакъ, для того же значенія λ долженъ уничтожаться дискриминантъ второй части, что даетъ

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1-\lambda, & 0, & 0 \\ 0, & \mathfrak{A}_2-\lambda, & 0 \\ 0, & 0, & \mathfrak{A}_3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$(\mathfrak{A}_1 - \lambda)\,(\mathfrak{A}_2 - \lambda)\,(\mathfrak{A}_3 - \lambda) = 0. \qquad (4)$$

Это послѣднее уравненіе должно удовлетворяться, очевидно, при тѣхъ же самыхъ значеніяхъ λ, что и уравненіе (3).

Итакъ, коэффиціенты $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ суть ни что иное, какъ корни уравненія (3).

177. Покажемъ, что уравненіе (3) имѣетъ всѣ три дѣйствительныхъ корня. Предположимъ обратное, и пусть одинъ изъ мнимыхъ корней будетъ

$$\lambda = m + \sqrt{-1}\, n,$$

гдѣ m и n вещественныя числа, тогда, обозначая

$$A - m = A_0,\ L - m = C_0,\ F - m = F_0,$$

получимъ

$$\begin{vmatrix} A_0 - \sqrt{-1}\, n, & B, & D \\ B, & C_0 - \sqrt{-1}\, n, & E \\ D, & E, & F_0 - \sqrt{-1}\, n \end{vmatrix} = 0.$$

Перемѣняя въ опредѣлителѣ у корня $\sqrt{-1}$ знакъ и умножая, получимъ

$$\begin{vmatrix} A_0 - \sqrt{-1}\, n, & B, & D \\ B, & C_0 - \sqrt{-1}\, n, & E \\ D, & E, & F_0 - \sqrt{-1}\, n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A + \sqrt{-1}\, n, & B, & D \\ B, & C_0 + \sqrt{-1}\, n, & E \\ D, & E, & F_0 + \sqrt{-1}\, n \end{vmatrix} = 0.$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть переписано такъ

$$\begin{vmatrix} M_1 + n^2, & N_1, & N_2 \\ N_1 & M_2 + n^2, & N_3 \\ N_2, & N_3, & M_3 + n^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

гдѣ

$$M_1 = A_0^2 + B^2 + D^2,\ M_2 = B^2 + C_0^2 + E^2,\ M_3 = D^2 + E^2 + F_0^2,$$

$$N_1 = A_0 B + C_0 B + DE,\ N_2 = A_0 D + BE + F_0 D,$$

$$N_3 = BD + C_0 E + EF_0 \text{ (см. прибавленіе).}$$

Раскрывая уравненіе (1), получимъ

$$n^6 + \mathfrak{M} n^4 + \mathfrak{N} n^2 + \mathfrak{P} = 0, \qquad (2)$$

гдѣ

$$\mathfrak{M} = M_1 + M_2 + M_3 = A_0^2 + C_0^2 + F_0^2 + 2\,(B^2 + D^2 + E^2),$$

$$\mathfrak{N} = M_2 M_3 + M_1 M_3 + M_1 M_2 - N_1^2 - N_2^2 - N_3^2,$$

$$\mathfrak{P} = \begin{vmatrix} M_1, & N_1, & N_2 \\ N_1, & M_2, & N_3 \\ N_2, & N_3, & M_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0, & B, & D \\ B, & C_0, & E \\ D, & E, & F_0 \end{vmatrix}^2.$$

Итакъ мы видимъ, что коэффиціенты $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{P}$, какъ составленные для квадратовъ вещественныхъ чиселъ, положительные.

Легко видѣть, что будетъ положительнымъ также и коэффиціентъ $\mathfrak{N}$. Въ самомъ дѣлѣ,

$$M_1M_2 - N_1{}^2 = (A_0{}^2 + B^2 + D^2)(B^2 + C_0{}^2 + E^2) - (A_0B + BC_0 + DE)^2 =$$

$$= (A_0C_0 - B^2)^2 + (BE - DC^0)^2 + (A_0E - BD)^2.$$

Подобнымъ же образомъ покажемъ, что и выраженія $M_1M_3 - N_2{}^2$, $M_2M_3 - N_3{}^2$ положительныя.

Итакъ мы видимъ, что при всякомъ дѣйствительномъ значеніи n первая часть число положительное и нулемъ можетъ быть лишь въ случаѣ

$$n = 0, \quad \mathfrak{P} = 0,$$

что и показываетъ справедливость утвержденія о дѣйствительности корней нашего уравненія.

Слѣдовательно, рѣшая уравненіе (3) относительно λ, мы получимъ три вещественныхъ значенія, за которыя и могутъ быть приняты коэффиціенты $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$. Послѣ опредѣленія коэффиціентовъ наше уравненіе приметъ видъ

$$\mathfrak{A}_1x^2 + \mathfrak{A}_2y^2 + \mathfrak{A}_3z^2 + H = 0.$$

Отношенія

$$\frac{H}{\mathfrak{A}_1}, \; \frac{H}{\mathfrak{A}_2}, \; \frac{H}{\mathfrak{A}_3},$$

будутъ представлять по абсолютной величинѣ квадраты полуосей

$$a^2, \quad b^2, \quad c^2.$$

178. Что касается направленія осей, то ихъ легко получить, вычисливъ коэффиціенты $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулъ преобразованія (см. § 176), получаемъ

$$x' = k_1x + l_1y + m_1z$$

$$y' = k_2x + l_2y + m_2z$$

$$z' = k_3x + l_3y + m_3z.$$

Сравнивая коэффиціенты при разныхъ членахъ въ выраженіи

$$\mathfrak{A}_1(kx_1 + l_1y + m_1z)^2 + \mathfrak{A}_2(k_2x + l_2y + m_2z)^2 + \mathfrak{A}_3(k_3x + l_3y + m_3z)^2,$$

съ соотвѣтственными коэффиціентами заданной формы, получаемъ 6 уравненій для

редѣленія трехъ независимыхъ косинусовъ:

$$\mathfrak{A}_1 k_1{}^2 + \mathfrak{A}_2 k_2{}^2 + \mathfrak{A}_3 k_3{}^2 = A \qquad (1)$$

$$\mathfrak{A}_1 l_1{}^2 + \mathfrak{A}_2 l_2{}^2 + \mathfrak{A}_3 l_3{}^2 = C \qquad (2)$$

$$\mathfrak{A}_1 m_1{}^2 + \mathfrak{A}_2 m_2{}^2 + \mathfrak{A}_3 m_3{}^2 = F \qquad (3)$$

$$\mathfrak{A}_1 k_1 l_1 + \mathfrak{A}_2 k_2 l_2 + \mathfrak{A}_3 k_3 l_3 = B \qquad (4)$$

$$\mathfrak{A}_1 k_1 m_1 + \mathfrak{A}_2 k_2 m_2 + \mathfrak{N}_3 k_3 m_3 = D \qquad (5)$$

$$\mathfrak{A}_1 l_1 m_1 + \mathfrak{A}_2 l_2 m_2 + \mathfrak{A}_3 l_3 m_3 = E. \qquad (6)$$

Искомыхъ три, а уравненій шесть, но не надо забывать, что между коэффиціентами $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$ съ одной стороны и коэффиціентами $A, B, C, D, \ldots$ съ другой ущеcтвуетъ три соотношенія, изъ которыхъ одно, напримѣръ, получается, складывая уравненія (1), (2), (3):

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 = A + C + F, \qquad (7)$$

ибо $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ суть корни кубическаго уравненія

$$\lambda^3 - (A + C + F)\lambda^2 + Q\lambda - R = 0.$$

Кромѣ соотношенія (7) будутъ еще два:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 = Q,$$

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 = R.$$

Для опредѣленія косинусовъ k_1, l_1, m_1 угловъ, образуемыхъ новою осью x' со старыми осями координатъ, легко получить два линейныхъ уравненія кромѣ уравненія $k_1{}^2 + l_1{}^2 + m_1{}^2 = 1$.

Умножая уравненіе (1) на k_1, уравненіе (4) на l_1, уравненіе (5) на m_1 и складывая, получимъ

$$\mathfrak{A}_1 k_1 = A_1 k_1 + B l_1 + D m_1. \qquad (8)$$

И, наконецъ, другое уравненіе получимъ, умножая (4) на k_1, (2) на l_1, а (6) на m_1 и складывая:

$$\mathfrak{A}_1 l_1 = B k_1 + C l_1 + E m_1.$$

Прямолинейныя образующія.

179. Мы разсматривали уже подробно конусъ и цилиндръ, представляющіе такъ называемыя развертывающіяся на плоскость линейчатыя поверхности. Изъ косыхъ линейчатыхъ поверхностей къ поверхностямъ второго порядка принадлежатъ гиперболическій параболоидъ и однополый гиперболоидъ.

Косая плоскость.

(Гиперболическій параболоидъ).

180. Мы видѣли уже, что уравненіе этой поверхности имѣетъ видъ:

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0,$$

гдѣ $L < 0$, такъ что можно положить $L = -\lambda^2$, откуда уравненіе поверхности можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$\lambda^2 \alpha^2 - \beta^2 = \gamma.$$

Или еще иначе можно переписать такъ:

$$(\lambda\alpha + \beta)\ (\gamma\alpha - \beta) = k\ \frac{\gamma}{k},$$

гдѣ k прямоугольный параметръ.

Приравнивая въ двухъ различныхъ порядкахъ множители первой части множителямъ второй, мы получимъ двѣ системы прямолинейныхъ образующихъ:

$$(I) \begin{cases} \lambda\alpha + \beta = k, \\ \lambda\alpha - \beta = \dfrac{\gamma}{k}, \end{cases} \qquad (II) \begin{cases} \lambda\alpha - \beta = k, \\ \lambda\alpha + \beta = \dfrac{\gamma}{k}, \end{cases}$$

Всѣ образующія системы (I) параллельны, очевидно, плоскости

$$\lambda\alpha + \beta = 0,$$

ибо лежатъ на плоскостяхъ:

$$\lambda\alpha + \beta = k,$$

получающихся при разныхъ значеніяхъ k, которыя всѣ параллельны плоскости

$$\lambda\alpha + \beta = 0.$$

Образующія системы (II) подобнымъ же образомъ параллельны плоскости

$$\lambda\alpha - \beta = 0.$$

Примѣръ.

$$xy + xz - y = 0,$$

$$x(y+z)-y=0,$$
$$(x+y+z)^2-(x-y-z)^2-4y=0.$$

Заданная поверхность, слѣдовательно, будетъ гиперболическій параболоидъ. Переписавъ его уравненіе въ такомъ видѣ:

$$x(y+z)=\frac{y}{k}\,k,$$

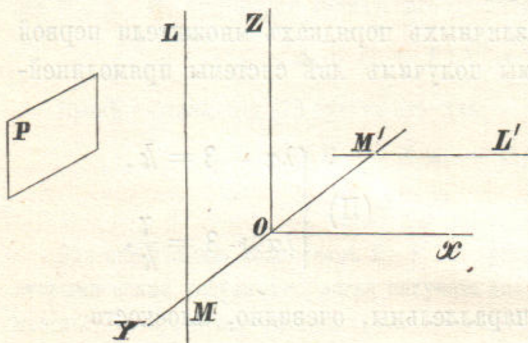
получимъ уравненія двухъ системъ прямолинейныхъ образующихъ:

$$x=\frac{y}{k},\quad y+z=k$$

и второе

$$x=k,\quad y+z=\frac{y}{k}.$$

181. *Задача*. Найти поверхность, образуемую прямыми, проведенными черезъ двѣ заданныя прямыя въ пространствѣ, параллельно нѣкоторой плоскости.



Черт. 257.

Для упрощенія выкладокъ выберемъ за ось y-овъ одну изъ прямыхъ, проведенныхъ черезъ заданныя прямыя L и L_1, параллельно заданной плоскости P. Ось y-овъ пересѣкаетъ, слѣдовательно, двѣ заданныя прямыя въ двухъ точкахъ M и M_1 (см. черт. 257).

Средину O отрѣзка MM_1 беремъ за начало координатъ, а оси OX и OZ проведемъ параллельно заданнымъ прямымъ L и L_1. При такой системѣ координатъ уравненія заданныхъ прямыхъ будутъ имѣть видъ:

$$L\begin{cases} y=+a, \\ x=0, \end{cases} \quad \text{и} \quad L_1\begin{cases} y=-a, \\ z=0. \end{cases}$$

Уравненія любой прямой, проходящей черезъ двѣ заданныя, могутъ быть написаны такъ:

$$x-k\,(y-a)=0,$$
$$z-k_1(y+a)=0,$$

или отсюда

$$\frac{x+ka}{k}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-k_1a}{k}. \qquad (1)$$

Если уравненіе заданной плоскости P будетъ

$$Ax + Bz + C = 0, \tag{2}$$

то условіе параллельности прямой (1) съ плоскостью (2) выразится такимъ образомъ:

$$kA + k_1 B = 0, \tag{3}$$

Уравненіе геометрическаго мѣста прямыхъ (1) получится, какъ результатъ исключенія перемѣнныхъ параметровъ k и k_1 изъ уравненій (1) и (3), въ такомъ видѣ:

$$\frac{Ax}{y-a} + \frac{Bz}{y+a} = 0,$$

или

$$y(Ax + Bz) + a(Ax - Bz) = 0,$$

или, наконецъ,

$$\left(\frac{y + Ax + Bz}{2}\right)^2 - \left(\frac{Ax + Bz - y}{2}\right)^2 + a(Ax - Bz) = 0. \tag{4}$$

Если бы оси координатъ были прямоугольныя, то уравненіе (4) принадлежало бы, очевидно, косой плоскости, согласно его виду.

Очевидно, что и для случая косоугольныхъ координатъ уравненіе опредѣляетъ ту же косую плоскость, ибо отъ косоугольныхъ координатъ къ прямоугольнымъ мы можемъ всегда перейти при помощи формулѣ пробразованія координатъ, которыя, будучи линейными относительны перемѣнныхъ x, y, z, не нарушатъ характера уравненія искомаго геометрическаго мѣста.

Однополый гиперболоидъ.

182. Однополый гиперболоидъ имѣетъ уравненіе такого вида:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1.$$

Преобразовавъ послѣднее такимъ образомъ:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{c^2},$$

$$\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}\right)\left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b}\right) = \left(1 + \frac{\gamma}{c}\right)\left(1 - \frac{\gamma}{c}\right),$$

получимъ уравненія обѣихъ системъ производящихъ:

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} \dfrac{\alpha}{a}+\dfrac{\beta}{b}=\left(1+\dfrac{\gamma}{c}\right)k, \\[2ex] \dfrac{\alpha}{a}-\dfrac{\beta}{b}=\left(1-\dfrac{\gamma}{c}\right)\dfrac{1}{k}, \end{cases}$$

и

$$\mathrm{II}\ \begin{cases} \dfrac{\alpha}{a}+\dfrac{\beta}{b}=\left(1-\dfrac{\gamma}{c}\right)k, \\[2ex] \dfrac{\alpha}{a}-\dfrac{\beta}{b}=\left(1+\dfrac{\gamma}{c}\right)\dfrac{1}{k}, \end{cases}$$

Примѣръ.

$$xy+xz+yz+1=0.$$

Разлагая на сумму квадратовъ, получимъ:

$$(x+y)(y+z)-y^2+1=0,$$

или

$$\left(\frac{x+2y+z}{2}\right)^2-\left(\frac{x-z}{2}\right)^2-y^2+1=0.$$

Это уравненіе однополаго гиперболоида. Представивъ послѣднее уравненіе въ видѣ

$$(x+y)(y+z)=\frac{y+1}{k}\,(y-1)\,k,$$

получимъ уравненія прямолинейныхъ образующихъ:

$$x+y=\frac{y+1}{k},$$

$$y+z=(y-1)\,k,$$

и

$$x+y=(y-1)\,k_1,$$

$$y+z=\frac{y+1}{k_1}.$$

183. *Задача.* Написать для гиперболоида

$$xy + yz + zx + 1 = 0,$$

уравненіе двухъ прямолинейныхъ образующихъ, проходящихъ черезъ заданную на немъ точку M съ координатами

$$x = 1, \quad y = -1 \quad \text{и} \quad z = 3.$$

Для опредѣленія перемѣнныхъ параметровъ k и k_1 въ общихъ формулахъ будемъ имѣть, слѣдовательно, уравненія:

$$\left\{\begin{aligned} 1 - 1 &= \frac{-1+1}{k}, \\ -1 + 3 &= k(-1-1), \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{0}{k}, \\ 2 &= -k.2, \end{aligned}$$

и

$$\left\{\begin{aligned} 1 - 1 &= k_1(-1-1), \\ -1 + 3 &= \frac{-1+1}{k_1}, \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \begin{aligned} 0 &= -k_1.2, \\ 2 &= \frac{0}{k_1}. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, $k = -1$ и $k_1 = 0$; такъ что уравненія искомыхъ образующихъ примутъ такой видъ:

$$\left\{\begin{aligned} x + y &= \frac{y+1}{-1}, \\ y + z &= -1\,(y - 1), \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x + 2y + 1 &= 0, \\ 2y + z - 1 &= 0, \end{aligned}$$

и

$$\left\{\begin{aligned} x + y &= 0\,(y - 1), \\ y + z &= \frac{y+1}{0}, \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x + y &= 0, \\ y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

184. *Задача.* Доказать, что геометрическое мѣсто прямыхъ, проходящихъ черезъ три заданныя прямыя, есть однополый гиперболоидъ.

Проведемъ черезъ каждую изъ заданныхъ прямыхъ по двѣ плоскости, параллельныя каждой въ отдѣльности изъ двухъ другихъ прямыхъ. Полученныя такимъ образомъ шесть плоскостей попарно будутъ параллельны другъ другу и если за начало координатъ возьмемъ точку, симметрично расположенную относительно

всѣхъ этихъ плоскостей, а оси координатъ возьмемъ параллельными заданнымъ прямымъ, то уравненія этихъ трехъ паръ плоскостей будутъ:

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c$$

и уравненія данныхъ прямыхъ будутъ

$$1)\ y = b,\ z = -c; \quad 2)\ z = c,\ x = -a; \quad 3)\ x = a,\ y = -b.$$

Уравненія прямой, пересѣкающей первыя двѣ изъ заданныхъ прямыхъ, будутъ

$$z + c = \lambda\,(y - b),$$
$$z - c = \mu\,(x + a),$$

она же пересѣкаетъ и третью прямую, при условіи

$$c + \mu a + \lambda b = 0.$$

Подставляя сюда значенія λ и μ изъ предшествующихъ уравненій, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста въ такомъ видѣ:

$$c\,(x + a)\,(y - b) + a\,(y - b)\,(z - c) + b\,(z + c)\,(x + a) = 0,$$

или

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0,$$

а это и есть уравненіе однополаго гиперболоида.

Круговыя сѣченія поверхностей второго порядка.

185. Прежде всего ясно, что круговыя сѣченія могутъ существовать лишь у тѣхъ видовъ поверхностей, которыя имѣютъ эллиптическія сѣченія. Къ такимъ поверхностямъ относятся слѣдующія: эллиптическій цилиндръ, эллиптическій параболоидъ и всѣ поверхности съ центромъ.

1) *Эллиптическій цилиндръ.*

186. Уравненіе эллиптическаго цилиндра, приведенное къ простѣйшему виду, можетъ быть написано такъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Преобразуемъ это уравненіе такимъ образомъ, предполагая, что $a > b$:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} - 1 = \frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{a^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2.$$

Положительную величину

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$$

обозначимъ черезъ $\frac{1}{m^2}$; получимъ уравненіе нашего цилиндра въ такомъ видѣ:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}-1=\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{m^2},$$

или иначе

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}-1=\left(\frac{z}{a}+\frac{y}{m}\right)\left(\frac{z}{a}-\frac{y}{m}\right). \quad (1)$$

Если мы пересѣчемъ поверхность цилиндра плоскостью

$$\frac{z}{a}+\frac{y}{m}=k, \quad (2)$$

то въ сѣченіи получится такая же линія, какъ въ сѣченіи плоскостью (2) поверхности

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}-1=k\left(\frac{z}{a}-\frac{y}{m}\right).$$

Послѣднее же уравненіе опредѣляетъ, очевидно, шаръ. Слѣдовательно, искомое сѣченіе есть кругъ.

Мѣняя коэффиціентъ k, мы будемъ получать безчисленное множество круговыхъ сѣченій, плоскости которыхъ параллельны между собою. Другую систему круговыхъ сѣченій получимъ, приравнивая постоянному другой множитель во второй части уравненіе (1). Въ самомъ дѣлѣ, если мы пересѣчемъ поверхность (1) плоскостью

$$\frac{z}{a}-\frac{y}{m}=k_1,$$

то получимъ тоже круговое сѣченіе, только другой системы.

Эллиптическій параболоидъ.

187. Уравненіе эллиптическаго параболоида, какъ мы уже видѣли, можетъ быть приведено къ слѣдующему простѣйшему виду:

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0.$$

Здѣсь мы можемъ считать, что положительное число q меньше положительнаго числа p; если бы было обратное, то мы помѣняли бы ролями координатныя оси y-овъ и z-овъ. Уравненіе параболоида можетъ быть переписано въ такомъ видѣ:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{p}-2x=\frac{x^2}{p}-z^2\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right);$$

$\frac{1}{q}-\frac{1}{p}>0$, а потому $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=\varepsilon^2$, гдѣ ε нѣкоторое дѣйствительное число. Отсюда получаемъ уравненіе

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{p}-2x=\frac{x^2}{p}-z^2\varepsilon^2=\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+z\varepsilon\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-z\varepsilon\right).$$

Послѣдній видъ уравненія заданнаго параболоида показываетъ, что круговыя сѣченія получаются въ плоскостяхъ:

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+z\varepsilon=k, \quad \frac{x}{\sqrt{p}}-z\varepsilon=k_1.$$

Эллипсоидъ.

188. Уравненіе эллипсоида въ простѣйшемъ видѣ можетъ быть написано такъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Мы можемъ предполагать, что $a>b>c$. Уравненіе эллипсоида можно переписать такъ:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-1=x^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right);$$

обозначая черезъ $\frac{1}{m^2}$ и $\frac{1}{n^2}$, положительныя количества $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$ и $\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}$, получаемъ

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-1=\left(\frac{x}{m}+\frac{z}{n}\right)\left(\frac{x}{m}-\frac{z}{n}\right).$$

Круговыя сѣченія получаются въ плоскостяхъ

$$\frac{x}{m}+\frac{z}{n}=k\,,\quad \frac{x}{m}-\frac{z}{n}=k_1\,.$$

Конусъ второго порядка и гиперболоиды.

189. Уравненіе этихъ поверхностей можетъ быть приведено къ слѣдующему простѣйшему виду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+\tau=0\,,$$

гдѣ $\tau=0$ въ случаѣ конуса; въ случаѣ двуполаго гиперболоида $\tau=+1$, въ случаѣ же однополаго $\tau=-1$. Имѣемъ право предположить, что $a<b$. Тогда уравненіе заданной поверхности можно переписать въ такомъ видѣ:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}+\tau=z^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right);$$

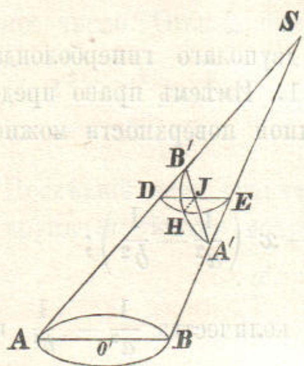
обозначая черезъ $\frac{1}{m^2}$ и $\frac{1}{n^2}$ положительныя количества $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$ и $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, находимъ, что круговыя сѣченія получаются въ плоскостяхъ

$$\frac{z}{n}-\frac{x}{m}=k\,,\quad \frac{z}{n}+\frac{x}{m}=k_1\,.$$

190. Резюмируя сказанное о круговыхъ сѣченіяхъ поверхностей второго порядка, мы замѣчаемъ, что эти круговыя сѣченія лежатъ въ двухъ системахъ плоскостей. Въ эллиптическомъ цилиндрѣ плоскости круговыхъ сѣченій параллельны направленіямъ большихъ осей эллиптическихъ сѣченій цилиндра, перпендикулярныхъ къ направленію образующихъ. Два круговыхъ сѣченія, принадлежащія разнымъ системамъ, образуютъ равные углы съ діаметральною плоскостью, представляющею геометрическое мѣсто указанныхъ выше большихъ осей перпендикулярныхъ сѣченій, и перпендикулярны къ другой діаметральной плоскости. Въ эллиптическомъ параболоидѣ происходитъ то же самое. Въ эллипсоидѣ круговыя сѣченія параллельны направленію средней оси, перпендикулярны къ плоскости меньшей и большей осей, и два круговыхъ сѣченія, принадлежащія разнымъ систе-

мамъ, лежатъ въ двухъ пересѣкающихся плоскостяхъ, образующихъ равные углы съ направленіями малой и большой осей. Въ гиперболоидахъ и конусѣ имѣетъ мѣсто то же обстоятельство, которое замѣчено нами въ цилиндрѣ и параболоидѣ.

191. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что всякій конусъ второго порядка можетъ быть разсматриваемъ, какъ наклонный круговой конусъ. Разсматривая круговой наклонный конусъ, видимъ, что плоскости, параллельныя основанію, даютъ первую систему круговыхъ сѣченій; легко геометрически доказать существованіе второй системы круговыхъ сѣченій. Пусть S вершина наклоннаго конуса, имѣющаго своимъ основаніемъ кругъ AB (см. черт. 258); проведемъ черезъ прямую SO, проходящую черезъ вершину S и центръ O основанія, плоскость ASB, перпендикулярную къ плоскости основанія; такъ какъ всякая плоскость, параллельная основанію, пересѣкаетъ конусъ по кругу, имѣющему діаметромъ слѣдъ сѣкущей плоскости на плоскости ASB, то отсюда слѣдуетъ, что эта плоскость ASB раздѣляетъ конусъ на двѣ симметричныя части; слѣдовательно, это главная плоскость. Въ этой главной плоскости ASB проведемъ линію $B'A'$ антипараллельную къ AB, т. е. такую, чтобы уголъ $SA'B'$ былъ равенъ углу SAB; затѣмъ черезъ прямую $A'B'$ проведемъ плоскость, перпендикулярную къ главной плоскости ASB; сѣченіе конуса этой плоскостью будетъ кругъ $B'HA'$.



Черт. 258.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ черезъ какую нибудь точку H кривой $B'HA'$ плоскость, параллельную основанію; эта плоскость пересѣчетъ конусъ по кругу, а плоскость $B'HA'$ по линію HI, перпендикулярной къ главному сѣченію. Въ этомъ кругѣ DHE имѣемъ: $HI^2 = DI\,.\,IE$. Съ другой стороны, подобные треугольники DIB', EIA' даютъ: $DI\,.\,IE = B'I\,.\,IA'$; такимъ образомъ, $HI^2 = BI\,.\,IA'$, и, слѣдовательно, точка H есть точка окружности, описанной на $B'A'$, какъ на діаметрѣ. Сѣченія, параллельныя $B'HA'$, называются *антипараллельными* по отношенію къ основанію.

192. Соображенія о круговыхъ сѣченіяхъ конуса прилагаются съ удобствомъ въ теоріи проекцій географическихъ картъ.

Пусть шаръ $ABCD$, имѣющій центромъ точку O (см. черт. 259), представляетъ поверхность земли. Проектируемъ при помощи перспективы различныя точки M поверхности шара на плоскость экватора CA, принимая за точку глаза полюсъ D, соотвѣтствующій экватору CA. Тогда всякой точкѣ M шара будетъ соотвѣтствовать точка m на плоскости экватора. Совокупность точекъ M на

плоскости экватора представляетъ собою карту проектируемой поверхности шара, такъ что каждой линіи на поверхности шара будетъ соотвѣтствовать соотвѣтственная линія на картѣ. Этотъ способъ проектированія извѣстенъ подъ названіемъ *стереографической проекціи.* Основное свойство стереографической проекціи состоитъ въ томъ, что каждому кругу на поверхности шара соотвѣтствуетъ кругъ въ проекціи.

Черт. 259.

Обратимся къ чертежу; тогда замѣчаемъ, что всякій кругъ EF на поверхности шара проектируется при помощи конуса EFD, причемъ проекціею круга EF будетъ линія ef пересѣченія разсматриваемаго наклоннаго кругового конуса съ плоскостью экватора AC. Но легко замѣтить, что для сказаннаго конуса плоскости круга EF и экватора CA суть двѣ антипараллельныя плоскости, поэтому проекція ef есть круговое сѣченіе разсматриваемаго конуса EFD.

Касательныя плоскости и нормали къ поверхностямъ второго порядка.

193. Разсмотримъ сначала цилиндры. Если заданъ какой нибудь цилиндръ, все равно, эллиптическій, гиперболическій или параболическій, и возьмемъ на немъ одну изъ прямолинейныхъ образующихъ L, то всякая плоскость, проведенная черезъ эту образующую, пересѣкаетъ поверхность цилиндра еще по нѣкоторой другой прямолинейной образующей L'. Если теперь эту вторую образующую L' мы будемъ перемѣщать вдоль по поверхности цилиндра, приближая ее къ кривой L, то плоскость, проходящая черезъ двѣ эти образующія, вращаясь вокругъ образующей L, будетъ стремиться совпасть съ нѣкоторою плоскостью, проходящею черезъ образующую L и называемою *касательною плоскостью* цилиндра.

Касательная плоскость касается цилиндра во всѣхъ точкахъ образующей, черезъ которую она проходитъ. Это надо понимать такъ: какою бы плоскостью P, не параллельною образующимъ цилиндра, мы ни пересѣкали систему, образуемую цилиндромъ съ его касательною плоскостью, всегда въ плоскости P слѣдомъ цилиндра будетъ нѣкоторая линія второго порядка, слѣдомъ же касательной плос-

кости будетъ касательная къ этой линіи второго порядка, проведенная въ той ея точкѣ M, которая представляетъ слѣдъ на плоскости P той прямолинейной образующей L, по которой касательная плоскость касается цилиндра.

Что касается нахожденія уравненія касательной плоскости цилиндра, то выкладки будутъ, какъ и слѣдуетъ ожидать, тождественны съ тѣми выкладками, при помощи которыхъ мы находили касательныя прямыя къ линіямъ второго порядка (см. §§ 122, 123, 176, 177 геом. двухъ изм.).

Для параболическаго цилиндра

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

получимъ уравненіе касательной плоскости въ такомъ видѣ:

$$2\alpha_0\alpha + \beta + \beta_0 = 0,$$

гдѣ

$$\alpha^2_0 + \beta_0 = 0.$$

Эта касательная плоскость касается цилиндра вдоль по образующей $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$.

Для эллиптическаго и гиперболическаго цилиндра

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0$$

уравненіе касательной плоскости будетъ имѣть видъ

$$L\alpha_0\alpha + \beta_0\beta + P = 0,$$

гдѣ

$$L\alpha^2_0 + \beta^2_0 + P = 0.$$

Эта касательная плоскость касается цилиндра вдоль по образующей $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$.

194. Обращаемся теперь къ другимъ поверхностямъ второго порядка.

Разсмотримъ сначала параболоиды:

$$L\alpha^2 + \beta^2 + \gamma = 0. \qquad (1)$$

Возьмемъ на этомъ параболоидѣ точку M_0 $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Такъ какъ точка M_0 лежитъ на параболоидѣ, то должно быть

$$L\alpha^2_0 + \beta^2_0 + \gamma_0 = 0. \qquad (2)$$

Какія бы кривыя мы ни проводили на поверхности параболоида через точку M_0, касательныя къ этимъ кривымъ, проведенныя въ ихъ общей точкѣ M_0, лежать въ одной вполнѣ опредѣленной плоскости, которая называется касательною плоскостью къ параболоиду въ точкѣ M_0. Найдемъ теперь уравненіе этой плоскости. Мы будемъ разсуждать, очевидно, такъ: проведемъ черезъ точку M_0 и черезъ нѣкоторую другую точку M_1 параболоида прямую и затѣмъ покажемъ, что по какой бы кривой мы ни приближали точку M_1 вдоль по поверхности параболоида къ точкѣ M_0, всегда прямая $M_0 M_1$ будетъ стремиться, вращаясь вокругъ точки M_0, попасть на нѣкоторую вполнѣ опредѣленную плоскость, проходящую черезъ точку M_0. Эта плоскость и есть такъ называемая *касательныя плоскость*.

Уравненіе всякой хорды, проведенной черезъ точку M_0, можетъ быть написано такъ:

$$\frac{\alpha - \alpha_0}{l} = \frac{\beta - \beta_0}{m} = \frac{\gamma - \gamma_0}{n}. \tag{3}$$

Координаты другого конца хорды M_1 получатся черезъ рѣшеніе относительно x, y, z двухъ уравненій (3) и уравненія (1) заданной поверхности. Но уравненіе (1) можно замѣнить результатомъ вычитанія изъ него уравненія (2), что даетъ

$$L(\alpha - \alpha_0)(\alpha + \alpha_0) + (\beta - \beta_0)(\beta + \beta_0) + \gamma - \gamma_0 = 0.$$

На основаніи системы (3) послѣднее уравненіе можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

$$Ll(\alpha + \alpha_0) + m(\beta + \beta_0) + n = 0. \tag{4}$$

По какой бы кривой мы ни приближали точку M_1 къ точкѣ M_0, уравненіе (4) въ предѣлѣ обращается въ такое:

$$2Ll\alpha_0 + 2m\beta_0 + n = 0, \tag{5}$$

ибо, при приближеніи точки M_1 къ точкѣ M_0, α_1, β_1, γ_1 стремятся обратиться въ α_0, β_0, γ_0. Исключая изъ уравненія (5) и уравненій (3) l, m, n, получимъ уравненіе искомой касательной плоскости:

$$2L\alpha_0(\alpha - \alpha_0) + 2\beta_0(\beta - \beta_0) + \gamma - \gamma_0 = 0;$$

раскрывая скобки, получимъ:

$$2L\alpha\alpha_0 + 2\beta\beta_0 + \gamma - 2L\alpha^2{}_0 - 2\beta^2{}_0 - \gamma_0 = 0;$$

на основаніи же уравненія (2) получаемъ уравненіе искомой касательной плоскости въ слѣдующемъ видѣ:

$$2L\alpha\alpha_0 + 2\beta\beta_0 + \gamma + \gamma_0 = 0. \qquad (6)$$

195. Покажемъ теперь, что касательная плоскость въ точкѣ M_0 къ эллиптическому параболоиду имѣетъ съ поверхностью одну лишь общую точку M_0, касательная же плоскость въ точкѣ M_0 къ гиперболическому параболоиду встрѣчается съ поверхностью по двумъ прямолинейнымъ образующимъ, проходящимъ черезъ точку M_0.

Въ самомъ дѣлѣ, складывая уравненія (1) и (2) и изъ полученной суммы вычитая уравненіе (6), получимъ:

$$L(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = 0.$$

Отсюда очевидно, что уравненію (7) при $\alpha > 0$ нельзя иначе удовлетворить, какъ полагая за разъ $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$; тогда и γ должно равняться γ_0. Итакъ мы видимъ, что другихъ точекъ встрѣчи кромѣ точки M_0, не имѣется.

Въ случаѣ косой плоскости $L < 0$. Полагая $L = -\lambda^2$, получимъ

$$\lambda^2(\alpha - \alpha_0)^2 - (\beta - \beta_0)^2 = 0,$$

откуда получаемъ или

$$\lambda(\alpha - \alpha_0) + (\beta - \beta_0) = 0,$$

или

$$\lambda(\alpha - \alpha_0) - (\beta - \beta_0) = 0,$$

что даетъ, въ связи съ уравненіемъ (1), двѣ образующія, проходящія черезъ точку M_0.

196. Обращаемся теперь, наконецъ, къ поверхностямъ съ центромъ. Общій видъ уравненія этихъ поверхностей есть

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P = 0. \qquad (1)$$

Возьмемъ на поверхности точку $M_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$; тогда должно имѣть мѣсто соотношеніе

$$L\alpha_0{}^2 + M\beta_0{}^2 + N\gamma_0{}^2 + P = 0. \qquad (2)$$

Уравненіе хорды, проходящей черезъ точку M_0, имѣетъ видъ:

$$\frac{\alpha-\alpha_0}{l}=\frac{\beta-\beta_0}{m}=\frac{\gamma-\gamma_0}{n}. \qquad (3)$$

Уравненіе заданной поверхности, черезъ вычитаніе изъ него уравненія (2), можетъ быть приведено къ виду

$$L(\alpha-\alpha_0)(\alpha+\alpha_0)+M(\beta-\beta_0)(\beta+\beta_0)+N(\gamma-\gamma_0)(\gamma+\gamma_0)=0.$$

Это уравненіе, на основаніи уравненій (3), получаетъ видъ:

$$Ll(\alpha+\alpha_0)+Mm(\beta+\beta_0)+Nn(\gamma+\gamma_0)=0.$$

Приближая другой конецъ хорды вдоль по поверхности къ точкѣ M_0, получимъ

$$Ll.\,2\alpha_0+Mm.\,2\beta_0+Nn.\,2\gamma_0=0,$$

или окончательно

$$Ll\alpha_0+Mm\beta_0+Nn\gamma_0=0. \qquad (4)$$

Уравненіе искомой касательной плоскости получится черезъ исключеніе буквъ l, m, n изъ уравненія (4) при помощи уравненій (3):

$$L\alpha_0(\alpha-\alpha_0)+M\beta_0(\beta-\beta_0)+N\gamma_0(\gamma-\gamma_0)=0.$$

Послѣднее уравненіе, на основаніи соотношенія (2), можетъ быть окончательно написано такъ:

$$L\alpha\alpha_0+M\beta\beta_0+N\gamma\gamma_0+P=0. \qquad (5)$$

197. Покажемъ теперь, что въ случаѣ эллипсоида и двуполаго гиперболоида касательная плоскость (5) имѣетъ съ поверхностью одну лишь точку общую: точку касанія M_0; въ случаѣ же конуса касательная плоскость въ точкѣ M_0 касается поверхности вдоль по всей прямолинейной образующей, проходящей черезъ точку M_0, а въ случаѣ однополаго гиперболоида касательная плоскость въ точкѣ M_0 пересѣкаетъ поверхность по двумъ образующимъ, проходящимъ черезъ точку M_0.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ уравненія (1), (2) и (5) предыдущаго

параграфа

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P = 0, \qquad (1)$$

$$L\alpha_0{}^2 + M\beta_0{}^2 + N\gamma_0{}^2 + P = 0, \qquad (2)$$

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 + P = 0. \qquad (5)$$

Складывая уравненія (1) и (2) и вычитая изъ результата удвоенное (5), получимъ:

$$L(\alpha - \alpha_0)^2 + M(\beta - \beta_0)^2 + N(\gamma - \gamma_0)^2 = 0. \qquad (*)$$

Перенеся въ написанныхъ уравненіяхъ (1), (2) и (5) члены $N\gamma^2$, $N\gamma_0{}^2$ и $N\gamma\gamma_0$ во вторыя части, можемъ исключить коэффиціентъ N и функціи γ, γ_0, перемножая первыя два уравненія и вычитая квадратъ третьяго. Получаемъ:

$$(L\alpha^2 + M\beta^2 + P)(L\alpha_0{}^2 + M\beta_0{}^2 + P) - (L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + P)^2 = 0.$$

Это уравненіе можно представить въ такомъ видѣ:

$$LM(\alpha\beta_0 - \beta\alpha_0)^2 + P[L(\alpha - \alpha_0)^2 + M(\beta - \beta_0)^2] = 0;$$

на основаніи же уравненія (*), получаемъ окончательно слѣдующее уравненіе:

$$LM(\alpha\beta_0 - \beta\alpha_0)^2 - NP(\gamma - \gamma_0)^2 = 0. \qquad (**)$$

Если два произведенія LM и PN разныхъ знаковъ, то послѣднему уравненію, очевидно, возможно не иначе удовлетворить, какъ полагая $\gamma = \gamma_0$ и $\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\beta}{\beta_0}$, что даетъ одну только точку $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. LM и PN разныхъ знаковъ только въ случаѣ эллипсоида и двуполаго гиперболоида.

Если $P = 0$, что имѣетъ мѣсто въ случаѣ конуса, то послѣднее уравненіе даетъ $\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\beta}{\beta_0}$, что даетъ прямолинейную образующую, проходящую черезъ точку M_0.

Наконецъ, въ случаѣ однополаго гиперболоида LM и NP одинаковыхъ знаковъ, и тогда первая часть уравненія (**) разлагается на два множителя, что даетъ двѣ образующія поверхности.

Случай, когда всѣ коэффиціенты L, M, N, P одного знака мы не разсматриваемъ, какъ не дающій дѣйствительныхъ поверхностей.

198. Если мы возставимъ къ касательной плоскости въ точкѣ касанія перпендикуляръ, то этотъ перпендикуляръ носитъ названіе *нормали* поверхности въ точкѣ касанія.

Если указана точка M_0 на поверхности и положеніе касательной плоскости въ этой точкѣ, то нахожденіе нормали представляетъ простую задачу проведенія черезъ точку пространства перпендикуляра къ заданной плоскости. Такъ, напримѣръ, пусть задано уравненіе эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

и пусть задана точка M_0 на этомъ эллипсоидѣ, координаты которой пусть будутъ x_0, y_0, z_0, удовлетворяющія уравненію

$$\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}+\frac{z_0{}^2}{c^2}=1.$$

Уравненіе касательной плоскости къ заданному эллипсоиду въ точкѣ M_0 будетъ

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1.$$

Отсюда очевидно, что уравненіе нормали въ точкѣ M_0 будетъ:

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}.$$

Общія свойства поверхностей второго порядка.

199. Общее уравненіе поверхности второго порядка

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+2B_1yz+2B_2xz+2B_3xy+2C_1x+2C_2y+2C_3z+F=0$$

заключаетъ 10 членовъ, и, слѣдовательно, поверхность, опредѣляемая этимъ уравненіемъ, зависитъ отъ девяти произвольныхъ параметровъ, за которые могутъ быть приняты девять отношеній девяти изъ числа коэффиціентовъ къ десятому—и, слѣдовательно, видъ и положеніе поверхности второго порядка въ пространствѣ вполнѣ опредѣляются девятью геометрическими условіями, предполагая, что каж-

дому геометрическому условію соотвѣтствуетъ одно, и только одно, соотношеніе между коэффиціентами. Такъ, напримѣръ, черезъ всякія 9 точекъ въ пространствѣ можно провести, по крайней мѣрѣ, одну поверхность второго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, требованіе, чтобы поверхность второго порядка проходила черезъ заданную точку $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$, сводится къ указанію зависимости между коэффиціентами уравненія поверхности второго порядка, получающейся изъ уравненія поверхности по подстановкѣ вмѣсто x, y, z координатъ x_0, y_0, z_0 заданной точки.

Подобнымъ же образомъ даетъ одну зависимость между коэффиціентами требованіе, чтобы заданная плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

была касательною къ поверхности второго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая координаты точки касанія заданной плоскости съ поверхностью второго порядка $F(x, y, z) = 0$ черезъ x_0, y_0, z_0, мы получимъ, по правиламъ, изложеннымъ въ §§ 193 — 197, уравненіе касательной плоскости въ такомъ видѣ

$$\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D} = 0,$$

гдѣ въ коэффиціенты $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ входятъ координаты x_0, y_0, z_0 точки касанія. Для того, чтобы заданная плоскость была касательная къ поверхности въ точкѣ (x_0, y_0, z_0), необходимо, чтобы существовала пропорція

$$\frac{\mathfrak{A}}{A} = \frac{\mathfrak{B}}{B} = \frac{\mathfrak{C}}{C} = \frac{\mathfrak{D}}{D}.$$

Эти три уравненія и уравненіе $F(z_0, y_0, z_0) = 0$ даютъ возможность исключить три координаты x_0, y_0, z_0 точки касанія и получить, вообще говоря, одну зависимость между коэффиціентами заданнаго уравненія. Итакъ, очевидно, что для полнаго заданія поверхности нужно задать девять касательныхъ плоскостей.

Можно иначе произвести выкладку, принимая въ соображеніе, что касательная плоскость, какъ мы видѣли уже, встрѣчаетъ поверхность второго порядка по системѣ двухъ прямыхъ или же въ одной точкѣ, что соотвѣтствуетъ случаю двухъ мнимыхъ сопряженныхъ прямыхъ. Поэтому, выразить, что заданная плоскость есть касательная плоскость къ поверхности, это все равно, что написать условіе того, что линія пересѣченія плоскости съ поверхностью сводится къ системѣ двухъ прямыхъ.

Выразить, что заданная плоскость касается поверхности въ опредѣленной своей точкѣ, равносильно заданію трехъ условій между коэффиціентами. Выразить, что поверхность второго порядка есть конусъ, равносильно тому, чтобы разложить первую часть уравненія поверхности на сумму квадратовъ въ видѣ

$$L\alpha^2 + L_1\beta^2 + \gamma^2 + P = 0,$$

и затѣмъ приравнять нулю выраженіе P, которое, очевидно, будетъ составлено вполнѣ опредѣленнымъ образомъ изъ коэффиціентовъ уравненія поверхности второго порядка. То же условіе, чтобы заданная поверхность была конусомъ, можно получить, выражая условіе того, что центръ поверхности лежитъ на самой поверхности.

Условіемъ того, чтобы заданная поверхность второго порядка была параболоидомъ, является, очевидно, равенство нулю коэффиціента при z^2 въ квадратномъ трехчленѣ

$$Rz^2 + 2Sz + T,$$

который остается при разложеніи на сумму квадратовъ уравненія (1) по выдѣленіи двухъ квадратовъ, заключающихъ x и y. Это условіе, какъ легко замѣтить, даетъ уравненіе

$$R = A_1A_2A_3 - A_1B_1^2 - A_2B_2^2 - A_3B_3 + 2B_1B_2B_3 = 0.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что 8 точекъ достаточно для опредѣленія конуса и параболоида.

Въ случаѣ эллиптическаго и гиперболическаго цилиндра должны удовлетворяться два условія:

$$R = 0 \text{ и } S = 0.$$

Итакъ мы видимъ, что семь точекъ опредѣляютъ каждый изъ этихъ цилиндровъ.

Въ случаѣ параболическаго цилиндра, послѣ выдѣленія перваго квадрата, должны пропадать всѣ три члена второй степени въ остающемся многочленѣ, что даетъ три условія.

Мы видѣли уже, что всякая прямая линія въ пространствѣ встрѣчаетъ поверхность второго порядка не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ, которыя могутъ совпадать и дѣлаться мнимыми. Кромѣ того, мы видѣли, что если прямая линія имѣетъ три общія точки съ поверхностью второго порядка, то она должна лежать въ этой поверхности, что имѣетъ мѣсто въ линейчатыхъ поверхностяхъ. Итакъ мы видимъ, что заданіе одной образующей линейчатой поверхности равносильно заданію трехъ точекъ и, слѣдовательно, даетъ три условія, такъ что, если задано будетъ 4 или большее число точекъ на прямой, то условій не будетъ все-таки больше трехъ, а потому трехъ прямыхъ достаточно для опредѣленія поверхности второго порядка. Три произвольныя прямыя опредѣляютъ однополый гиперполоидъ; двѣ прямыя и двѣ точки опредѣляютъ косую плоскость. Пять прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку, опредѣляютъ конусъ, ибо, если мы пересѣчемъ этотъ пучекъ прямыхъ нѣкоторою плоскостью P, то въ этой плоскости получимъ пять точекъ пересѣченія, которыя опредѣлятъ коническое сѣченіе, опредѣляющее вполнѣ конусъ.

200. Всѣ тѣ общія заключенія, которыя мы приводили, излагая теорію коническихъ сѣченій, начиная съ § 234, обобщаются такъ или иначе въ теоріи поверх-

ностей второго порядка. Начнемъ съ сокращеннаго способа. Этотъ способъ можетъ служить и въ примѣненіи къ поверхностямъ второго порядка, какъ и въ теоріи коническихъ сѣченій; такъ, напримѣръ, уравненіе

$$S - kS' = 0,$$

гдѣ S и S' суть многочлены второй степени относительно буквъ x, y, z, опредѣляетъ пучекъ поверхностей второго порядка, проходящихъ черезъ кривую встрѣчи двухъ поверхностей второго порядка $S = 0$ и $S' = 0$.

Теорема. Черезъ линію пересѣченія двухъ поверхностей второго порядка и черезъ точку можно провести одну поверхность второго порядка, и только одну.

Пусть $S = 0$ и $S' = 0$ уравненія двухъ заданныхъ поверхностей второго порядка. Уравненіе

$$S - kS' = 0,$$

въ которомъ k есть произвольный параметръ, представляетъ поверхность второго порядка, проходящую черезъ неплоскую кривую четвертаго порядка пересѣченія двухъ заданныхъ поверхностей $S = 0$, $S' = 0$. Ясно, что параметръ k можно опредѣлить изъ того условія, чтобы поверхность проходила черезъ точку M, взятую по произволу въ пространствѣ. Такимъ образомъ, черезъ линію пересѣченія двухъ данныхъ поверхностей второго порядка и черезъ данную точку въ пространствѣ можно всегда провести одну поверхность второго порядка. Легко доказать, что такихъ поверхностей можно провести только одну. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ черезъ точку M какую нибудь совершенно произвольную плоскость P. Эта плоскость встрѣчаетъ двѣ поверхности второго порядка $S = 0$ и $S' = 0$ по двумъ коническимъ сѣченіямъ L и L'. Эти коническія сѣченія, находясь въ одной и той же плоскости P, имѣютъ, согласно изложенной теоріи коническихъ сѣченій, четыре общія точки. Эти точки суть тѣ, въ которыхъ плоскость P встрѣчаетъ указанную выше линію четвертаго порядка, черезъ которую и черезъ точку M мы желаемъ провести поверхность второго порядка. Итакъ, искомая поверхность второго порядка должна, понятно, проходить черезъ точку M и черезъ четыре указанныя точки; слѣдовательно, коническое сѣченіе, которое лежитъ въ пересѣченіи искомой поверхности съ плоскостью P, должно проходить черезъ пять указанныхъ точекъ, и, слѣдовательно, это коническое сѣченіе пятью указанными точками опредѣляется вполнѣ, и, слѣдовательно, во всякой плоскости, проведенной черезъ точку M, получается вполнѣ опредѣленное сѣченіе искомой поверхности, что показываетъ, что искомая поверхность есть единственная.

Слѣдствіе. Пусть $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ будутъ уравненія двухъ плоскостей; тогда уравненіе

$$S - k\alpha\beta = 0,$$

гдѣ $S = 0$ есть уравненіе нѣкоторой поверхности второго порядка, опредѣляетъ

при всевозможныхъ k различныя поверхности второго порядка, проходящія чрезъ два коническія сѣченія, лежащія въ пересѣченіи поверхности $S=0$ плоскостями $\alpha=0$ и $\beta=0$. Подобнымъ же образомъ уравненіе

$$\alpha\beta - k\gamma\delta = 0$$

представляетъ всѣ поверхности второго порядка, проходящія черезъ 4 прямыя пересѣченія двухъ системъ плоскостей

$$\alpha\beta = 0, \ \gamma\delta = 0.$$

Эти четыре прямыя составляютъ косой четыреугольникъ.

Теорема. Если два коническія сѣченія, расположенныя въ двухъ различныхъ плоскостяхъ, имѣютъ двѣ общія точки, то черезъ эти коническія сѣченія можно провести безчисленное множество поверхностей второго порядка.

Если на каждомъ коническомъ сѣченіи мы возьмемъ по три другихъ точки, то получимъ всего восемь точекъ вмѣстѣ съ двумя общими. Восемь же точекъ не опредѣляютъ поверхности второго порядка, и, слѣдовательно, черезъ нихъ можно провести безчисленное множество поверхностей второго порядка. Положимъ, что у насъ проведена одна изъ этихъ поверхностей второго порядка. Плоскости заданныхъ коническихъ сѣченій встрѣчаютъ эту поверхность по двумъ коническимъ сѣченіямъ, изъ которыхъ каждое имѣетъ пять общихъ точекъ съ однимъ изъ заданныхъ и, слѣдовательно, съ нимъ совпадаетъ. Отсюда получаемъ, что всякая поверхность, проведенная черезъ указанныя 8 точекъ, проведена тѣмъ самымъ черезъ оба заданныхъ коническихъ сѣченія. Для полнаго опредѣленія поверхности достаточно одной внѣшней точки (девятой).

Докажемъ эту теорему еще аналитически. Примемъ за плоскости xy и xz плоскости обоихъ коническихъ сѣченій, а за плоскость yz какую нибудь плоскость; такъ какъ оба коническихъ сѣченія пересѣкаютъ ось x въ однѣхъ и тѣхъ же точкахъ, то уравненія ихъ въ ихъ плоскостяхъ имѣютъ видъ:

$$x^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + F = 0,$$

$$x^2 + A''z^2 + 2B'xz + 2Cx + 2C''z + F = 0.$$

Легко усмотрѣть, что всякая поверхность второго порядка, проходящая черезъ оба эти коническія сѣченія, представляется уравненіемъ:

$$x^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0,$$

въ которомъ коэффиціентъ B произволенъ. Точка, не лежащая въ плоскостяхъ коническихъ сѣченій, опредѣляетъ вполнѣ поверхность.

201. Разсмотримъ теперь неплоскую кривую пересѣченія двухъ поверхностей второго порядка. Изъ соображеній, подобныхъ приведеннымъ въ § 234 (Геом. дв.

изм.) черезъ исключенiе z изъ двухъ уравненiй поверхностей второго порядка получается уравненiе $\Omega(x, y) = 0$ четвертой степени относительно x и y. Такимъ образомъ мы замѣчаемъ, что линiя пересѣченiя двухъ поверхностей второго порядка, вообще говоря, проектируется на плоскость xy, а слѣдовательно, на всякую плоскость, ибо положенiе плоскости xy произвольно, по кривой четвертаго порядка. Изъ этого общаго замѣчанiя будутъ слѣдовать исключенiя. Можетъ случиться, что функцiя четвертой степени $\Omega(x, y)$ разлагается на два множителя, изъ которыхъ одинъ первой степени вида

$$ax + by + c,$$

а другой третьей степени относительно x и y. Въ этомъ случаѣ двѣ разматриваемыя поверхности второго порядка имѣютъ общую прямолинейную образующую и, кромѣ того, пересѣкаются еще по нѣкоторой кривой линiи, которая имѣетъ своею проекцiею на плоскости линiю третьяго порядка.

202. *Теорема.* Если двѣ заданныя поверхности второго порядка имѣютъ общую дiаметральную плоскость P, соотвѣтствующую, какъ и въ той, такъ и въ другой поверхности, хордамъ одного и того же направленiя, то проекцiя по направленiю хордъ линiи пересѣченiя этихъ двухъ поверхностей на плоскости P будетъ коническое сѣченiе.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы примемъ эту дiаметральную плоскость P за плоскость xy, а ось z расположимъ параллельно направленiю разсматриваемыхъ хордъ, то очевидно, что уравненiя двухъ заданныхъ поверхностей могутъ быть написаны въ такой формѣ:

$$Az^2 + C = 0, \quad A'z^2 + C' = 0,$$

гдѣ A и A' суть постоянныя числа, а C и C' — полиномы второй степени относительно x и y. Уравненiе проекцiи линiи пересѣченiя на плоскости P мы получимъ, исключая изъ уравненiй заданныхъ поверхностей координату z. Получаемъ уравненiе второй степени

$$A'C - C'A = 0.$$

203. *Теорема.* Если пять точекъ линiи пересѣченiя двухъ поверхностей второго порядка лежатъ въ одной плоскости, причемъ четыре изъ числа этихъ точекъ не лежатъ на одной прямой, то кривая пересѣченiя обращается въ систему двухъ коническихъ сѣченiй, лежащихъ въ нѣкоторыхъ двухъ плоскостяхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пересѣчемъ систему нашихъ поверхностей какою нибудь плоскостью P. Такъ какъ эта плоскость P встрѣчаетъ каждую изъ поверхностей по коническому сѣченiю, то ясно, что эта плоскость не можетъ пересѣкать искомую кривую Σ встрѣчи двухъ заданныхъ поверхностей второго порядка болѣе, чѣмъ въ четырехъ точкахъ. По условiю теоремы, пять точекъ, общихъ и той и другой поверхности, лежатъ на одной плоскости, которую мы и можемъ принять за

плоскость P. Тогда эта плоскость будетъ пересѣкать заданныя поверхности второго порядка по коническимъ сѣченіямъ, имѣющимъ пять общихъ точекъ и, слѣдовательно, совпадающимъ между собою. Итакъ, наши двѣ поверхности второго порядка встрѣчаются, слѣдовательно, по нѣкоторому коническому сѣченію C. Кромѣ точекъ, лежащихъ на этомъ послѣднемъ коническомъ сѣченіи, наши поверхности могутъ имѣть еще безчисленное множество другихъ общихъ точекъ. Возьмемъ три какія нибудь изъ числа этихъ точекъ. Плоскость P', проходящая черезъ эти три точки, пересѣкаетъ коническое сѣченіе C въ двухъ точкахъ, которыя съ тремя предыдущими опредѣляютъ коническое сѣченіе C', лежащее въ плоскости P' и принадлежащее также двумъ поверхностямъ.

На основаніи доказанной выше теоремы (см. § 200), мы замѣчаемъ, что двѣ поверхности не могутъ имѣть общей точки, не находящейся на коническихъ сѣченіяхъ C и C, безъ того, чтобы онѣ не совпадали между собою. Слѣдовательно, линія пересѣченія состоитъ изъ двухъ коническихъ сѣченій C и C', что и требовалось доказать.

Въ этомъ случаѣ уравненіе проекціи линіи Σ встрѣчи двухъ поверхностей: $\Omega(x, y) = 0$ таково, что функція Ω распадается на два множителя Ω_1 и Ω_2, каждый второй степени относительно координатъ x и y. Уравненіе $\Omega_1 = 0$ опредѣляетъ проекцію коническаго сѣченія C, а уравненіе $\Omega_2 = 0$ — проекцію коническаго сѣченія C'.

Каждое изъ коническихъ сѣченій C и C' можетъ обращаться въ систему двухъ прямыхъ, такъ что двѣ поверхности второго порядка могутъ пересѣкаться по четыремъ прямымъ; напримѣръ, мы сообщали уже, что пять прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку въ пространствѣ, опредѣляютъ конусъ второго порядка, имѣющій вершину въ точкѣ встрѣчи данныхъ прямыхъ. Отсюда мы заключаемъ, что четыре прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку, не опредѣляютъ конуса, и, слѣдовательно, черезъ нихъ можно провести безчисленное множество конусовъ второго порядка и эти всѣ конусы будутъ пересѣкаться по четыремъ прямымъ.

Подобнымъ же образомъ пяти параллельныхъ прямыхъ достаточно для опредѣленія цилиндра второго порядка, и, слѣдовательно, черезъ четыре взаимно-параллельныхъ прямыхъ можно провести безчисленное множество цилиндровъ второго порядка, причемъ всѣ эти цилиндры будутъ пересѣкаться по четыремъ прямымъ.

204. *Теорема*. Если двѣ поверхности второго порядка прикасаются въ двухъ точкахъ, то онѣ пересѣкаются по двумъ плоскимъ кривымъ.

Мы будемъ говорить, что поверхности второго порядка соприкасаются въ точкѣ a, если, какую бы мы плоскость ни провели черезъ точку a, всегда эта плоскость пересѣкаетъ поверхности по двумъ коническимъ сѣченіямъ, касающимся въ точкѣ A. Сказанное обстоятельство происходитъ тогда, когда данныя поверхности такъ расположены, что нормали, проведенныя въ точкѣ a къ обѣимъ поверхностямъ, совпадаютъ между собою.

Возьмемъ какую нибудь точку c, отличную отъ двухъ заданныхъ точекъ прикосновенія a и b и лежащую заразъ на обѣихъ поверхностяхъ; тогда, если проведемъ черезъ три точки a, b, c плоскость P, то эта плоскость встрѣтитъ наши поверхности по двумъ коническимъ сѣченіямъ, касающимся другъ друга въ точкахъ a и b и пересѣкающихся въ точкѣ c. Такія коническія сѣченія совпадаютъ, ибо одна точка касанія соотвѣтствуетъ двумъ точкамъ пересѣченія, на основаніи же предыдущей теоремы мы получаемъ, что двѣ поверхности пересѣкаются по двумъ коническимъ сѣченіямъ, встрѣчающимся въ точкахъ a и b.

Подобно тому, какъ изъ предыдущей теоремы исключался случай, когда четыре данныя точки лежатъ на одной прямой, такъ и въ настоящей теоремѣ доказательство претерпѣваетъ исключеніе, если общія касательныя плоскости обѣихъ поверхностей пересѣкаются по прямой ab. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ линія пересѣченія состоитъ изъ прямой линіи и неплоской кривой третьяго порядка.

205. *Теорема.* Если двѣ поверхности второго порядка касаются въ трехъ точкахъ, то онѣ соприкасаются вдоль по плоской кривой.

Разсмотримъ какія нибудь двѣ поверхности второго порядка, которыя касаются въ трехъ точкахъ a, b, c; эти поверхности не имѣютъ общей точки внѣ плоскости P, опредѣляемой точками a, b, c; ибо, если бы у нихъ была общая точка d, лежащая внѣ плоскости P, то, по предыдущей теоремѣ, каждая изъ трехъ плоскостей dab, dbc, dca пересѣкала бы обѣ поверхности по одному и тому же коническому сѣченію, что невозможно. Обѣ поверхности пересѣкаются плоскостью P по одной и той же кривой второго порядка C; легко усмотрѣть, что онѣ имѣютъ одну и ту же касательную плоскость въ каждой точкѣ m кривой. Въ самомъ дѣлѣ, черезъ точку m и точку a, напримѣръ, проведемъ какую нибудь плоскость, отличную отъ P; эта плоскость пересѣчетъ обѣ поверхности по двумъ кривымъ, проходящимъ черезъ a и m; эти кривыя касаются другъ друга въ a и, такъ какъ у нихъ нѣтъ другой общей точки, кромѣ m, то, слѣдовательно, онѣ касаются другъ друга также и въ этой точкѣ.

206. Пользуясь вышеприведенными теоремами, мы можемъ замѣтить слѣдующее: мы видѣли уже, что уравненіе

$$S - k\alpha\beta = 0$$

опредѣляло поверхность второго порядка, проходящую черезъ кривыя пересѣченія поверхности $S = 0$ съ плоскостями $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Будемъ приближать плоскость $\beta = 0$ къ плоскости $\alpha = 0$, поворачивая и передвигая поступательно до совпаденія съ нею. Тогда получимъ уравненіе

$$S - k\alpha^2 = 0,$$

которое будетъ опредѣлять поверхность второго порядка, соприкасающуюся съ поверхностью $S = 0$ вдоль по коническому сѣченію, получающемуся въ пересѣченіи поверхности $S = 0$ плоскостью $\alpha = 0$.

Если два коническихъ сѣченія C и C', проведенныя на одной и той же поверхности S, встрѣчаются въ двухъ точкахъ a и b, то хорда ab будетъ прямая пересѣченія двухъ плоскостей заданныхъ коническихъ сѣченій. Проведемъ двѣ поверхности S_1 и S_2, соприкасающіяся съ поверхностью S вдоль по коническимъ сѣченіямъ C и C'. Эти двѣ поверхности, очевидно, соприкасаются въ точкахъ a и b и, слѣдовательно, на основаніи одной изъ предыдущихъ теоремъ, эти поверхности S_1 и S_2 пересѣкаются по двумъ плоскимъ кривымъ.

Пусть уравненіе поверхности S будетъ $S=0$; тогда уравненія двухъ поверхностей S_1 и S_2 будутъ имѣть видъ:

$$S-k\alpha^2=0,\ S-l\beta^2=0,$$

гдѣ $\alpha=0$ и $\beta=0$ суть плоскости коническихъ сѣченій C и C'. Два коническихъ сѣченія, по которымъ встрѣчаются поверхности S_1 и S_2, лежатъ въ плоскостяхъ $l\beta^2-k\alpha^2=0$.

Итакъ мы видимъ, что сокращенный способъ прилагается къ поверхностямъ второго порядка совершенно аналогично съ тѣмъ, какъ мы это видѣли при разсмотрѣніи коническихъ сѣченій. Вся та теорія поверхностей второго порядка, которая изложена въ крупномъ шрифтѣ, основана, какъ мы видѣли, на сокращенномъ способѣ, ибо мы обозначали буквами α, β, γ цѣлыя линейныя функціи относительно координатъ x, y, z.

207. Обобщеніемъ трилинейныхъ координатъ въ пространствѣ явятся такъ называемыя *тетраэдрическія* координаты.

Возьмемъ четыре плоскости

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0,\ \delta=0,$$

не пересѣкающіяся въ одной точкѣ и образующія собою тетраэдръ конечныхъ размѣровъ.

Пусть уравненія этихъ плоскостей приведены къ нормальному виду (см. § 44); тогда очевидно, что α, β, γ, δ суть не что иное, какъ разстоянія нѣкоторой точки отъ четырехъ плоскостей, ограничивающихъ заданный тетраэдръ, взятыя, конечно, съ тѣмъ или другимъ знакомъ. Знаками коэффиціентовъ заданныхъ уравненій мы можемъ всегда распорядиться такъ, чтобы четыре разстоянія α, β, γ, δ были положительными для точекъ внутри тетраэдра. Возьмемъ какую нибудь точку M_0 внутри тетраэдра; пусть ея координаты будутъ x_0, y_0, z_0. Подставляя эти три числа въ функціи α, β, γ, δ, мы получимъ четыре положительныхъ числа $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$, представляющихъ длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки M_0 на грани тетраэдра. Соединяя точку M_0 съ вершинами тетраэдра, получимъ внутри тетраэдра 4 пирамиды, вершины которыхъ сходятся въ точкѣ M_0, а основанія суть грани заданнаго тетраэдра. Высоты этихъ четырехъ пирамидъ суть числа α_0, β_0, γ_0, δ_0.

Обозначая площади граней тетраэдра буквами a, b, c, d и утроенный объемъ тетраэдра черезъ Δ, получимъ, что

$$\frac{\Delta}{3} = \frac{1}{3}\alpha_0 a + \frac{1}{3}\beta_0 b + \frac{1}{3}\gamma_0 c + \frac{1}{3}\delta_0 d,$$

или

$$\Delta = \alpha_0 a + \beta_0 b + \gamma_0 c + \delta_0 d. \tag{1}$$

Соотношенiе (1) между четырьмя тетраэдрическими координатами α_0; β_0, γ_0, δ_0 точки M_0 всегда имѣетъ мѣсто, гдѣ бы ни была взята точка M_0, внутри тетраэдра, или внѣ его, въ чемъ не трудно убѣдиться.

Итакъ мы видимъ, что введенiе тетраэдрическихъ координатъ сводится къ опредѣленiю положенiя точки въ пространствѣ не тремя числами, какъ при декартовыхъ координатахъ, а четырьмя, но зато между эти четырьмя числами существуетъ линейное соотношенiе, при помощи котораго четвертое число находится, когда заданы три другихъ числа.

208. Самый общiй видъ уравненiя поверхности второго порядка въ тетраэдрическихъ координатахъ есть:

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 + 2E\alpha\beta + 2F\alpha\gamma + 2G\alpha\delta + 2H\beta\gamma + 2I\beta\delta + \\ + 2K\gamma\delta = 0. \tag{1}$$

Что написанное уравненiе опредѣляетъ поверхность второго порядка, слѣдуетъ изъ того, что послѣ раскрытiя скобокъ получаемъ уравненiе второй степени относительно декартовыхъ координатъ x, y, z. Такъ какъ, кромѣ того, это уравненiе заключаетъ 9 произвольныхъ отношенiй девяти изъ числа коэффицiентовъ къ десятому и такъ какъ между функцiями α, β, γ, δ не существуетъ тождественныхъ однородныхъ линейныхъ соотношенiй *), то можно заставить поверхность, опредѣляемую уравненiемъ (1), проходить черезъ девять точекъ какой нибудь заданной поверхности второго порядка и, слѣдовательно, совпасть съ этой послѣдней.

Разлагая на сумму квадратовъ первую часть написаннаго уравненiя, по употреблявшемуся у насъ всюду правилу, мы перепишемъ уравненiе (1) въ такомъ видѣ:

$$L\alpha_1{}^2 + M\beta_1{}^2 + N\gamma_1{}^2 + P\delta_1{}^2 = 0, \tag{2}$$

гдѣ L, M, N, P суть нѣкоторыя функцiи отъ коэффицiентовъ уравненiя (1), а

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \rho\delta \\ \beta_1 &= \mu_1\beta + \nu_1\gamma + \rho_1\delta \\ \gamma_1 &= \nu_2\gamma + \rho_2\delta \\ \delta_1 &= \rho_3\delta \end{aligned}$$

*) Однородное линейное соотношенiе между функцiями α, β, γ, δ имѣло бы видъ $\alpha l + \beta m + \gamma n + \delta q = 0$.

209. Подобно тому, какъ въ теоріи коническихъ сѣченій приведеніе уравненія коническаго сѣченія въ трилинейныхъ координатахъ къ простѣйшему виду, при помощи разложенія на сумму квадратовъ, приводится къ выбору за координатный автополярнаго треугольника, такъ и здѣсь преобразованіе уравненія (1) къ виду (2) сводится къ выбору за координатный тетраэдра $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\delta_1 = 0$, который можетъ быть названъ автополярнымъ относительно поверхности второго порядка (1). Чтобы сказанное обстоятельство объяснить, обобщимъ теорію поляръ коническихъ сѣченій, введя понятіе о полярныхъ плоскостяхъ поверхностей второго порядка. Съ этимъ новымъ понятіемъ мы уже встрѣтились въ § 91 въ статьѣ о шарѣ.

Поведемъ наши разсужденія въ тетраэдрическихъ координатахъ. Прежде всего мы замѣчаемъ, что уравненіе всякой плоскости въ тетраэдрическихъ координатахъ будетъ имѣть видъ:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta = 0.$$

На основаніи разсужденій, аналогичныхъ съ приведенными въ §§ 255 и 285 геом. дв. изм., мы замѣчаемъ, что уравненіе

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0,$$

какъ противорѣчащее соотношенію между тетраэдрическими координатами, опредѣлитъ безконечно-далекую плоскость.

210. Возьмемъ поверхность второго порядка въ простѣйшемъ видѣ:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P\delta^2 = 0 \qquad (1)$$

и на ней точку M_0 $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$. Координаты точки M_0, очевидно, удовлетворяютъ уравненію:

$$L\alpha_0{}^2 + M\beta_0{}^2 + N\gamma_0{}^2 + P\delta_0{}^2 = 0. \qquad (2)$$

Проведемъ черезъ точку M_0 хорду $M_0 M_1$, тетраэдрическія координаты точекъ которой могутъ быть написаны въ такомъ видѣ:

$$\alpha = lu + \alpha_0,\ \beta = mu + \beta_0,\ \gamma = nu + \gamma_0,\ \delta = pu + \delta_0; \qquad (3)$$

при различныхъ u будемъ получать различныя точки на хордѣ $M_0 M_1$.

Пусть уравненія хорды $M_0 M_1$ будутъ

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \pi\delta = 0$$

$$\lambda_1\alpha + \mu_1\beta + \nu_1\gamma + \pi_1\delta = 0,$$

коэффиціенты $\lambda, \mu, \ldots \lambda_1, \mu_1, \ldots$ должны быть подобраны такъ, чтобы было

$$\lambda\alpha_0 + \mu\beta_0 + \nu\gamma_0 + \pi\delta_0 = 0$$

$$\lambda_1\alpha_0 + \mu_1\beta_0 + \nu_1\gamma_0 + \pi_1\delta_0 = 0,$$

тогда коэффиціенты l, m, n, p подбираются подъ условіемъ удовлетворять уравненіямъ

$$\lambda l + \mu m + \nu n + \pi p = 0,$$

$$\lambda_1 l + \mu_1 m + \nu_1 n + \pi_1 p = 0.$$

Подставляя выраженія (3) въ уравненіе (1), получимъ

$$u^2 (Ll^2 + Mm^2 + Nn^2 + Pp^2) + 2u\,[Ll\alpha_0 + Mm\beta_0 + Nn\gamma_0 + Pp\delta_0] +$$
$$+ L\alpha_0{}^2 + M\beta_0{}^2 + N\gamma_0{}^2 + P\delta_0{}^2 = 0.$$

Но, на основаніи уравненія (2), получаемъ, сокращая на u:

$$u\,(Ll^2 + Mm^2 + Nn^2 + Pp^2) + 2\,(Ll\alpha_0 + Mm\beta_0 + Nn\gamma_0 + Pp\delta_0) = 0; \quad (4)$$

послѣднее уравненіе опредѣляетъ значеніе u, соотвѣтствующее концу хорды M_1. Приближая точку M_1 по поверхности къ точкѣ M_0, получимъ въ предѣлѣ $u = 0$, т. е. l, m, n, p надо подобрать такъ, чтобы было

$$Ll\alpha_0 + Mm\beta_0 + Nn\gamma_0 + Pp\delta_0 = 0. \quad (5)$$

Подставляя въ послѣднее уравненіе вмѣсто l, m, n, p имъ пропорціональныя выраженія, получимъ

$$L\alpha_0\,(\alpha - \alpha_0) + M\beta_0\,(\beta - \beta_0) + N\gamma_0\,(\gamma - \gamma_0) + P\delta_0\,(\delta - \delta_0) = 0;$$

окончательно уравненіе касательной плоскости въ точкѣ M_0 представится въ такомъ видѣ

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 + P\delta\delta_0 = 0. \quad (6)$$

211. Пусть дана нѣкоторая точка $M_1\,(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$, не лежащая на поверхности второго порядка

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P\delta^2 = 0, \quad (1)$$

требуется черезъ нее провести къ поверхности касательную плоскость.

Вопросъ сводится къ опредѣленію точки касанія $M_0\,(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$. Координаты точки M_0 удовлетворяютъ уравненію (1)

$$L\alpha_0{}^2 + M\beta_0{}^2 + N\gamma_0{}^2 + P\delta_0{}^2 = 0. \quad (2)$$

Уравненіе же касательной плоскости имѣетъ видъ

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 + P\delta\delta_0 = 0. \quad (3)$$

По условіямъ задачи требуется, чтобы касательная плоскость (3) проходила черезъ точку M_1; подставляя координаты послѣдней точки въ уравненіе (3), получимъ условіе

$$L\alpha_0\alpha_1 + M\beta_0\beta_1 + N\gamma_0\gamma_1 + P\delta_0\delta_1 = 0, \quad (4)$$

которому должны удовлетворять координаты $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ точки касанія; итакъ мы видимъ, что эти послѣднія координаты опредѣляются черезъ рѣшеніе относительно $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ двухъ уравненій, получающихся изъ уравненія (2) и (4), отбрасывая нулики у буквъ, эти уравненія суть

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P\delta^2 = 0, \tag{5}$$

$$L\alpha\alpha_1 + M\beta\beta_1 + N\gamma\gamma_1 + P\delta\delta_1 = 0. \tag{6}$$

Уравненіе (5) есть не что иное, какъ уравненіе нашей поверхности (1), уравненіе же (6) опредѣляетъ нѣкоторую плоскость. Итакъ мы видимъ, что точка касанія искомой касательной плоскости должна лежать на линіи пересѣченія поверхности (1) съ плоскостью (6), а потому, если плоскость (6) пересѣкаетъ поверхность по коническому сѣченію, то всякая точка этого коническаго сѣченія можетъ быть принята за точку касанія и, слѣдовательно, изъ точки M_1 можно провести безчисленное множество касательныхъ плоскостей, которыя огибаютъ нѣкоторый конусъ второго порядка, имѣющій вершину въ точкѣ M_1 и касающійся поверхности вдоль по плоской кривой сѣченія поверхности (1) плоскостью (6). Если плоскость (6) не пересѣкаетъ поверхности (1), то изъ точки M_1 нельзя провести къ поверхности дѣйствительной касательной плоскости. Если точка M_1 лежитъ на поверхности (1), то плоскость (6) обращается въ касательную плоскость.

Итакъ мы видимъ, что, каковы бы ни были координаты точки M_1, ей всегда соотвѣтствуетъ нѣкоторая дѣйствительная плоскость

$$L\alpha\alpha_1 + M\beta\beta_1 + N\gamma\gamma_1 + P\delta\delta_1 = 0,$$

которая носитъ названіе *полярной плоскости*, точка же M_1 по отношенію къ ней называется *полюсомъ*.

212. *Автополярнымъ* тетраэдромъ по отношенію къ заданной поверхности второго порядка мы будемъ называть такой, каждая вершина котораго есть полюсъ противоположной грани.

Легко убѣдиться, что координатный тетраэдръ $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = \theta,\ \delta = 0$ автополяренъ по отношенію къ поверхности

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P\delta^2 = 0. \tag{1}$$

Уравненіе полярной плоскости

$$L\alpha\alpha_1 + M\beta\beta_1 + N\gamma\gamma_1 + P\delta\delta_1 = 0, \tag{2}$$

показываетъ, что вершинѣ

$$\alpha_1 = 0,\ \ \beta_1 = 0,\ \ \gamma_1 = 0,\ \ d\delta_1 = \Delta$$

координатнаго тетраэдра соотвѣтствуетъ полярная плоскость

$$P.\,\delta.\,\delta_1 = 0. \tag{3}$$

Всѣ коэффиціенты L, M, N, P мы предполагаемъ отличными отъ нуля, ибо случай равенства нулю одного изъ числа коэффиціентовъ даетъ конусъ; такъ, напримѣръ, если $P=0$, то точка $\alpha_1=0$, $\beta_1=0$, $\gamma_1=0$ будетъ вершина конуса, и ей не будетъ соотвѣтствовать опредѣленной полярной плоскости. Въ случаѣ равенства нулю двухъ изъ числа коэффиціентовъ, поверхность (1) обращается въ двѣ плоскости.

Итакъ, предполагая P не равнымъ 0, получимъ для вершины $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ координатнаго тетраэдра полярную плоскость $\delta=0$, т. е. противоположную грань его. То же разсужденіе относится къ другимъ вершинамъ.

213. Остановимся теперь еще нѣсколько на разсмотрѣніи уравненія поверхности втораго порядка вида

$$L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2+P\delta^2=0.$$

Одна изъ числа функцій α, β, γ, δ можетъ обращаться въ постоянное число, или, вообще говоря, имѣть видъ

$$k(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)=k\Delta,$$

пусть, напримѣръ, $\delta=1$. Этотъ случай мы уже разсматривали при изученіи поверхностей съ центромъ

$$L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2+P=0.$$

Въ этомъ случаѣ автополярнымъ тетраэдромъ является тетраэдръ, образуемый тремя сопряженными плоскостями $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, пересѣкающимися въ центрѣ поверхности и безконечно далекою плоскостью $\delta=1$. Отсюда мы заключаемъ, что полярная плоскость центра безконечно удалена.

Если обращаются въ постоянныя двѣ изъ числа функцій α, β, γ, δ, напримѣръ, $\gamma=1$, $\delta=1$, то получаемъ случай цилиндровъ

$$L\alpha^2+M\beta^2+N+P=0.$$

Три функціи не могутъ обращаться въ постоянныя, ибо иначе между функціями α, β, γ, δ, соотвѣтствующими первоначальному тетраэдру, было бы линейное соотношеніе.

Мы имѣли

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma+\rho\delta\\ \beta_1 &= \mu_1\beta+\nu_1\gamma+\rho_1\delta\\ \gamma_1 &= \nu_2\gamma+\rho_2\delta\\ \delta_1 &= \rho_3\delta.\end{aligned}$$

Положимъ, что было бы

$$\alpha_1=k,\ \beta_1=l,\ \gamma_1=m,$$

тогда получилось бы такое линейное соотношеніе между функціями α, β, γ, δ:

$$(l - m)\,\alpha_1 + (m - k)\,\beta_1 + (k - l)\,\gamma_1 = 0,$$

чего не можетъ быть.

214. Приложимъ приведенныя разсужденія къ нахожденію тетраэдрическихъ координатъ α_0, β_0, γ_0, δ_0 центра поверхности.

Полярная плоскость центра должна имѣть уравненіе

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 + P\delta\delta_0 = 0,$$

съ другой стороны, она должна быть безконечно удалена и, слѣдовательно, должна имѣть уравненіе

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \delta d = 0,$$

откуда

$$\frac{L\alpha_0}{a} = \frac{M\beta_0}{b} = \frac{N\gamma_0}{c} = \frac{P\delta_0}{d}.$$

Отсюда координаты центра суть

$$\frac{a}{L},\ \frac{b}{M},\ \frac{c}{N},\ \frac{d}{P}.$$

Если одинъ изъ коэффиціентовъ, напримѣръ, $P = 0$, тогда $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$.

Условіемъ параболоидовъ является положеніе центра на безконечно далекой плоскости

$$a\frac{a}{L} + b\frac{b}{M} + c\frac{c}{N} + d\frac{d}{P} = 0.$$

Подобнымъ же образомъ находятся въ тетраэдрическихъ координатахъ уравненія діаметровъ и діаметральныхъ плоскостей.

Можно безъ труда доказать, что полярная плоскость точки M_1 параллельна діаметрамъ плоскости, дѣлящей пополамъ хорды параллельныя діаметру, проходящему черезъ точку M_1.

215. Взаимность поляръ, изложенная нами въ плоской геометріи, имѣетъ мѣсто и въ пространствѣ, причемъ резюмируется въ слѣдующихъ двухъ теоремахъ.

Теорема. Если полюсъ P плоскости M двигается по неподвижной плоскости M_1, то соотвѣтствующая плоскость M, вращаясь, постоянно проходитъ черезъ неподвижную точку P_1, полюсъ плоскости M_1.

Теорема. Если полюсъ P плоскости M двигается по неподвижной прямой L, то соотвѣтствующая плоскость M, вращаясь, постоянно проходитъ черезъ другую неподвижную прямую L_1 и обратно, если полюсъ описываетъ прямую L_1, то полярная плоскость вращается вокругъ прямой L.

216. Доказательство двухъ указанныхъ теоремъ весьма просто. Полюсъ P $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ плоскости

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 + P\delta\delta_0 = 0, \tag{1}$$

двигаясь по плоскости M_1:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta = 0, \tag{*}$$

даетъ соотношеніе

$$l\alpha_0 + m\beta_0 + n\gamma_0 + p\delta_0 = 0. \tag{2}$$

Уравненія (1) и (2), имѣя мѣсто при безчисленномъ множествѣ значеній $\alpha_0 . \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ даютъ пропорцію

$$\frac{L\alpha}{l} = \frac{M\beta}{m} = \frac{N\gamma}{n} = \frac{P\delta}{p},$$

отсюда координаты неподвижной точки P_1 суть

$$\frac{l}{L}, \quad \frac{m}{M}, \quad \frac{n}{N}, \quad \frac{p}{P}. \tag{3}$$

Точка P_1 есть полюсъ плоскости (*), ибо, подставляя ея координаты (3) въ уравненіе (1) вмѣсто $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$, получимъ уравненіе (*).

217. Что касается второй теоремы, то ее не трудно доказать на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Пусть уравненія прямой L будутъ

$$\left.\begin{array}{l} l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta = 0 \\ l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma + p_1\delta = 0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Полюсъ P $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ двигается по прямой (1), что даетъ три уравненія

$$l\alpha_0 + m\beta_0 + n\gamma_0 + p\delta_0 = 0$$
$$l_1\alpha_0 + m_1\beta_0 + n_1\gamma_0 + p_1\delta_0 = 0$$
$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 + P\delta\delta_0 = 0,$$

исключая изъ этихъ трехъ уравненій двѣ буквы, напримѣръ, γ_0 и δ_0, получимъ, рѣшая два первыхъ уравненія относительно ν_0 и δ_0

$$(n_1p - p_1n)\,\gamma_0 = (lp_1 - l_1p)\,\alpha_0 + (mp_1 - m_1p)\,\beta_0$$

$$(n_1p - p_1n)\,\delta_0 = (l_1n - n_1l)\,\alpha_0 + (m_1n - mn_1)\,\beta_0.$$

Подставляя полученныя выраженія для γ_0 и δ_0 въ третье уравненіе, получимъ окончательно

$$A\alpha_0 + B\beta_0 = 0.$$

Вслѣдствіе произвольности α_0 и β_0 получаемъ

$$A = 0,\ B = 0,$$

что даетъ прямую L_1

$$\left.\begin{aligned} L\alpha\,(n_1p - p_1n) + N\gamma\,(lp_1 - l_1p) + P\delta\,(l_1n - n_1l) = 0 \\ M\beta\,(n_1p - p_1n) + N\gamma\,(mp_1 - m_1p) + P\delta\,(m_1n - n_1m) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Наоборотъ, легко показать, что если полюсъ описываетъ прямую (2), то соотвѣтствующая плоскость вращается вокругъ прямой (1); для этой цѣли достаточно положить

$$l' = L\,(n_1p - p_1n) \qquad l'_1 = 0$$

$$m' = 0 \qquad m'_1 = M\,(n_1p - p_1n)$$

$$n' = N\,(lp_1 - l_1p) \qquad n'_1 = N\,(mp_1 - m_1p)$$

$$p' = P\,(l_1n - n_1l) \qquad p'_1 = P\,(m_1n - n_1m)$$

тогда послѣ весьма простыхъ выкладокъ мы замѣтимъ, что уравненія

$$L\alpha\,(n'_1p' - p'_1n') + N\gamma\,(l'p'_1 - l'_1p') + P\delta\,(l'_1n' - n'_1l') = 0$$

$$M\beta\,(n'_1p' - p'_1n') + N\gamma\,(m'p'_1 - m'_1p') + P\delta\,(m'_1n' - n'_1m') = 0$$

даютъ прямую (1).

218. Взаимность поляръ даетъ возможность установить двойственность геометрическаго приложенія координатъ въ пространствѣ, подобную изложенной выше двойственности на плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, координаты полюса $P\,(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ можно считать за координаты, опредѣляющія соотвѣтствующую этому полюсу плоскость M. Является, такимъ образомъ, возможность вводить въ разсмотрѣніе, какъ простѣйшій элементъ, плоскость, причемъ ея положеніе опредѣлять четырьмя координатами α, β, γ, δ.

Тогда всякое уравненіе первой степени

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta = 0 \quad (1)$$

между координатами плоскости будетъ уравненіемъ точки, черезъ которую проходятъ всѣ плоскости, опредѣляемыя координатами, удовлетворяющими уравненію (1). Эта точка есть полюсъ той плоскости, на которой лежатъ полюсы проходящихъ черезъ точку (1) плоскостей.

219. Нѣтъ надобности прибѣгать къ способу взаимныхъ поляръ для установленія двойственности координатъ, можно поступить проще.

Возьмемъ уравненіе плоскости въ декартовыхъ координатахъ

$$z = ax + by + c. \quad (1)$$

Три коэффиціента a, b, c опредѣляютъ положеніе плоскости въ пространствѣ и потому могутъ быть считаемы координатами плоскости. Легко замѣтить, что всякое линейное уравненіе между координатами a, b, c

$$c = ma + nb + k \tag{2}$$

опредѣлитъ точку. Подставляя въ уравненіе (1) c изъ уравненія (2), получимъ

$$z - k = a(x + m) + b(y + n).$$

При всевозможныхъ значеніяхъ a и b послѣднее уравненіе опредѣляетъ плоскости, проходящія черезъ точку

$$x = -m, \ y = -n, \ z = k.$$

Здѣсь кстати упомянуть объ интересныхъ соображеніяхъ Плюккера, который вводитъ въ разсмотрѣніе, какъ простѣйшій элементъ въ пространствѣ, прямую линію, опредѣляя ее при помощи четырехъ координатъ, за которыя могутъ быть приняты, напримѣръ, четыре коэффиціента a, b, p, q въ уравненіяхъ

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q.$$

О поверхностяхъ вообще и кривыхъ линіяхъ въ пространствѣ.

220. Поверхность называется *алгебраическою* n-аго порядка, если она опредѣляется уравненіемъ

$$f(x, y, z) = 0,$$

гдѣ f цѣлая функція n-ой степени. Общій видъ такого уравненія есть

$$\Sigma a x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} = 0, \tag{1}$$

гдѣ $\lambda + \mu + \nu \overline{\overline{<}} n$; причемъ числа λ, μ, ν, конечно, цѣлыя.

Всякій разъ, когда уравненіе поверхности не можетъ быть приведено къ виду (1), поверхность называется *трансцендентною*.

Итакъ, мы получаемъ, какъ обобщеніе всего вышеизложеннаго, теорему, что всякое уравненіе

$$f(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

опредѣляетъ нѣкоторую поверхность и обратно, всякая поверхность опредѣляется нѣкоторымъ уравненіемъ.

Рѣшая уравненіе (2) относительно z, получимъ

$$z = F(x, y). \tag{3}$$

Самый общій случай заданія поверхности получимъ, выражая x и y черезъ произвольныя функціи φ и ψ отъ независимыхъ перемѣнныхъ u и v. Подставляя эти послѣднія выраженія въ уравненіе (3), получимъ

$$z = F[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = \omega(u, v).$$

Итакъ мы видимъ, что всякая поверхность можетъ на безчисленное множество маперовъ быть опредѣляема слѣдующими уравненіями:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \omega(u, v). \tag{4}$$

Въ этихъ уравненіяхъ, какъ мы видѣли, функціи φ и ψ совершенно произвольны и по нимъ опредѣляется функція ω.

Уравненіе поверхности въ декартовыхъ координатахъ получится черезъ исключеніе изъ трехъ уравненій (4) двухъ буквъ u и v. Напримѣръ

$$x = a \cos u \sin v,$$

$$y = a \cos u \cos v,$$

$$z = a \sin u.$$

Эти три уравненія опредѣляютъ поверхность шара, уравненіе котораго въ декартовыхъ координатахъ получается черезъ исключеніе u и v изъ написанныхъ уравненій. Возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

221. Кривыя линіи въ пространствѣ разсматриваются обыкновенно, какъ пересѣченія двухъ поверхностей. Пусть будутъ x, y, z координаты какой нибудь точки на разсматриваемой линіи L; она, какъ мы сказали, есть пересѣченіе двухъ поверхностей. Точка (x, y, z) должна находиться какъ на той, такъ и на другой поверхности, слѣдовательно, координаты x, y, z въ одно и то же время должны удовлетворять уравненіямъ обѣихъ поверхностей. Пусть эти уравненія будутъ

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0; \tag{1}$$

взятыя вмѣстѣ, они и опредѣляютъ линію L. Итакъ, всякая линія въ пространствѣ можетъ быть опредѣлена двумя уравненіями между тремя координатами произвольной ея точки.

Рѣшая уравненія (1) относительно двухъ изъ числа координатъ, напримѣръ, относительно y и z, получаемъ:

$$y = F_1(x), \quad z = F_2(x). \tag{2}$$

Въ послѣднихъ уравненіяхъ можно x давать значенія по произволу, можно, слѣдовательно, приравнять x нѣкоторой совершенно произвольной функціи φ отъ не-

зависимаго перемѣннаго t. Подставляя эту функцію φ вмѣсто x въ уравненія (2) получимъ:

$$y = F_1 [\varphi(t)] = \psi(t), \quad z = F_2 [\varphi(t)] = \omega(t).$$

Итакъ мы видимъ, что уравненія кривой линіи въ пространствѣ на безчисленное множество маперовъ могутъ быть представлены въ видѣ:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t). \tag{3}$$

Въ этихъ уравненіяхъ функція φ совершенно произвольна, двѣ же другія функціи ψ и ω опредѣляются, какъ было указано выше.

Черезъ исключеніе независимой перемѣнной t изъ трехъ уравненій (3), получаются два уравненія (1), опредѣляющихъ кривую линію въ декартовыхъ координатахъ.

222. Итакъ мы видимъ, что координаты точки, лежащей на кривой въ пространствѣ, могутъ быть разсматриваемы, какъ функціи отъ одного независимаго перемѣннаго. Такъ какъ функціи $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ тождественно удовлетворяютъ уравненіямъ (1), то, слѣдовательно, при всякомъ t, три уравненія (1) даютъ точку на линіи L. Приписывая перемѣнной t всѣ возможныя величины, мы изъ уравненій (1) получимъ координаты всѣхъ возможныхъ точекъ на нашей линіи; каждая изъ нихъ опредѣляется своимъ значеніемъ t. Мы будемъ точку (x, y, z) называть точкой t. Такимъ образомъ, точка (0) будетъ точка съ координатами $\varphi(0)$, $\psi(0)$, $\omega(0)$, точка (1) будетъ точка съ координатами $\varphi(1)$, $\psi(1)$, $\omega(1)$.

Черт. 260.

Черт. 261.

223. Какъ примѣръ, разсмотримъ винтовую линію.

Если мы будемъ навертывать плоскость угла bac (см. черт. 260) на прямой цилиндръ $OABC$ съ круговымъ основаніемъ такъ, чтобы одна сторона угла ab располагалась по окружности основанія AB, то другая его сторона навернется по цилиндру вдоль по кривой, называемой *винтовой*. Примемъ за ось z-овъ ось цилиндра, оси же x и y расположимъ въ плоскости основанія цилиндра (см. черт. 261), притомъ такъ, чтобы ось x-овъ проходила черезъ точку A, въ которой располагается при навертываніи плоскости угла на цилиндръ вершина угла. Пусть $x = OQ$, $y = QP$, $z = PM$ будутъ координаты нѣкоторой точки M на винтовой линіи. Назовемъ радіусъ основанія цилиндра черезъ a, а

тангенсъ угла cab черезъ δ. Называя уголъ POQ черезъ t, получимъ для первыхъ двухъ координатъ точки на винтовой линіи выраженія

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t.$$

Для опредѣленія координаты z развернемъ часть поверхности цилиндра, заключающуюся внутри контура MAP, на плоскость. Эта часть обратится въ треугольникъ mpa, причемъ координата z обратится въ сторону mp (см. черт. 260) и будетъ

$$pa = \smile PA = at,$$

откуда

$$z = \delta at.$$

Итакъ, уравненія винтовой линіи могутъ быть написаны такимъ образомъ:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = \delta at.$$

224. Разсмотримъ теперь замѣчательнѣйшіе виды поверхностей.

1) Уравненіе $f(x) = 0$ опредѣляетъ рядъ плоскостей, параллельныхъ плоскости YOZ и проведенныхъ чрезъ точки на оси x, координаты которыхъ x_0, x_1, $x_2, \ldots x_n$ суть дѣйствительные корни уравненія

$$f(x) = 0.$$

2) Уравненіе $f(x, y, z) = 0$ не содержитъ одной изъ координатъ, напримѣръ, координаты z. Пусть это уравненіе будетъ имѣть видъ:

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Уравненіе (1) опредѣляетъ на плоскости XOY нѣкоторую кривую S. Такъ какъ координата z не входитъ въ уравненіе (1), то она совершенно произвольна, а потому можно сказать, что для каждой пары значеній x, y, удовлетворяющихъ уравненію (1), будетъ существовать безчисленное множество значеній для z. Изъ этого вытекаетъ, что всѣ точки M, M', M'', . . ., лежащія на перпендикулярѣ къ плоскости XOY въ нѣкоторой точкѣ P кривой S, будутъ принадлежать геометрическому мѣсту, опредѣляемому уравненіемъ (1)

$$f(x, y) = 0.$$

Итакъ, само геометрическое мѣсто есть *цилиндръ*, образуемый прямыми, проведенными черезъ точки кривой S параллельно оси z.

Вообще говоря, всякое уравненіе вида

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0, \tag{1}$$

гдѣ α и β суть нѣкоторыя линейныя функціи отъ координатъ x, y, z, опредѣляетъ цилиндрическую поверхность. Въ самомъ дѣлѣ, эта цилиндрическая поверхность образована прямыми, параллельными прямой $\alpha = 0$, $\beta = 0$, проходящими черезъ различныя точки управляющей кривой c, за которую, напримѣръ, можетъ быть

принята кривая встрѣчи цилиндра съ плоскость XOY, уравненіе которой получается изъ уравненія (1), полагая $z=0$ въ функціи α и β.

Прямолинейныя образующія опредѣляются уравненіями

$$\alpha = k, \quad \beta = l,$$

причемъ между параметрами k и l существуетъ зависимость:

$$\varphi(k, l) = 0.$$

3) Уравненіе

$$f(x, y, z) = 0$$

въ томъ случаѣ, когда функція f однородна, опредѣляетъ *конусъ* въ пространствѣ. Свойство однородности выражается, какъ извѣстно, уравненіемъ

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z).$$

Полагая въ этомъ уравненіи $t = \frac{1}{z}$, получимъ

$$\frac{1}{z^m} f(x, y, z) = f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = 0. \tag{1}$$

Рѣшая уравненіе (1) относительно $\frac{y}{z}$, получимъ:

$$\frac{y}{z} = \varphi\left(\frac{x}{z}\right). \tag{2}$$

Полагая

$$\frac{x}{z} = a, \tag{3}$$

гдѣ a нѣкоторое произвольно выбранное число, получимъ:

$$\frac{y}{z} = \varphi(a). \tag{4}$$

Уравненія (3) и (4) опредѣляютъ нѣкоторую прямую въ пространствѣ, проходящую черезъ начало координатъ; въ самомъ дѣлѣ, эти уравненія могутъ быть переписаны такъ

$$x - az = 0, \quad y - \varphi(a)\, z = 0.$$

Мѣняя параметръ a, будемъ получать различныя прямыя, проходящія чрезъ начало координатъ; геометрическое мѣсто этихъ прямыхъ будетъ конусъ съ вершиною въ началѣ координатъ. Уравненіе же геометрическаго мѣста получится черезъ исключеніе параметра a изъ двухъ уравненій: (3) и (4), въ результатѣ чего получается уравненіе (2), или, что одно и то же, уравненіе (1). Разсмотрѣн-

ный уже нами конусъ второго порядка:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy = 0$$

есть простѣйшій частный случай.

Если начало координатъ помѣщено не въ вершинѣ конуса, то, обозначая координаты его вершины черезъ x_0, y_0, z_0, мы, понятно, получимъ уравненіе конуса въ такомъ видѣ:

$$\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

225. *Коноидомъ* называется поверхность, образуемая прямою, которая двигается, оставаясь постоянно параллельною одной и той же плоскости, называемой *управляющею* плоскостью, и скользя по неподвижной прямой, называемой *осью* коноида, и по другой какой нибудь управляющей кривой.

Примемъ прямолинейную управляющую за ось z и положимъ, что плоскость XOY параллельна управляющей плоскости. Образующая представится уравненіями вида

$$z = \alpha, \frac{y}{x} = \beta.$$

Вторая управляющая дастъ условное уравненіе $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ между двумя перемѣнными параметрами α и β. Уравненіе коноида будетъ

$$\varphi\left(z, \frac{y}{x}\right) = 0.$$

Линейчатыя поверхности.

226. Предположимъ, что въ двухъ уравненіяхъ прямой линіи

$$x = az + p,$$

$$y = bz + q,$$

a, b, p, q суть функціи отъ одного независимаго перемѣннаго t. Тогда при измѣненіи этого перемѣннаго t прямая измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ. При своемъ движеніи прямая описываетъ нѣкоторую поверхность, уравненіе которой получится черезъ исключеніе перемѣннаго t изъ двухъ написанныхъ выше уравненій.

Сказанное обстоятельство мы имѣли при разсмотрѣніи цилиндрическихъ поверхностей, коническихъ и коноидовъ.

227. Линейчатыя поверхности раздѣляются на развертывающіяся и косыя.

Развертывающеюся называются линейчатая поверхность, представляющая геометрическое мѣсто касательныхъ къ неплоской кривой линіи въ пространствѣ.

Кривая, образующая развертывающуюся поверхность называется, по отношенію къ этой поверхности, ея *ребромъ возврата*.

Всѣ прочія линейчатыя поверхности носятъ названіе *косыхъ* линейчатыхъ поверхностей.

228. Примѣромъ развертывающейся линейчатой поверхности можетъ служить такъ называемый *развертывающійся геликоидъ*, представляющій геометрическое мѣсто касательныхъ къ винтовой линіи (см. § 223). Къ числу развертывающихся поверхностей принадлежатъ также поверхности коническія и цилиндрическія. У конуса ребро возврата обращается въ точку—вершину его, у цилиндровъ ребро возврата безконечно удалено. У развертывающагося геликоида ребро возврата есть, конечно, винтовая линія. Коноиды принадлежатъ къ числу косыхъ поверхностей, ибо, если бы коноиды были развертывающимися, то, слѣдовательно, ихъ прямолинейныя образующія были бы касательными къ нѣкоторой кривой въ пространствѣ. Ясно, что въ проекціи на любую плоскость прямолинейныя образующія такого коноида должны были бы проектироваться, какъ касательныя къ проекціи ребра возврата, между тѣмъ какъ прямолинейныя образующія коноидовъ проектируются на всякую плоскость, перпендикулярную къ управляющей плоскости, по взаимно параллельнымъ прямымъ, откуда и слѣдуетъ, что коноиды суть косыя поверхности. Такъ, напримѣръ, къ числу простѣйшихъ коноидовъ принадлежитъ косая плоскость; это тотъ случай, когда управляющая кривая коноида есть прямая. Однополый гиперболоидъ относится также къ числу косыхъ поверхностей. Укажемъ, наконецъ, еще на такъ называемый *косой геликоидъ*—поверхность, образованную перпендикулярами, опущенными изъ разныхъ точекъ винтовой линіи на ось прямого кругового цилиндра, на которомъ построена винтовая линія. Уравненіе послѣдней поверхности имѣетъ видъ

$$z = a.\ arc\ tang\ \frac{y}{x}\cdot$$

Поверхности вращенія.

229. Поверхности вращенія описываются нѣкоторыми кривыми S_0, лежащими въ плоскости XOZ (см. черт. 262), при вращеніи этой плоскости вокругъ оси Z.

Пусть уравненіе образующей кривой S_0 будетъ $\varphi\ (x, z) = 0$. Когда плоскость кривой, которая вначалѣ совпадала съ плоскостью XOZ, повернется на нѣкоторый уголъ, тогда кривая S_0, описавъ часть поверхности вращенія, займетъ положеніе S въ нѣкоторой плоскости P. Всякая точка M_0 кривой S_0 описываетъ кругъ, лежащій въ плоскости, параллельной плоскости XOY, центръ котораго N лежитъ на оси Z. Такъ какъ при вращеніи плоскости P кривая S вида своего не мѣняетъ, то, очевидно, уравненіе кривой S въ плоскости P будетъ такое же, какъ и уравненіе кривой S_0 въ плоскости XOZ, т. е.

$$\varphi\ (MN, z) = 0. \tag{*}$$

Но $MN = OQ$, гдѣ Q проекція точки M на плоскости XOY. Слѣдовательно, для всякой точки поверхности вращенія, координаты которой пусть будутъ x, y, z, будетъ удовлетворяться уравненіе

$$\varphi(\overline{OQ}, z) = 0; \qquad (*)$$

но, принимая во вниманіе, что

$$OQ = \sqrt{x^2 + y^2},$$

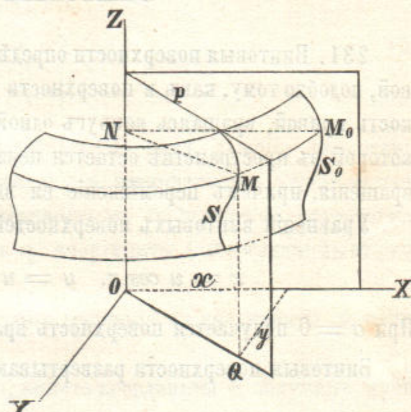
получаемъ окончательно общее уравненіе поверхностей вращенія вокругъ оси Z въ такомъ видѣ:

$$\varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Вообще говоря, если ось поверхности вращенія имѣетъ уравненія

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

гдѣ x_0, y_0, z_0 суть координаты нѣкоторой неподвижной точки на оси, то всякая



Черт. 262.

параллель поверхности будетъ опредѣляться пересѣченіемъ шара $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \alpha^2$, имѣющаго центромъ неподвижную точку, и плоскости $ax + by + cz + d = \beta$, перпендикулярной къ оси, такъ что уравненіе поверхности вращенія будетъ имѣть видъ

$$\varphi(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, ax + by + cz + d) = 0.$$

230. *Параллелями* поверхности вращенія называются круги, описываемые разными точками вращающейся плоской кривой, плоскости которыхъ, очевидно, перпендикулярны къ оси вращенія. Каждое изъ положеній вращающейся плоской кривой S называется *меридіаномъ* поверхности. Полезно замѣтить еще слѣдующій видъ уравненій поверхностей вращенія. Рѣшая уравненіе (*) относительно z, получимъ

$$z = f(\overline{MN});$$

но $MN = OQ$, отсюда

$$x = OQ.\ cos\ QOX = MN.\ cos\ QOX,$$

$$y = OQ.\ sin\ QOX = MN.\ sin\ QOX.$$

Уголъ QOX есть такъ называемая *долгота* точки M поверхности вращенія и представляетъ тотъ уголъ, подъ которымъ наклонена плоскость меридіана точки M къ плоскости перваго меридіана, совпадающей съ плоскостью ZOX. Обозначая

разстояніе MN точки M до оси вращенія черезъ u, а долготу точки M черезъ v, получимъ общія уравненія поверхностей вращенія въ такомъ видѣ:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u).$$

Винтовыя поверхности.

231. Винтовыя поверхности опредѣляются вращеніемъ нѣкоторой плоской кривой, подобно тому, какъ и поверхности вращенія, съ тою только разницею, что плоскость кривой, вращаясь вокругъ одной изъ лежащихъ на ней прямой, положеніе которой въ пространствѣ остается неизмѣннымъ, скользитъ еще вдоль по этой оси вращенія, причемъ перемѣщеніе ея вдоль по оси пропорціонально углу вращенія.

Уравненія винтовыхъ поверхностей имѣютъ видъ

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u) + a v.$$

При $a = 0$ получается поверхность вращенія.

Винтовыя поверхности развертываются на поверхности вращенія.

Криволинейныя координаты.

232. Представимъ себѣ, что три декартовскія координаты x, y, z нѣкоторой точки M въ пространствѣ выражены въ видѣ функцій отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ u, v, w

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w), \\ y &= \psi(u, v, w), \\ z &= \omega(u, v, w); \end{aligned} \tag{1}$$

очевидно, что если функціи φ, ψ, ω суть функціи однозначныя, то всякой системѣ значеній u_0, v_0, w_0 независимыхъ перемѣнныхъ будутъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленныя значенія функцій φ, ψ, ω. Всякій разъ, когда эти значенія будутъ вещественныя, они представятъ собою значенія трехъ координатъ x_0, y_0, z_0 нѣкоторой точки пространства M_0. Обратно, если задано положеніе точки M_0 ея координатами x_0, y_0, z_0, то рѣшеніемъ трехъ уравненій

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi(u, v, w), \\ y_0 &= \psi(u, v, w), \\ z_0 &= \omega(u, v, w), \end{aligned}$$

относительно трехъ неизвѣстныхъ u, v, w получимъ одну или нѣсколько системъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ u, v, w. Итакъ мы видимъ, что положеніе точки въ пространствѣ можетъ быть задаваемо значеніями трехъ независимыхъ

перемѣнныхъ u, v, w, которыя по этой причинѣ носятъ названіе криволинейныхъ координатъ точки.

Зададимъ одной изъ независимыхъ перемѣнныхъ, напримѣръ, u, нѣкоторое частное значеніе u_0; тогда, подставляя въ уравненія (1) u_0 вмѣсто u, получимъ уравненія

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u_0, v, w), \\ y &= \psi(u_0, v, w), \\ z &= \omega(u_0, v, w). \end{aligned} \tag{2}$$

Мы видѣли уже, что три уравненія, подобныя (2), какъ дающія выраженія трехъ декартовыхъ координатъ въ функціяхъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, вообще говоря, опредѣляютъ нѣкоторую поверхность въ пространствѣ, которую назовемъ *поверхностью уровня* для значенія u_0 координаты u и обозначимъ эту поверхность уровня черезъ U_0.

Подобнымъ же образомъ для всякаго другого значенія u_1 координаты u получимъ другую поверхность уровня U_1.

Подставляя въ уравненія (1) значеніе v_0 вмѣсто координаты v, получимъ уравненія поверхности уровня V_0 для значенія v_0 координаты v въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v_0, w), \\ y &= \psi(u, v_0, w), \\ z &= \omega(u, v_0, w). \end{aligned} \tag{3}$$

Наконецъ, мы получимъ уравненія поверхности уровня W_0, соотвѣтствующей значенію w_0 координаты w въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w_0), \\ y &= \psi(u, v, w_0), \\ z &= \omega(u, v, w_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Три поверхности уровня U_0, V_0, W_0 пересѣкаются между собою попарно по тремъ кривымъ линіямъ и могутъ имѣть одну или нѣсколько общихъ точекъ пересѣченія. Положимъ, что функціи φ, ψ, ω таковы, что для значеній u_0, v_0, w_0 получается одна или нѣсколько дѣйствительныхъ точекъ встрѣчи. Тогда положеніе въ пространствѣ каждой изъ этихъ точекъ, очевидно, указывается заданіемъ численныхъ значеній u_0, v_0, w_0 криволинейныхъ координатъ u, v, w.

233. Пояснимъ сказанное примѣромъ декартовой системы, которую, какъ увидимъ, можно разсматривать, какъ частный случай криволинейной. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что функціи φ, ψ, ω таковы, какъ показано въ слѣдующихъ уравненіяхъ:

$$x = u,\ y = v,\ z = w.$$

Тогда поверхность уровня U_0, имѣя уравненіе:

$$x = u_0,$$

есть не что иное, какъ плоскость, параллельная плоскости *yz*. Подобнымъ же образомъ двѣ другія поверхности уровня V_0 и W_0, опредѣляясь уравненіями

$$y = v_0 \text{ и } z = w_0,$$

представляютъ собою плоскости, параллельныя двумъ другимъ плоскостямъ координатъ, и точка M_0, опредѣляемая координатами u_0, v_0, w_0, опредѣляется, какъ точка встрѣчи трехъ плоскостей U_0, V_0, W_0, параллельныхъ координатнымъ плоскостямъ, что уже извѣстно изъ элементовъ.

234. Излагавшаяся въ § 36 координатная система, носящая названіе полярной системы координатъ, опредѣлялась уравненіями

$$x = \rho \cos \psi \sin \varphi,$$

$$y = \rho \sin \psi \sin \varphi,$$

$$z = \rho \cos \varphi.$$

ρ, φ, ψ суть, какъ мы видимъ, три криволинейныя координаты точки пространства. Послѣднія уравненія можемъ переписать въ такомъ видѣ:

$$x = u \cos v \sin w,$$

$$y = u \sin v \sin w,$$

$$z = u \cos w.$$

Поверхность уровня U_0 получится, подставляя въ послѣднія уравненія u_0 вмѣсто u и исключая v и w. Это исключеніе можно сдѣлать, возвышая въ квадратъ всѣ три уравненія и складывая. Получаемъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = u_0^{\,2};$$

итакъ, поверхность уровня U_0 есть шаръ, имѣющій центръ въ началѣ координатъ и радіусъ, равный u_0. Поверхность уровня V_0 получимъ, раздѣляя второе уравненіе на первое

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} v_0.$$

Это уравненіе, будучи переписано въ видѣ

$$y = \operatorname{tang} v_0 . x,$$

даетъ для поверхности уровня V_0 плоскость, проходящую черезъ ось z-овъ и образующую съ плоскостью *xy* уголъ, равный v_0. Наконецъ, поверхность уровня W_0 будетъ конусомъ вращенія, имѣющимъ вершину въ началѣ координатъ, ось, совпа-

дающую съ осью z-овъ, и уголъ производящихъ съ осью равный w_0. Уравненіе этого конуса имѣетъ видъ:

$$x^2 + y^2 = z^2 \, tang^2 \, w_0.$$

Итакъ мы замѣчаемъ, что въ полярныхъ координатахъ точка опредѣляется пересѣченіемъ трехъ поверхностей: шара, плоскости и конуса.

235. Разсмотримъ еще *полуполярныя* или *цилиндрическія* координаты:

$$x = u \cos v,$$

$$y = u \sin v,$$

$$z = w.$$

Поверхности уровня суть:

$$U_0 \text{— цилиндръ:} \quad x^2 + y^2 = u_0^{\,2},$$

$$V_0 \text{— плоскость:} \quad y = x \, tang \, v_0,$$

$$W_0 \text{— плоскость:} \quad z = w_0.$$

236. Обращаемся теперь къ одному изъ замѣчательнѣйшихъ видовъ криволинейныхъ координатъ, разсматривавшихся въ первый разъ Ламэ и прилагавшихся съ успѣхомъ въ разныхъ вопросахъ математики и механики, къ такъ называемымъ *эллиптическимъ* координатамъ.

Возьмемъ поверхность второго порядка съ центромъ, уравненіе которой имѣетъ видъ:

$$\frac{x^2}{a-k} + \frac{y^2}{b-k} + \frac{z^2}{c-k} - 1 = 0, \qquad (1)$$

и положимъ, что $a > b > c > 0$. Возьмемъ какую нибудь точку пространства M_0, имѣющую координаты x_0, y_0, z_0, и поставимъ себѣ задачей: если числа a, b, c заданы, то подобрать k такъ, чтобы поверхность (1) проходила черезъ точку M_0.

Покажемъ, что, какъ бы ни было выбрано положеніе точки M_0 въ пространствѣ, можно всегда подобрать три дѣйствительныхъ значенія k_1, k_2, k_3 для числа k такъ, что для каждаго изъ значеній получится, послѣ подстановки этого значенія въ уравненіе (1), уравненіе поверхности второго порядка, проходящей черезъ точку M_0. Слѣдовательно, черезъ каждую точку пространства проходятъ три поверхности вида (1). Мало того, оказывается, что

$$k_1 < c < k_2 < b < k_3 < a,$$

такъ что для значенія k_1 получается эллипсоидъ, для значенія k_2—однополый гиперболоидъ и для значенія k_3—двуполый гиперболоидъ.

Итакъ, числа k_1, k_2, k_3, можно разсматривать, какъ криволинейныя, такъ называемыя эллиптическія, координаты точки, причемъ всегда поверхность уровня для координаты k_1 будетъ нѣкоторый эллипсоидъ, поверхностью уровня для коор-

динаты k_2—нѣкоторый однополый гиперболоидъ и, наконецъ, для координаты k_3—двуполый гиперболоидъ. Всякая точка пространства разсматривается, какъ точка встрѣчи указанныхъ поверхностей уровня.

Подставимъ въ первую часть уравненія (1) вмѣсто x, y, z числа x_0, y_0, z_0; тогда эта первая часть будетъ слѣдующая функція отъ k:

$$f(k) = \frac{x_0^2}{a-k} + \frac{y_0^2}{b-k} + \frac{z_0^2}{c-k} - 1.$$

Эта функція есть функція непрерывная отъ k въ промежуткахъ

$$(-\infty, c),\ (c, b),\ (b, a),\ (a, +\infty)$$

и претерпѣваетъ разрывъ непрерывности только при значеніяхъ

$$k = c,\quad k = b,\quad k = a.$$

Разсмотримъ первый промежутокъ: $(-\infty, c)$. При $k = -\infty$ всѣ три дроби функціи $f(k)$ равны нулю, и мы получаемъ, что $f(-\infty) = -1$. Что же теперь будетъ, если мы, увеличивая значенія k, отъ $-\infty$ подойдемъ къ значенію $k = c$?

Такъ какъ при $k = c$ функція $f(k)$ обращается въ ∞, то мы разсмотримъ нѣкоторое значеніе $k = c - \varepsilon$, гдѣ ε достаточно малая положительная величина. Тогда, для этого значенія k, дроби

$$\frac{x_0^2}{a-k} \text{ и } \frac{y_0^2}{b-k}$$

мало отличаются отъ дробей

$$\frac{x_0^2}{a-c} \text{ и } \frac{y_0^2}{b-c}; \tag{2}$$

что касается до третьей дроби $\frac{z_0^2}{c-k}$, то она, будучи равна $\frac{z_0^2}{\varepsilon}$, оставаясь положительною, при достаточно маломъ ε можетъ быть сдѣлана какъ угодно большою и, слѣдовательно, по численной величинѣ превзойдетъ численную величину двухъ другихъ дробей и -1.

Итакъ мы видимъ, что значеніе функціи $f(k)$ положительное для значеній k, меньшихъ c и достаточно близкихъ къ нему.

Функція $f(k)$, оставаясь непрерывною въ сказанномъ промежуткѣ, начиная со значенія -1, дѣлается, наконецъ, положительною; слѣдовательно, эта функція, будучи непрерывною и вещественною для всѣхъ вещественныхъ значеній k, необходима должна, по крайней мѣрѣ для одного значенія k_1, заключающагося въ промежуткѣ $(-\infty, c)$, обращаться въ нуль, и, слѣдовательно, это число k_1 будетъ удовлетворять уравненію (1) при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, что и требовалось доказать.

Разсмотримъ теперь слѣдующій промежутокъ: (c, b). Будемъ увеличивать число k отъ значенія $c+\varepsilon$ до $b-\varepsilon$, гдѣ ε достаточно малая положительная величина.

При $k=c+\varepsilon$ третья дробь: $\frac{z_0^2}{c-k}$, будучи равною $-\frac{z_0^2}{\varepsilon}$, отрицательна, но численная ея величина можетъ быть сдѣлана больше любой напередъ заданной большой величины; слѣдовательно, по численной величинѣ, навѣрное, превзойдетъ сумму остальныхъ дробей, которыя мало отличаются отъ дробей (2), и, слѣдовательно, функція $f(c+\varepsilon)<0$. Подобнымъ же образомъ, мы покажемъ, что для значенія $k=b-\varepsilon$ вторая дробь $\frac{y_0^2}{b-k}$, будучи равною $\frac{y_0^2}{\varepsilon}$, положительна, а численная ея величина, при уменьшеніи ε, возрастаетъ до безконечности. Отсюда ясно, что при достаточно маломъ значеніи ε численная величина этой дроби, навѣрно превзойдетъ численную величину суммы остальныхъ членовъ, которая мало разнится отъ слѣдующей суммы:

$$\frac{x_0^2}{a-b}+\frac{z_0^2}{c-b}-1.$$

Итакъ, при достаточно маломъ ε функція $f(b-\varepsilon)>0$. Отсюда мы видимъ, что функція $f(k)$, будучи непрерывною, переходитъ изъ отрицательныхъ значеній въ положительныя; слѣдовательно, въ разсматриваемомъ промежуткѣ, функція $f(k)$ имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень k_2.

Совершенно аналогичнымъ образомъ мы покажемъ существованіе, по крайней мѣрѣ, одного корня въ промежуткѣ (b, a); но если мы освободимся отъ знаменателей въ уравненіи (1), то для k получимъ кубическое уравненіе, которое не будемъ выписывать, такъ какъ его не трудно составить; слѣдовательно, для k не должно получаться болѣе трехъ корней, что показываетъ, что въ каждомъ промежуткѣ существуетъ только по одному корню.

Итакъ мы видимъ, что, зная декартовы координаты точки, мы получаемъ ея эллиптическія координаты черезъ рѣшеніе нѣкотораго кубическаго уравненія.

237. Обратная задача болѣе проста. Покажемъ, какъ, зная три эллиптическія координаты k_1, k_2, k_3 точки M_0, вычислить ея декартовы координаты x_0, y_0, z_0.

Для вычисленія этихъ координатъ будутъ существовать три уравненія:

$$\frac{x^2}{k_1-a}+\frac{y^2}{k_1-b}+\frac{z^2}{k_1-c}+1=0, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{k_2-a}+\frac{y^2}{k_2-b}+\frac{z^2}{k_2-c}+1=0, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{k_3-a}+\frac{y^2}{k_3-b}+\frac{z^2}{k_3-c}+1=0. \tag{3}$$

Вычитая изъ уравненія (1) уравненіе (2), получимъ:

$$\frac{x^2}{(k_1-a)(k_2-a)}+\frac{y^2}{(k_1-b)(k_2-b)}+\frac{z^2}{(k_1-c)(k_2-c)}=0. \quad (4)$$

Подобнымъ же образомъ получимъ два другихъ уравненія:

$$\frac{x^2}{(k_2-a)(k_3-a)}+\frac{y^2}{(k_2-b)(k_3-b)}+\frac{z^2}{(k_2-c)(k_3-c)}=0, \quad (5)$$

$$\frac{x^2}{(k_3-a)(k_1-a)}+\frac{y^2}{(k_3-b)(k_1-b)}+\frac{z^2}{(k_3-c)(k_1-c)}=0. \quad (6)$$

Покажемъ, что уравненіе (4), помня, что въ немъ координаты x, y, z обозначаютъ, собственно говоря, координаты x_0, y_0, z_0, соотвѣтствующія эллиптическимъ координатамъ k_1, k_2, k_3, выражаетъ то свойство поверхностей уровня k_1, k_2, что эти поверхности пересѣкаются въ точкѣ M_0 подъ прямымъ угломъ (ортогонально), т. е. что двѣ касательныя плоскости, проведенныя въ точкѣ M_0 къ этимъ поверхностямъ, взаимно перпендикулярны.

Въ самомъ дѣлѣ, касательная плоскость къ поверхности уровня (1) въ точкѣ M_0 этой поверхности имѣетъ уравненіе

$$\frac{xx_0}{k_1-a}+\frac{yy_0}{k_1-b}+\frac{zz_0}{k_1-c}+1=0, \quad (7)$$

касательная же плоскости въ той же точкѣ M_0 къ поверхности (2) имѣетъ уравненіе

$$\frac{xx_0}{k_2-a}+\frac{yy_0}{k_2-b}+\frac{zz_0}{k_2-c}+1=0. \quad (8)$$

Выписывая условіе перпендикулярности плоскостей (7) и (8), мы получимъ:

$$\frac{x_0}{k_1-a}\cdot\frac{x_0}{k_2-a}+\frac{y_0}{k_1-b}\cdot\frac{y_0}{k_2-b}+\frac{z_0}{k_1-c}\cdot\frac{z_0}{k_2-c}=0.$$

Послѣднее уравненіе совпадаетъ съ уравненіемъ (4). Уравненія же (5) и (6) показываютъ, что и другія двѣ пары поверхностей уровня k_1, k_2, k_3 пересѣкаются также ортогонально; другими словами, въ точкѣ M_0 встрѣчаются три поверхности уровня ортогонально, т. е. такимъ образомъ, что три касательныя плоскости въ этой точкѣ къ поверхностямъ составляютъ прямоугольный трехгранный уголъ.

Для нахожденія искомыхъ декартовыхъ координатъ x_0, y_0, z_0 точки M_0 мы замѣчаемъ, что уравненія (1), (2), (3) суть уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными: x^2, y^2, z^2. Рѣшая ихъ относительно этихъ трехъ квадратовъ по пра-

виламъ элементарной алгебры, получимъ

$$x^2 = \frac{(a-k_1)(a-k_2)(a-k_3)}{(a-c)(a-b)},$$

$$y^2 = \frac{(b-k_1)(b-k_2)(b-k_3)}{(b-c)(b-a)},$$

$$z^2 = \frac{(c-k_1)(c-k_2)(c-k_3)}{(c-a)(c-b)}.$$

Послѣднія формулы показываютъ, что для x_0, y_0, z_0 мы всегда получаемъ вещественныя значенія.

Система трехъ эллиптическихъ координатъ k_1, k_2, k_3 опредѣляетъ 8 точекъ встрѣчи трехъ поверхностей уровня, имѣющихъ координаты $x = \pm x_0$, $y = \pm y_0$, $z = \pm z_0$ и лежащихъ въ вершинахъ параллепипеда, грани котораго параллельны плоскостямъ координатъ.

Поверхности уровня эллиптическихъ координатъ представляютъ собою частный случай системы такъ называемыхъ *ортогональныхъ* поверхностей, встрѣчающихся подъ прямымъ угломъ.

238. Можно, конечно, опредѣлить положеніе точки въ пространствѣ бо́льшимъ числомъ чиселъ, чѣмъ три; примѣръ подобнаго рода мы видѣли въ тетраэдрическихъ координатахъ, но при такихъ способахъ заданія между вводимыми въ разсмотрѣніе перемѣнными, или, какъ ихъ можно называть, координатами точекъ, должно существовать какъ разъ такое число зависимостей, чтобы независимыми выходили только три.

239. Какъ частный случай криволинейныхъ координатъ въ пространствѣ, можно разсматривать также криволинейныя координаты на плоскости или, вообще, на какой нибудь поверхности.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія всякой поверхности S могутъ быть написаны въ такомъ видѣ:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \omega(u, v). \qquad (1)$$

Дадимъ перемѣнной u частное значеніе u_0. Подставляя это значеніе въ уравненіе (1), получимъ

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad z = \omega(u_0, v). \qquad (2)$$

Эти уравненія даютъ выраженія координатъ x, y, z въ видѣ функцій отъ одного независимаго перемѣннаго v и, слѣдовательно, опредѣляютъ нѣкоторую кривую линію въ пространствѣ L_0. Эта кривая L_0 лежитъ, очевидно, на поверхности S, ибо всякое значеніе v_0, послѣ подстановки въ уравненія (2), даетъ такія значенія x, y, z, которыя получаются и изъ уравненій (1) заданной поверхности отъ подстановки въ нихъ значеній $u = u_0$, $v = v_0$. Назовемъ линію L_0, проведенную

на поверхности S, *линией уровня* для значенія u_0 независимаго перемѣннаго u. Для другого значенія u_1 получимъ другую линію уровня L_1, такъ что наша поверхность образуется системою кривыхъ линій L_0, L_1, ..., получаемыхъ при разныхъ значеніяхъ u; подобнымъ же образомъ на нашей поверхности лежатъ кривыя линіи L' другой системы, получаемыя изъ уравненій поверхности (1) черезъ подстановку вмѣсто перемѣнной v различныхъ частныхъ значеній.

Положимъ, что намъ заданы частныя значенія независимыхъ перемѣнныхъ u_0, v_0; тогда этимъ значеніямъ соотвѣтствуютъ двѣ кривыя на нашей поверхности L_0 и L'_0. Положимъ, что эти кривыя встрѣчаются въ одной или нѣсколькихъ точкахъ. Тогда положеніе на поверхности S системы этихъ точекъ опредѣляется, очевидно, значеніями u_0 и v_0 независимыхъ перемѣнныхъ. Поэтому перемѣнныя u и v называются *криволинейными координатами* точекъ на данной поверхности.

240. Координатныя системы на плоскости представляютъ собою частный случай криволинейныхъ координатъ на какой угодно поверхности.

Мы получимъ геометрію на плоскости, полагая функцію $\omega(u, v)$ тождественно равною нулю. Тогда мы получимъ общій видъ системъ криволинейныхъ координатъ на плоскости

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

Такъ, напримѣръ, полярныя координаты на плоскости, какъ намъ извѣстно, опредѣляются уравненіями

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v$$

и, наконецъ, декартова система на плоскости, съ изложенія которой мы начали Аналитическую Геометрію, опредѣляется уравненіями

$$x = u, \quad y = v.$$

Для знакомства съ криволинейными координатами на поверхности можно рекомендовать прочесть классическій мемуаръ Гаусса: Disquisitiones generales circa superficies curvas.

Задачи на поверхности второго порядка.

Линія пересѣченія двухъ поверхностей второго порядка $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ пересѣкается всякою плоскостью P по четыремъ дѣйствительнымъ или мнимымъ точкамъ. Въ самомъ дѣлѣ, плоскость P встрѣчаетъ поверхности $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ по коническимъ сѣченіямъ C_1, C_2, которыя, находясь въ одной плоскости P, имѣютъ общими четыре дѣйствительныхъ или мнимыхъ точки. По этой причинѣ кривая встрѣчи двухъ поверхностей второго порядка носитъ названіе алгебраической кривой четвертаго порядка.

Вообще, порядокъ алгебраической кривой линіи въ пространствѣ опредѣлястся числомъ точекъ пересѣченія съ какой угодно плоскостью.

Въ частномъ случаѣ разсматриваемая кривая можетъ быть мнимою, когда разсматриваемыя поверхности не пересѣкаются между собою. Принято вводить въ разсмотрѣніе такъ называемыя *мнимыя точки*, т. е. точки, координаты которыхъ мнимы. Какъ и на плоскости, подобныя точки вводятся условно, не связывая съ ними никакого геометрическаго представленія. Условно говорятъ, что мнимая точка лежитъ на данной поверхности, если тѣ комплексныя (мнимыя) числа, которыя мы считаемъ координатами этой точки, удовлетворяютъ уравненію поверхности. Такъ, напримѣръ, мнимая точка ($x = 2 + \sqrt{-2}$, $y = 2 - \sqrt{-2}$, $z = 0$), лежитъ на круговомъ цилиндрѣ

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Итакъ, будетъ-ли кривая встрѣчи двухъ поверхностей дѣйствительная или мнимая, всегда мы будемъ говорить, что уравненіе

$$S_1 - k\,S_2 = 0$$

при различныхъ k опредѣляетъ пучекъ поверхностей второго порядка, проходящихъ черезъ кривую встрѣчи двухъ поверхностей:

$$S_1 = 0,\ S_2 = 0.$$

Три поверхности второго порядка:

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0$$

встрѣчаются не болѣе какъ въ восьми дѣйствительныхъ точкахъ. Въ самомъ дѣлѣ, исключая изъ трехъ общихъ уравненій второй степени между тремя перемѣнными x, y, z двѣ изъ числа ихъ, напр. y, z, мы получимъ уравненіе, которое будетъ относительно x восьмой степени. Восемь корней послѣдняго уравненія дадутъ 8 абсциссъ восьми точекъ встрѣчи трехъ поверхностей второго порядка.

Уравненіе

$$S_1 - kS_2 - lS_3 = 0$$

опредѣляетъ, очевидно, всѣ поверхности, проходящія черезъ восемь точекъ встрѣчи трехъ заданныхъ.

Двумя коэффиціентами k и l можно распорядиться такимъ образомъ, чтобы заставить поверхность проходить еще черезъ двѣ новыя точки.

Задачи.

1. Средина разстоянія между двумя мнимыми точками есть точка дѣйствительная.

Отв. $x_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y_1 = \gamma + \delta\sqrt{-1}, \quad z_1 = \varepsilon + \zeta\sqrt{-1}.$

$$x_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad y_2 = \gamma - \delta\sqrt{-1}, \quad z_2 = \varepsilon - \zeta\sqrt{-1}.$$

Координаты средины разстоянія суть:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\alpha,\quad \frac{y_1+y_2}{2}=\gamma,\quad \frac{z_1+z_2}{2}=\varepsilon.$$

2. Прямая, проходящая черезъ двѣ мнимыя сопряженныя точки есть дѣйствительная.

Отв. См. § 238 Геом. дв. изм.

3. Двѣ мнимыя сопряженныя плоскости

$$(A+A'\sqrt{-1})\,x+(B+B'\sqrt{-1})\,y+(C+C'\sqrt{-1})\,z+(D+D'\sqrt{-1})=0$$

$$(A-A'\sqrt{-1})\,x+(B-B'\sqrt{-1})\,y+(C-C'\sqrt{-1})\,z+(D-D'\sqrt{-1})=0$$

пересѣкаются по дѣйствительной прямой.

Отв. Уравненія прямой пересѣченія суть:

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

4. Черезъ всякую мнимую точку проходитъ безчисленное множество дѣйствительныхъ плоскостей, которыя проходятъ въ то же время и черезъ точку, сопряженную съ данной.

Отв. Уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку $(\alpha+\beta\sqrt{-1},\ \gamma+\delta\sqrt{-1},\ \varepsilon+\zeta\sqrt{-1})$, можетъ быть написано такъ:

$$A(x-\alpha)+B(y-\gamma)+C(z-\varepsilon)-\sqrt{-1}\,(A\beta+B\delta+C\zeta)=0.$$

Это уравненіе будетъ опредѣлять дѣйствительную плоскость только тогда, когда коэффиціенты A, B, C удовлетворяютъ условію

$$A\beta+B\delta+C\zeta=0.$$

Въ такомъ случаѣ плоскость

$$A\,(x-\alpha)+B\,(y-\gamma)+C\,(z-\varepsilon)=0$$

проходитъ черезъ дѣйствительную прямую

$$\frac{x-\alpha}{\beta}=\frac{y-\gamma}{\delta}=\frac{z-\varepsilon}{\zeta},$$

соединяющую данную точку съ ея сопряженною. См. зад. 2.

5. Если мнимая прямая проходитъ черезъ дѣйствительную точку, то она пересѣкается въ этой точкѣ со своею сопряженною прямою.

Отв. Прямую мы называемъ мнимою, если ея уравненія заключаютъ мнимые коэффиціенты, напримѣръ

$$x=(a+a'\sqrt{-1})\,z+p+p'\sqrt{-1},$$

$$y=(b+b'\sqrt{-1})\,z+q+q'\sqrt{-1},$$

Уравненіе прямой сопряженной получимъ, мѣняя знакъ у корня $\sqrt{-1}$.

6. Если двѣ сопряженныя прямыя пересѣкаются, то, какъ точка ихъ пересѣченія, такъ и плоскость, чрезъ нихъ проходящая, дѣйствительны.

7. Показать, что 8 точекъ опредѣляютъ, вообще говоря, кривую четвертаго порядка, могущую быть линіею пересѣченія двухъ поверхностей второго порядка.

Отв. Полагая одинъ изъ десяти коэффиціентовъ въ уравненіи поверхности второго порядка равнымъ единицѣ, мы будемъ имѣть между девятью коэффиціентами восемь уравненій первой степени, изъ которыхъ можно будетъ выразить восемь изъ числа коэффиціентовъ линейно черезъ девятый, остающійся совершенно произвольнымъ. Подставляя полученныя выраженія восьми коэффиціентовъ въ уравненіе поверхности, мы замѣтимъ, что этотъ произвольный девятый коэффиціентъ войдетъ въ уравненіе поверхности въ первой степени и это уравненіе будетъ имѣть видъ:

$$S_1 - kS_2 = 0,$$

гдѣ k есть девятый коэффиціентъ. Получается пучекъ, опредѣляющій кривую линію, проходящую черезъ восемь данныхъ точекъ. Исключеніе будутъ составлять особыя группировки точекъ, черезъ которыя можно провести покрайней мѣрѣ три поверхности, не принадлежащія пучку.

8. Возьмемъ систему плоскостей

$$S_1 + kS_2 + lS_3 = 0,$$

проходящихъ черезъ восемь точекъ встрѣчи трехъ поверхностей $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$. Коэффиціенты k и l можно подобрать такъ, чтобы заставить проходить поверхность еще черезъ двѣ новыя точки. Выборомъ этихъ коэффиціентовъ мы заставляемъ поверхность проходить черезъ 10 точекъ, тогда какъ девяти точекъ достаточно для опредѣленія поверхности. Какъ объяснить кажущееся противорѣчіе?

Отв. Возьмемъ семь изъ числа заданныхъ восьми точекъ. Опредѣляя коэффиціенты уравненія поверхности второго порядка подъ тѣмъ условіемъ, чтобы поверхность проходила черезъ эти 7 точекъ, мы замѣтимъ, что два изъ числа коэффиціентовъ останутся совершенно произвольными. Всѣ остальные коэффиціенты выразятся черезъ нихъ линейно; слѣдовательно, эти два коэффиціента войдутъ линейно и въ уравненіе поверхности, проходящей черезъ эти 7 точекъ; такъ что это уравненіе будетъ имѣть видъ

$$S_1 - kS_2 - lS_3 = 0. \qquad (*)$$

При различныхъ k и l будутъ получаться всевозможныя поверхности, проходящія черезъ 8 точекъ встрѣчи трехъ поверхностей $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$. Итакъ мы видимъ, что положеніе семи точекъ опредѣляетъ положеніе восьмой точки, общей всѣмъ поверхностямъ системы (*), а потому изъ восьми заданныхъ точекъ

произвольны только семь, слѣдовательно, заданіе подобныхъ восьми точекъ равносильно заданію только семи. Эти-то семь точекъ, вмѣстѣ съ двумя новыми, и дадутъ девять точекъ, опредѣляющихъ положеніе поверхности.

9. Доказать, что уравненіе

$$\alpha\beta - k\gamma\delta = 0$$

при α, β, γ, δ линейныхъ функціяхъ, опредѣляетъ линейчатую поверхность.

10. Когда уравненіе:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P\delta^2 = 0$$

опредѣляетъ линейчатую поверхность?

Отв. Если ни одинъ изъ коэффиціентовъ L, M, N, P не равенъ нулю, то два изъ нихъ должны быть положительными, а два отрицательными.

11. Если поверхность второго порядка имѣетъ безчисленное множество точекъ, общихъ съ шаромъ, то всякая плоскость, касательная къ шару, пересѣкаетъ поверхность по линіи второго порядка, для которой точка прикосновенія плоскости къ шару есть одинъ изъ фокусовъ.

Отв. Уравненіе всякой поверхности, соприкасающейся съ данною $S_1 = 0$ по плоской кривой, имѣетъ видъ

$$S_1 - k\,(lx + my + nz + p)^2 = 0. \text{ (См. § 206).}$$

Положимъ, что одною изъ такихъ поверхностей будетъ шаръ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0.$$

Очевидно, имѣемъ тождественно равенство между первыми частями двухъ предыдущихъ уравненій, откуда уравненіе поверхности $S_1 = 0$ можетъ быть написано такъ:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 + k\,(lx + my + nz + p)^2 = 0.$$

Полагая $c = r$, мы сдѣлаемъ плоскость xy касательною плоскостью къ шару. На этой плоскости точка касанія будетъ имѣть координаты (a, b). Полагая $z = 0$, получимъ уравненіе сѣченія поверхности $S_1 = 0$ плоскостью xy въ такомъ видѣ:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + k\,(lx + my + p)^2 = 0.$$

На сказанномъ основано было разсмотрѣніе линій второго порядка, какъ сѣченій конуса плоскостью въ §§ 231, 232, 233 геом. дв. изм.

12. Два пучка плоскостей

$$\beta - \lambda\alpha = 0, \quad \delta - \mu\gamma = 0,$$

если они находятся въ гомографической зависимости, даютъ въ пересѣченіи линейчатую поверхность второго порядка.

Отв. Гомографическая зависимость опредѣляется уравненіемъ

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0$$

(См. § 366 геом. дв. изм.). Черезъ исключеніе λ и μ получается уравненіе искомой линейчатой поверхности (см. § 369 геом. дв. изм.)

13. Показать, что прямолинейныя образующія косой плоскости, принадлежащія одной системѣ, отсѣкают на любыхъ двухъ образующихъ другой системы пропорціональные отрѣзки.

Отв. Всѣ онѣ лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ.

14. Показать, что разложеніемъ на сумму квадратовъ можно привести общее уравненіе поверхности второго порядка

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy +$$
$$+ 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + F = 0$$

къ виду

$$L\,(x + \lambda_1 y + \lambda_2 z + \lambda_3)^2 + M\,(y + \mu_1 z + \mu_2)^2 + N\,(z + \nu_1)^2 + P = 0,$$

гдѣ

$$L = A_1,\ L.\ M = \begin{vmatrix} A_1, & B_3 \\ B_3, & A_2 \end{vmatrix},\ LMN = \begin{vmatrix} A_1, & B_3, & B_1 \\ B_3, & A_2, & B_2 \\ B_1, & B_2, & A_3 \end{vmatrix},$$

$$L.\ M.\ N.\ P = \begin{vmatrix} A_1, & B_3, & B_1, & C_1 \\ B_3, & A_2, & B_2, & C_2 \\ B_1, & B_2, & A_3, & C_3 \\ C_1, & C_2, & C_3, & F \end{vmatrix}.$$

15. Сколько конусовъ въ числѣ поверхностей, принадлежащихъ пучку?

Отв. Употребляя обозначенія предыдущей задачи, условіе конуса, $P = 0$, даетъ равенство нулю четверного опредѣлителя. Коэффиціенты же плоскостей пучка всѣ заключаютъ линейно неопредѣленный множитель k. Этотъ параметръ войдетъ во всѣ элементы и равенство нулю четверного опредѣлителя дастъ уравненіе четвертой степени, которое опредѣлитъ, вообще говоря, четыре конуса.

16. Зная координаты концовъ двухъ изъ числа сопряженныхъ діаметровъ эллипсоида, найти координаты конца третьяго діаметра.

Отв. Возьмемъ уравненіе эллипсоида въ простѣйшемъ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Возьмемъ три точки на эллипсоидѣ $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$, $M_3\,(x_3, y_3, z_3)$. Діаметры, проходящіе черезъ нихъ, имѣютъ видъ:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1};\quad \frac{x}{x_2} = \frac{y}{y_2} = \frac{z}{z_2},\quad \frac{x}{x_3} = \frac{y}{y_3} = \frac{z}{z_3}.$$

Помня изъ общей теоріи, что всякому діаметру

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

соотвѣтствуетъ сопряженная діаметральная плоскость

$$Llx + Mmy + Nnz = 0,$$

найдемъ, что въ данномъ случаѣ уравненіе сопряженной діаметральной плоскости будетъ имѣть видъ:

$$\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} = 0;$$

для того чтобы діаметры, проходящіе черезъ точки M_1, M_2, M_3, были сопряженные, необходимо, чтобы было

$$\frac{x_1x_1}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} + \frac{z_1z_2}{c^2} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{x_1x_3}{a^2} + \frac{y_1y_3}{b^2} + \frac{z_1z_3}{c^2} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{x_2x_3}{a^2} + \frac{y_2y_3}{b^2} + \frac{z_2z_3}{c^2} = 0. \qquad (3)$$

Изъ двухъ первыхъ изъ числа послѣднихъ соотношеній находимъ

$$\frac{\frac{x_1}{a}}{\frac{y_2}{b}\frac{z_3}{c} - \frac{z_2}{c}\frac{y_3}{b}} = \frac{\frac{y_1}{b}}{\frac{z_2}{c}\frac{x_3}{a} - \frac{x_2}{a}\frac{z_3}{c}} = \frac{\frac{z_1}{c}}{\frac{x_2}{a}\frac{y_3}{b} - \frac{y_2}{b}\frac{x_3}{a}}.$$

Взявъ корень квадратный изъ суммы квадратовъ предыдущихъ членовъ этой пропорціи, получимъ ± 1, ибо точка M_1 лежитъ на эллипсоидѣ. Равнымъ образомъ покажемъ, что равенъ ± 1 корень квадратный изъ суммы квадратовъ знаменателей. Въ послѣднемъ убѣдимся, употребляя тождество Эйлера и замѣчая, что координаты точекъ M_2 и M_3 должны удовлетворять уравненію эллипсоида и уравненію (3).

Итакъ мы видимъ, что одинъ изъ концовъ діаметра опредѣляется уравненіями

$$\frac{x_1}{a} = \frac{y_2}{b}\frac{z_3}{c} - \frac{z_2}{c}\frac{y_3}{b}, \quad \frac{y_1}{b} = \frac{z_2}{c}\frac{x_3}{a} - \frac{x_2}{a}\frac{z_3}{c},$$

$$\frac{z_1}{c} = \frac{x_2}{a}\frac{y_3}{b} - \frac{y_2}{b}\frac{x_3}{a}.$$

17. Показать, что касательная плоскость въ точкѣ M_0 къ нѣкоторой поверх-

ности съ центромъ параллельна діаметральной плоскости, сопряженной съ діаметромъ, проходящимъ черезъ точку касанія.

Отв. Возьмемъ уравненіе поверхности съ центромъ въ видѣ

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P = 0.$$

Пусть координаты точки касанія будутъ α_0, β_0, γ_0. Уравненіе касательной плоскости будетъ имѣть видъ:

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 + P = 0.$$

Помня же, что всякому діаметру

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}$$

соотвѣтствуетъ діаметральная плоскость

$$Ll\alpha + Mm\beta + Nn\gamma = 0,$$

получаемъ для діаметра, проходящаго черезъ точку M_0:

$$l = \alpha_0, \quad m = \beta_0, \quad n = \gamma_0,$$

откуда справедливость высказаннаго въ задачѣ утвержденія очевидна.

18. Сумма квадратовъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра эллипсоида на три какія нибудь перпендикулярныя между собою касательныя плоскости есть величина постоянная.

Отв. Сравнивая уравненіе

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$$

съ нормальнымъ уравненіемъ плоскости

$$x \cos\alpha_1 + y \cos\beta_1 + z \cos\gamma_1 = p_1,$$

получаемъ:

$$\frac{a^2 \cos\alpha_1}{x_1} = \frac{b^2 \cos\beta_1}{y_1} = \frac{c^2 \cos\gamma_1}{z_1} = p_1,$$

откуда

$$\frac{p_1 x_1}{a} = a \cos\alpha_1, \quad \frac{p_1 y_1}{b} = b \cos\beta_1, \quad \frac{p_1 z_1}{c} = c \cos\gamma_1.$$

Возвышая въ квадратъ и складывая, получаемъ:

$$p^2_1 = a^2 \cos^2\alpha_1 + b^2 \cos^2\beta_1 + c^2 \cos^2\gamma_1.$$

Для двухъ другихъ касательныхъ плоскостей получимъ два соотвѣтственныхъ

уравненія:

$$p_2^2 = a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \cos^2 \beta_2 + c^2 \cos^2 \gamma_2,$$

$$p_3^2 = a^2 \cos^2 \alpha_3 + b^2 \cos^2 \beta_3 + c^2 \cos^2 \gamma_3.$$

Если три касательныя плоскости по парно перпендикулярны, то, складывая послѣднія три уравненія, получимъ:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

19. Показать, что геометрическое мѣсто вершины прямого трехграннаго угла, стороны котораго касаются эллипсоида, есть шаръ, концентрическій съ эллипсоидомъ.

Отв. Слѣдствіе предыдущей задачи.

20. Объемъ параллелепипеда, построеннаго на трехъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипсоида, есть величина постоянная, равная объему параллелепипеда, построеннаго на осяхъ.

Отв. Умножая послѣднія равенства, приведенныя въ зад. 16, на $\frac{x_1}{a}$, $\frac{y_1}{b}$, $\frac{z_1}{c}$ и складывая, получимъ

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = abc.$$

Первая часть послѣдняго равенства есть ушестеренный объемъ тетраэдра, вершины котораго суть: начало координатъ и три точки M_1, M_2, M_3 (см § 77).

21. Сумма квадратовъ трехъ сопряженныхъ діаметровъ эллипсоида есть величина постоянная, равная суммѣ квадратовъ его осей.

Отв. Точно такъ-же, какъ выведены послѣднія выраженія зад. 16, можно, между прочимъ, получить

$$\frac{x_2}{a} = \frac{y_3}{b}\frac{z_1}{c} - \frac{z_3}{c}\frac{y_1}{b}, \quad \frac{x_3}{a} = \frac{y_1}{b}\frac{z_2}{c} - \frac{z_1}{c}\frac{y_2}{b}.$$

Помноживъ эти равенства на $\frac{x_2}{a}$, $\frac{x_3}{a}$ и сложивъ съ первымъ изъ равенствъ зад. 16, помноженнымъ на $\frac{x_1}{a}$, получимъ

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{a^2} = \frac{x_1(y_2z_3 - z_2y_3) + x_2(y_3z_1 - z_3y_1) + x_3(y_1z_2 - z_1y_2)}{abc}.$$

Получаемъ, на основаніи предыдущей задачи,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = b^2, \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2.$$

Складывая, получимъ

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

гдѣ a', b', c' означаютъ половины діаметровъ, проходящихъ черезъ точки M_1, M_2, M_3.

22. Пусть координаты двухъ точекъ въ пространствѣ M_1 и M_2 будутъ x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. Доказать, что выраженіе

$$(x_1y_2 - y_1x_2)^2 + (x_1z_2 - z_1x_2)^2 + (y_1z_2 - z_1y_2)^2$$

равно учетверенному квадрату площади треугольника, образованнаго началомъ координатъ и двумя заданными точками M_1 и M_2.

Отв. $x_1y_2 - y_1x_2$ представляетъ взятую съ тѣмъ или другимъ знакомъ удвоенную площадь проекціи треугольника на плоскости xy (см. § 34 геом. дв. изм.). Обозначая площадь треугольника черезъ Δ, получимъ

$$4\Delta^2 \cos^2 \alpha = (x_1y_2 - y_1x_2)^2;$$

α обозначаетъ, конечно, уголъ между плоскостью треугольника и плоскостью xy.

Подобнымъ образомъ,

$$4\Delta^2 \cos^2 \beta = (y_1z_2 - z_1y_2)^2,$$

$$4\Delta^2 \cos^2 \gamma = (z_1x_2 - x_1z_2)^2.$$

23. Сумма квадратовъ площадей параллелограммовъ, построенныхъ на сопряженныхъ діаметрахъ эллипсоида, есть величина постоянная, равная суммѣ квадратовъ площадей прямоугольниковъ, построенныхъ на осяхъ.

Отв. Умножая равенства зад. 21 на ay_2, ay_3, а первое изъ равенства зад. 16 на ay_1 и складывая, получимъ

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0.$$

Отсюда

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 = a^2b^2$$

или

$$(x_1y_2 - y_1x_2)^2 + (x_1y_3 - y_1x_3)^2 + (x_2y_3 - y_2x_3)^2 = a^2b^2.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе не представляетъ затрудненій.

24. Указать свойства гиперболоидовъ, аналогичныя приведеннымъ въ предыдущихъ задачахъ свойствамъ эллипсоида, представляющимъ обобщеніе на пространство теоремъ Аполлонія.

25. Два гиперболоида

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P = 0,$$

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 - P = 0,$$

называются *сопряженными* и имѣютъ общій ассимптотическій конусъ. Показать, что два сопряженныхъ гиперболоида (изъ которыхъ одинъ, конечно, однополый, а

другой двуполый) и ихъ ассимптотическій конусъ пересѣкаются всякою плоскостью, не параллельною образующимъ конуса, по коническимъ сѣченіямъ, концетрическимъ и гомотетическимъ.

Отв. Уравненіе проекціи сѣченія поверхности

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + H = 0, \qquad (*)$$

гдѣ H или $= 0$, или $= \pm P$, всякою плоскостью $\delta = 0$ на плоскости xy получаемъ черезъ исключеніе z изъ уравненія $\delta = 0$ и уравненія (*).

Получаемъ въ проекціи коническое сѣченіе, опредѣляемое уравненіемъ

$$L\alpha'^2 + M\beta'^2 + N\gamma'^2 + H = 0,$$

гдѣ α', β', γ' не заключаютъ z. Мѣняя H, будемъ получать различныя гомотетическія и концентрическія коническія сѣченія.

26. Произведеніе синусовъ угловъ, составляемыхъ образующею конуса съ плоскостями круговыхъ сѣченій, есть величина постоянная.

27. Доказать, что двѣ прямолинейныя образующія, принадлежащія къ разнымъ системамъ косой плоскости, или однополаго гиперболоида, пересѣкаются между собою.

28. Точки, въ которыхъ касательныя параллельны круговымъ сѣченіямъ поверхности, называются *точками закругленія* (ombiliques). Показать, что такія точки существуютъ въ эллиптическомъ параболоидѣ, двуполомъ гиперболоидѣ и эллипсоидѣ. Въ случаѣ поверхности вращенія точки закругленія совпадаютъ съ вершинами. На шарѣ всѣ точки суть точки закругленія.

Отв. Въ эллипсоидѣ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

координаты точекъ закругленія, если $a > b > c$, будутъ

$$x = \pm \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \; y = 0, \; z = \pm \frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

У двуполаго гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

точки закругленія суть:

$$x = \pm \frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \; y = 0, \; z = \pm \frac{c\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

гдѣ $b > a$.

У эллиптическаго параболоида

$$qx^2 + py^2 = 2pqz$$

точки закругленія будутъ

$$x = \pm \sqrt{p(q-p)},\ y = 0,\ z = \frac{q-p}{2},$$

гдѣ $q > p$.

29. Геометрическое мѣсто вершины прямого трехграннаго угла, грани котораго касаются эллиптическаго параболоида, есть плоскость, перпендикулярная къ оси этой поверхности.

Отв Возьмемъ уравненіе параболоида въ видѣ

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Касательная плоскость въ точкѣ (x_0, y_0, z_0) будетъ имѣть уравненіе

$$\frac{xx_0}{p} + \frac{yy_0}{q} = z + z_0.$$

Сравнивая съ нормальнымъ видомъ уравненія плоскости, получимъ (см. зад. 18)

$$x_0 = -\frac{p\cos\alpha_1}{\cos\gamma_1},\ y_0 = -\frac{q\cos\beta_1}{\cos\gamma_1},\ z_0 = -\frac{p}{\cos\gamma_1}.$$

Подставляя эти координаты въ уравненіе поверхности, получимъ

$$p\frac{\cos^2\alpha_1}{\cos^2\gamma_1} + q\frac{\cos^2\beta_1}{\cos^2\gamma_1} = -2\frac{p_1}{\cos\gamma_1},$$

отсюда

$$p_1 = \frac{p\cos^2\alpha_1 + q\cos^2\beta_1}{-2\cos\gamma_1}.$$

Подставляя полученное значеніе p_1 въ уравненіе плоскости

$$x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 = p_1,$$

получимъ

$$2(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1)\cos\gamma_1 + p\cos^2\alpha_1 + q\cos^2\beta_1 = 0.$$

Взявъ двѣ другія касательныя плоскости, получимъ подобныя же уравненія:

$$2(x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2)\cos\gamma_2 + p\cos^2\alpha_2 + q\cos^2\beta_2 = 0,$$

$$2(x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3)\cos\gamma_3 + p\cos^2\alpha_3 + q\cos^2\beta_3 = 0.$$

Складывая послѣднія уравненія, получимъ окончательно

$$2z + p + q = 0.$$

30. Найти геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе разстоянія которыхъ отъ данной точки и данной плоскости есть число постоянное.

Отв. Поверхность вращенія второго порядка.

31. Найти геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе разстоянія которыхъ отъ нѣкоторой заданной точки M къ среднему геометрическому разстоянію до двухъ неподвижныхъ плоскостей P и P_1 есть постоянное.

Отв. Поверхность второго порядка, относительно которой точка M называется *фокусомъ*, а прямая встрѣчи двухъ плоскостей—*директрисою*.

32. Показать, что поверхность второго порядка имѣетъ безчисленное множество фокусовъ, образующихъ линіи, называемыя *фокальными*.

Отв. Пусть координаты фокуса будутъ α, β, γ, а уравненія директрисы

$$lx + my + nz + p = 0,\ \ l_1x + m_1y + n_1z + p_1 = 0.$$

Уравненіе поверхности второго порядка имѣетъ видъ

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - (lx + my + nz + p)(l_1x + m_1y + n_1z + p_1) = 0.$$

Надо подобрать числа α, β, γ, l, m, ... такъ, чтобы уравненіе совпадало съ уравненіемъ заданной поверхности второго порядка

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + \ldots = 0.$$

Получимъ пропорцію:

$$\frac{1 - ll_1}{A_1} = \frac{1 - mm_1}{A_2} = \frac{1 - nn_1}{A_3} = \ldots$$

Равенство десяти дробей заключаетъ въ себѣ девять различныхъ уравненій; подлежатъ же опредѣленію 11 величинъ: α, β, γ, l, m, n, p, l_1, m_1, n_1, p_1. Изъ этихъ 11 величинъ одной величинѣ, напримѣръ, l_1 можно задать частное значеніе по произволу, напр. положить $l_1 = 1$. Подлежатъ, слѣдовательно, опредѣленію 10 неизвѣстныхъ изъ 9 уравненій, которыя дадутъ возможность выразить 9 изъ неизвѣстныхъ черезъ десятую; напр., можно выразить всѣ остальныя черезъ α. Получимъ, между прочимъ, β и γ въ видѣ нѣкоторыхъ функцій отъ α. Это показываетъ, что фокусовъ поверхности второго порядка безчисленное множество. Они лежатъ на нѣкоторой кривой, называемой *фокальною*.

33. Найти фокальныя линіи для центральныхъ поверхностей.

Отв. Возьмемъ уравненіе центральной поверхности въ видѣ

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ, выражающимъ свойство фокуса и директрисы (см. предыд. зад.), получимъ

$$lm_1 + ml_1 = 0,\ ln_1 + nl_1 = 0,\ mn_1 + nm_1 = 0; \qquad (1)$$

кромѣ того,

$$A(1-ll_1)=B(1-mm_1)=C(1-nn_1)=pp_1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2, \quad (2)$$

и, наконецъ,

$$lp_1+pl_1+2\alpha=0,\ mp_1+pm_1+2\beta=0,\ np_1+pn_1+2\gamma=0. \quad (3)$$

Представивъ равенства (1) въ видѣ

$$lm_1=-ml_1,\ nl_1=-ln_1,\ mn_1=-nm_1$$

и перемноживъ ихъ почленно, получимъ

$$lmn\,l_1m_1n_1=-lmn\,l_1m_1n_1$$

или

$$2lmn\,l_1m_1n_1=0.$$

Слѣдовательно, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ коэффиціентовъ l, m, n, l_1, m_1, n_1 равняется нулю.

Если положимъ $l=0$, то изъ равенствъ (1) получимъ или $m=n=0$, или $l_1=0$. Первое можно допустить только тогда, когда разсматриваемая поверхность есть шаръ, такъ какъ тогда при этомъ допущеніи будетъ

$$A=B=C.$$

Итакъ, уравненія (1), въ связи съ остальными, показываютъ, что должно быть одно изъ трехъ слѣдующихъ предположеній:

$$l=l_1=0,\ \text{или}\ m=m_1=0,\ \text{или}\ n=n_1=0.$$

Соотвѣтственно каждому изъ этихъ предположеній будетъ

$$\alpha=0,\ \text{или}\ \beta=0,\ \text{или}\ \gamma=0.$$

Слѣдовательно, фокусы всякой центральной поверхности могутъ находиться только на ея главныхъ діаметральныхъ плоскостяхъ.

Возьмемъ, напримѣръ, $n=n_1=0$. Тогда будемъ имѣть

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2-(lx+my+p)(l_1x+m_1y+p_1)=0;$$

произведеніе

$$(lx+my+p)(l_1x+m_1y+p_1)$$

можетъ быть представлено въ видѣ

$$u(x-\alpha')^2+v(y-\beta')^2.$$

Для этого нужно только положить

$$ll_1=u, \qquad mm_1=v,$$

$$lp_1+pl_1=-2u\alpha',\quad mp_1+pm_1=-2v\beta',$$

$$pp_1=u\alpha'^2+v\beta'^2.$$

Четыре первыя изъ этихъ равенствъ опредѣляютъ величины u, v, α', β', послѣднее же есть ихъ необходимое слѣдствіе.

Изъ соотношеній (2) и (3) получимъ

$$\alpha = u\alpha',\ \beta = v\beta',$$
$$A(1-u) = B(1-v) = C,$$
$$u\alpha'^2 + v\beta'^2 - \alpha^2 - \beta^2 = C.$$

Исключая изъ послѣднихъ уравненій u, v, α', β', получимъ окончательно уравненіе фокальной линіи, лежащей въ плоскости xy, въ такомъ видѣ:

$$\frac{\alpha^2}{A-C} + \frac{\beta^2}{B-C} = 1.$$

Исключая же u, v, α, β, получимъ уравненіе цилиндрической поверхности

$$\alpha'^2\,\frac{A-C}{A^2} + \beta'^2\,\frac{B-C}{B^2} = 1,$$

представляющее геометрическое мѣсто директрисъ, соотвѣтствующихъ найденной фокальной линіи.

Итакъ, существуютъ три фокальныя линіи для данной поверхности:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{x^2}{A-C} + \dfrac{y^2}{B-C} = 1 \\ z = 0\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}\dfrac{x^2}{A-B} + \dfrac{z^2}{C-B} = 1 \\ y = 0\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}\dfrac{y^2}{B-A} + \dfrac{z^2}{C-A} = 1. \\ x = 0\end{matrix}\right\}$$

Каждой изъ этихъ фокальныхъ линій соотвѣтствуютъ поверхности директрисъ:

$$\frac{(A-C)x^2}{A^2} + \frac{(B-C)y^2}{B^2} = 1,\ \frac{(A-B)x^2}{A^2} + \frac{(C-B)z^2}{C^2} = 1,$$
$$\frac{(B-A)y^2}{B^2} + \frac{(C-A)z^2}{C^2} = 1.$$

Каковы бы ни были знаки коэффиціентовъ A, B, C, предполагая, что $A > B > C$, замѣтимъ, что всегда изъ трехъ фокальныхъ линій одна эллипсъ, другая гипербола, а третья мнимая.

34. Показать, что точки закругленія принадлежатъ къ числу фокусовъ, и вывести отсюда слѣдствіемъ положеніе фокальныхъ линій по отношенію къ точкамъ закругленія.

Отв. Фокальныя линіи пересѣкаютъ поверхность подъ прямымъ угломъ въ точкахъ закругленія.

35. Показать, что параболоиды имѣютъ двѣ фокальныя линіи, которыя суть параболы, лежащія въ главныхъ діаметральныхъ плоскостяхъ, причемъ, если ца-

раболоидъ гиперболическій, то фокальныя линіи не пересѣкаютъ его; въ случаѣ же эллиптическаго параболоида одна изъ фокальныхъ параболъ встрѣчаетъ его въ точкахъ закругленія.

36. Показать, что касательная къ фокальной линіи въ какой нибудь ея точкѣ есть поляра основанія соотвѣтствующей этой точкѣ директрисы относительно главнаго сѣченія поверхности.

Отв. Касательная къ фокальной линіи въ точкѣ α, β имѣетъ видъ

$$\frac{x\alpha}{A-C}+\frac{y\beta}{B-C}=1,$$

отсюда (см. зад. 33)

$$\frac{x\alpha'}{A}+\frac{y\beta'}{B}=1.$$

37. Прямая, соединяющая какую нибудь точку фокальной линіи съ основаніемъ соотвѣтствующей этой точкѣ директрисы, есть нормаль къ этой фокальной линіи.

Отв. $$\frac{x-\alpha}{\frac{\alpha}{A-C}}=\frac{y-\beta}{\frac{\beta}{B-C}}. \quad \text{(см. зад. 33)}$$

38. Конусъ второго порядка имѣетъ только на одной изъ главныхъ плоскостей дѣйствительную фокальную линію и эта линія есть совокупность двухъ прямыхъ.

39. Два конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0$$

называются *взаимными*, если существуетъ соотношеніе:

$$aa'=bb'=cc'.$$

Показать, что въ двухъ взаимныхъ конусахъ второго порядка фокальныя прямыя одного суть перпендикуляры къ плоскостямъ круговыхъ сѣченій другого.

40. Показать, что разсматривавшіяся въ статьѣ объ эллиптическихъ координатахъ поверхности второго порядка, опредѣляемыя уравненіемъ

$$\frac{x^2}{A-k}+\frac{y^2}{B-k}+\frac{z^2}{C-k}=1,$$

суть *софокусныя*, т. е. имѣютъ общія фокальныя линіи.

41. Найти уравненіе конуса, имѣющаго вершину въ точкѣ $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ и касающагося поверхности

$$L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2+P\delta^2=0.$$

Отв. Сказанный конусъ соприкасается съ поверхностью вдоль по линіи пере-

сѣченія этой поверхности съ полярною плоскостью вершины, что можетъ быть выражено уравненіемъ:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P\delta^2 - k\,(L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 + P\delta\delta_0)^2 = 0;$$

k получимъ изъ того условія, что точка $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ должна лежать на конусѣ. Получаемъ окончательно:

$$(L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P\delta^2)\,(L\alpha^2{}_0 + M\beta^2{}_0 + N\gamma^2{}_0 + P\delta^2{}_0) -$$
$$-\,(L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 + P\delta\delta_0)^2 = 0.$$

Что послѣдняя поверхность дѣйствительно конусъ, слѣдуетъ изъ того, что всякая плоскость, касательная къ этой поверхности въ точкѣ $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, имѣя уравненіе:

$$(L\alpha\alpha_1 + M\beta\beta_1 + N\gamma\gamma_1 + P\delta\delta_1)\,(L\alpha^2{}_0 + M\beta^2{}_0 + N\gamma^2{}_0 + P\delta^2{}_0) -$$
$$-(L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 + P\delta\delta_0)\,(L\alpha_1\alpha_0 + M\beta_1\beta_0 + N\gamma_1\gamma_0 + P\delta_1\delta_0) = 0$$

проходитъ постоянно черезъ вершину конуса $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$.

43. Доказать, что уравненіе

$$\frac{y^2}{p-\lambda} + \frac{z^2}{q-\lambda} = 2x - \lambda$$

представляетъ софокусные параболоиды, причемъ, если подберемъ два значенія λ такъ, что соотвѣтствующіе параболоиды пересѣкаются, то они пересѣкаются подъ прямымъ угломъ (ортогонально).

44. Дана поверхность второго порядка и двѣ касательныя къ этой поверхности, найти поверхность, образованную прямою, которая скользитъ по даннымъ прямымъ и остается касательною къ данной поверхности.

45. Найти геометрическое мѣсто вершины трехграннаго угла, описаннаго около эллипсоида, и котораго грани параллельны тремъ сопряженнымъ діаметральнымъ плоскостямъ другого эллипсоида.

46. Найти, какимъ условіямъ должны удовлетворять коэффиціенты уравненія поверхности второго порядка, для того чтобы эта поверхность была поверхностью вращенія.

Отв. Сравнивая общее уравненіе поверхности второго порядка съ уравненіемъ вида:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 + (ax + by + cz)^2 +$$
$$+ M\,(ax + by + cz) = 0,$$

получимъ:

$$\frac{1+a^2}{A_1} = \frac{1+b^2}{A_2} = \frac{1+c^2}{A_3} = \frac{ab}{B_3} = \frac{ac}{B_2} = \frac{bc}{B_1} = \rho.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} 1+a^2 &= A_1\rho, \\ 1+b^2 &= A_2\rho, \\ 1+c^2 &= A_3\rho, \end{aligned}\right\}(1) \qquad \left.\begin{aligned} bc &= B_1\rho, \\ ac &= B_2\rho, \\ ab &= B_3\rho. \end{aligned}\right\}(2)$$

Перемножая, получимъ

$$a^2 b^2 c^2 = \rho^3 . B_1 . B_2 . B_3 .$$

Раздѣляя на квадраты уравненій (2), получимъ:

$$a^2 = \rho\,\frac{B_2 B_3}{B_1}, \quad b^2 = \rho\,\frac{B_3 B_1}{B_2}, \quad c^2 = \rho\,\frac{B_1 B_2}{B_3}.$$

Подставляя въ уравненіе (1), получимъ

$$\frac{1}{\rho} = A_1 - \frac{B_2 B_3}{B_1} = A_2 - \frac{B_3 B_1}{B_2} = A_3 - \frac{B_1 B_2}{B_3}.$$

Случай, когда одинъ изъ коэффиціентовъ B_1, B_2, B_3 равенъ нулю, долженъ быть разсматриваемъ особо.

Пусть $B_1 = 0$, тогда или $b = 0$, или $c = 0$; возьмемъ, напримѣръ, $c = 0$, тогда B_2 должно равняться нулю.

$$1 = A_3\rho, \quad 1 + a^2 = A_1\rho, \quad 1 + b^2 = A_2\rho, \quad ab = B_3\rho;$$

исключая ρ, a, b получимъ

$$(A_1 - A_3)(A_2 - A_3) = B^2_3.$$

Наконецъ, если всѣ три коэффиціента B_1, B_2 B_3 равны нулю, то, напримѣръ, $a = 0$, $b = 0$ и тогда $A_1 = A_2$.

47. Найти геометрическое мѣсто вершины конуса вращенія второго порядка, описаннаго около даннаго эллипсоида.

Отв. Фокальная линія.

48. Если глазъ помѣщенъ на поверхности эллипсоида то перспективы всякаго плоскаго сѣченія на діаметральной плоскости сопряженною съ діаметромъ, проходящимъ черезъ глазъ, суть гомотетическія кривыя, а центръ каждой изъ нихъ есть перспектива вершины конуса описаннаго около эллипсоида вдоль по плоскому сѣченію.

49. Написать общій видъ уравненія цилиндра, описаннаго около поверхности съ центромъ.

Отв. Общее уравненіе поверхности, касающейся съ данною по коническому сѣченію, лежащему въ діаметральной плоскости, имѣетъ видъ

$$La^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P - k\,(Lla + Mm\beta + Nn\gamma)^2 = 0.$$

Надо, чтобы эта поверхность была цилиндромъ. Для этой цѣли необходимо выразить условіе, что касательная къ ней плоскость параллельна діаметру, сопряженному съ плоскостью

$$Ll\alpha + Mm\beta + Nn\gamma = 0,$$

т. е. параллельна прямой

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n}.$$

Уравненіе касательной плоскости имѣетъ видъ

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 -$$
$$- k\,(Ll\alpha + Mm\beta + Nn\gamma)(Ll\alpha_0 + Mm\beta_0 + Nn\gamma_0) + P = 0. \quad (^{**})$$

Для того, чтобы эта плоскость была параллельна прямой (*), необходимо, чтобы уравненія (*) и (**) не допускали рѣшенія относителтно α, β, γ. Обозначая общую величину отношеній въ уравненіи (*) черезъ ρ, получимъ

$$\alpha = l\rho, \quad \beta = m\rho, \quad \gamma = n\rho.$$

Подставляя въ уравненіе (**), для опредѣленія ρ получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\rho\,(Ll\alpha_0 + Mm\beta_0 + Nn\gamma_0)\,[1 - k\,(Ll^2 + Mm^2 + Nn^2)] + P = 0.$$

Для того, чтобы это уравненіе нельзя было рѣшить относительно ρ, необходимо k подобрать такъ, чтобы пропадало изъ послѣдняго уравненія ρ, другими словами, надо положить

$$1 - k\,(Ll^2 + Mm^2 + Nn^2) = 0,$$

откуда, окончательно, уравненіе цилиндрической поверхности будетъ имѣть видъ:

$$(Ll^2 + Mm^2 + Nn^2)\,(L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 + P) -$$
$$- (Ll\alpha + Mm\beta + Nn\gamma)^2 = 0.$$

50. Показать, что если сжатый сфероидъ пересѣкается какою либо плоскостью, проходящею чрезъ одинъ изъ его фокусовъ, то этотъ фокусъ совпадаетъ съ фокусомъ сѣченія.

Отв. См. зад. 32.

51. Найти эксцентриситетъ какого либо сѣченія параболоида вращенія и выразить его посредствомъ угла наклоненія сѣкущей плоскости къ оси параболоида.

Отв. Искомый эксцентриситетъ равняется косинусу угла наклоненія сѣкущей плоскости къ оси параболоида.

52. Если черезъ какую либо неподвижную точку провести хорды къ эллипсоиду и къ оконечностямъ этихъ хордъ провести касательныя плоскости, то всѣ

взаимныя пересѣченія плоскостей, соотвѣтствующихъ каждой хордѣ, будутъ лежать въ одной и той же плоскости.

Отв. Полярная плоскость.

53. Три цилиндра описаны около даннаго эллипсоида, причемъ оси цилиндровъ взаимно перпендикулярны. Показать, что сумма квадратовъ площадей тѣхъ сѣченій цилиндровъ, которыя сдѣланы плоскостями, перпендикулярными къ ихъ соотвѣтственнымъ осямъ, постоянна.

Отв. Уравненіе цилиндра, описаннаго около эллипсоида, есть

$$\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=\left(\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}+\frac{nz}{c^2}\right)^2.$$

Уравненіе его оси есть

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}.$$

ПРИБАВЛЕНІЕ.

Объ опредѣлителяхъ.

Возьмемъ систему n линейныхъ однородныхъ уравненій съ n неизвѣстными $x, y, z, \ldots u, v$ вида:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + k_1u + l_1v &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + k_2u + l_2v &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + k_nu + l_nv &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Изъ этой системы (1) можно исключить всѣ неизвѣстныя $x, y, z, \ldots u, v$, причемъ, вообще говоря, останется одно уравненіе между коэффиціентами $a_1, b_1, \ldots a_2, b_2, \ldots a_n, b_n, \ldots$ которое можетъ быть написано такъ:

$$f(a_1, b_1, \ldots a_2, b_2, \ldots a_n, b_n, \ldots) = 0. \tag{2}$$

Сказанное исключеніе можно себѣ представить выполненнымъ слѣдующимъ образомъ.

Такъ какъ всѣ уравненія системы (1) однородны относительно неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots u, v$, то чрезъ раздѣленіе всѣхъ уравненій на одно изъ неизвѣстныхъ, напр. v, мы представимъ нашу систему въ такомъ видѣ, что въ уравненія будутъ входить $n-1$ отношеній:

$$\frac{x}{v}, \ \frac{y}{v}, \ \frac{z}{v}, \ldots \frac{u}{v}. \tag{3}$$

Эти $n-1$ отношеній могутъ быть приняты за новыя неизвѣстныя. Предположимъ, что мы рѣшимъ по правиламъ, предлагаемымъ въ элементарной алгебрѣ, которыя нибудь изъ $n-1$ уравненій заданной системы относительно $n-1$ неизвѣстныхъ (3);

остается еще одно уравненіе, которое было оставлено въ сторонѣ. Черезъ сказанное рѣшеніе отношенія (3) выражаются вполнѣ опредѣленнымъ образомъ раціонально черезъ коэффиціенты $n-1$ уравненій, которыя мы рѣшали. Подставляя полученныя выраженія въ послѣднее, n-ое, уравненіе, мы получимъ уравненіе окончательное, представляющее результатъ исключенія буквъ $x, y, z, \dots u, v$ изъ системы (1). Это послѣднее уравненіе и есть то, которое мы назвали (2). Раціональная функція отъ коэффиціентовъ системы (1), которую мы обозначали черезъ f въ уравненіи (2), есть такъ называемый *опредѣлитель* системы (1). Для опредѣлителя системы (1) употребляютъ обозначеніе:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \dots, & k_1, & l_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \dots, & k_2, & l_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_n, & b_n, & c_n, & \dots, & k_n, & l_n \end{vmatrix} = (a_1\, b_2\, c_3 \dots l_n). \qquad (4)$$

Каждая изъ n^2 буквъ, входящихъ подъ знакъ опредѣлителя, называется *элементомъ* опредѣлителя. Элементы опредѣлителя образуютъ такъ называемые *строки* и *столбцы*.

Первую строку образуютъ элементы $a_1, b_1, \dots k_1, l_1$, вторую — элементы $a_2, b_2, \dots k_2, l_2$ и т. д. и, наконецъ, n-ую—элементы $a_n, b_n, \dots k_n, l_n$. Первый столбецъ образуютъ элементы $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$, второй—элементы $b_1, b_2, \dots b_n$ и т. д., наконецъ, послѣдній — элементы $l_1, l_2, \dots, l_n$. Каждый элементъ опредѣлителя принадлежитъ вполнѣ опредѣленной строкѣ и вполнѣ опредѣленному столбцу: такъ напримѣръ, c_2 есть элементъ второй строки и третьяго столбца.

Пояснимъ сказанное объ опредѣлителяхъ простѣйшими примѣрами. Возьмемъ систему, состоящую изъ двухъ уравненій:

$$a_1x + b_1y = 0,$$

$$a_2x + b_2y = 0.$$

Для исключенія буквъ x и y умножимъ первое уравненіе, напримѣръ, на b_2, а второе на b_1; вычитая, получимъ

$$(a_1b_2 - b_1a_2)\, x = 0.$$

Не предполагая $x = 0$, мы замѣчаемъ, что въ результатѣ исключенія получается уравненіе

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0.$$

Отсюда мы видимъ, что опредѣлитель системы есть

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = a_1\, b_2 - b_1\, a_2.$$

Перейдемъ теперь къ системѣ трехъ уравненій

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= 0,\\
a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \qquad (1)\\
a_3x + b_3y + c_3z &= 0.
\end{aligned}
$$

Выразимъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій x и y черезъ z. Для этой цѣли, умножая второе уравненіе на b_3, третье на b_2 и вычитая, получимъ:

$$x \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} c_2, & b_2 \\ c_3, & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Подобнымъ же образомъ, умножая второе уравненіе на a_3, третье на a_2 и вычитая второе изъ третьяго, получимъ:

$$y \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Умножая уравненіе (2) на a_1, уравненіе же (3) на b_1 и складывая, мы получимъ:

$$(a_1x + b_1y) \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_2 \end{vmatrix} + z \left\{ a_1 \begin{vmatrix} c_2, & b_2 \\ c_3, & b_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

На основаніи же перваго изъ уравненій (1) получимъ $a_1x + b_1y = -c_1z$; слѣдовательно, подставляя, получимъ:

$$\left\{ a_1 \begin{vmatrix} c_2, & b_2 \\ c_3, & b_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} \right\} z = 0.$$

Не предполагая $z = 0$, получимъ, какъ результатъ исключенія, уравненіе:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2 \\ a_3, & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Первая часть послѣдняго уравненія, по раскрытіи опредѣлителей, имѣетъ видъ:

$$a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2);$$

послѣднее выраженіе принято обозначать подъ видомъ опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Подобнымъ же образомъ, если задана система изъ четырехъ уравненій:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3u = 0$$
$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4u = 0.$$

то въ результатѣ исключенія получимъ уравненіе:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2, c_2, d_2 \\ b_3, c_3, d_3 \\ b_4, c_4, d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2, c_2, d_2 \\ a_3, c_3, d_3 \\ a_4, b_4, d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2, b_2, d_2 \\ a_3, b_3, d_3 \\ a_4, b_4, d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \\ a_4, b_4, c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Первую часть этого уравненія обозначаютъ для краткости при помощи символа

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Подобнымъ образомъ можно было бы продолжать далѣе составлять опредѣлители системъ пяти, шести, ... уравненій.

Для того, чтобы замѣтить законъ составленія опредѣлителей, разсмотримъ только что выписанный опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2, & d_2 \\ b_3, & c_3, & d_3 \\ b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \\ a_4, & b_4, & d_4 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая написанные тройные опредѣлители, получаемъ окончательно:

$$a_1b_2c_3d_4 - a_1b_3c_2d_4 + a_2b_3c_1d_4 - a_2b_1c_3d_4 +$$
$$+ a_3b_1c_2d_4 - a_3b_2c_1d_4 + a_1b_4c_2d_3 - a_1b_2c_4d_3 +$$
$$+ a_4b_2c_1d_3 - a_4b_1c_2d_3 + a_2b_1c_4d_3 - a_2b_4c_1d_3 +$$

$$+ a_3 b_4 c_1 d_2 - a_3 b_1 c_4 d_2 + a_4 b_1 c_3 d_2 - a_4 b_3 c_1 d_2 +$$
$$+ a_1 b_3 c_4 d_2 = a_1 b_4 c_3 d_2 + a_2 b_4 c_3 d_1 - a_2 b_3 c_4 d_1 +$$
$$+ a_4 b_3 c_2 d_1 - a_4 b_2 c_3 d_1 + a_3 b_2 c_4 d_1 - a_3 b_4 c_2 d_1.$$

Изъ прилагаемой таблички мы замѣчаемъ, что составъ опредѣлителя (4) таковъ: берется со знакомъ $+$ членъ $a_1\, b_2\, c_3\, d_4$,—состоящій изъ элементовъ опредѣлителя, расположенныхъ по діагонали. Всѣ же остальные члены опредѣлителя получаются изъ указаннаго, называемаго *главнымъ*, черезъ перестановку индексовъ у буквъ a, b, c, d, причемъ число членовъ опредѣлителя какъ разъ совпадаетъ съ числомъ всѣхъ возможныхъ перестановокъ, которыя можно сдѣлать при помощи четырехъ индексовъ 1, 2, 3, 4. Число такихъ перестановокъ, какъ это извѣстно изъ элементарной алгебры, есть $1.2.3.4 = 24$. Членовъ въ опредѣлителѣ всегда четное число, потому что число перестановокъ изъ n элементовъ, будучи равнымъ $1.2.\ldots n$ при всякомъ n, есть число четное. Половина изъ числа членовъ входитъ въ опредѣлитель со знакомъ $+$, другая половина—со знакомъ $-$.

Мы можемъ перейти отъ расположенія индексовъ въ главномъ членѣ 1 2 3 4 къ любому другому, напримѣръ 2 4 1 3, при помощи ряда перестановокъ двухъ индексовъ: 1 2 3 4, 2 1 3 4, 2 4 3 1, 2 4 1 3. Итакъ, мы перешли отъ главнаго къ разсматриваемому при помощи трехъ перестановокъ. Условимся, какъ это имѣетъ мѣсто на самомъ дѣлѣ, члены, въ которыхъ расположеніе индексовъ получается изъ расположенія въ главномъ членѣ при помощи четнаго числа перестановокъ, писать со знакомъ $+$, члены же, получаемые при помощи нечетнаго числа перестановокъ,— со знакомъ $-$. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая табличку разложенія нашего опредѣлителя, мы замѣчаемъ, что членъ $a_2\, b_4\, c_1\, d_3$ входитъ въ опредѣлитель со знакомъ $-$, что согласуется вполнѣ съ поставленнымъ нами условіемъ, ибо этотъ членъ получается изъ главнаго при помощи трехъ, т. е. нечетнаго числа перестановокъ.

Не будемъ болѣе подробно останавливаться на изученіи характера окончательнаго разложенія опредѣлителей. Скажемъ лишь, что всякій опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & k_1, & l_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & k_2, & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots, & k_n, & l_n \end{vmatrix}$$

представляетъ изъ себя сумму N числа членовъ, гдѣ $N = 1.2.3.\ldots n$, причемъ, для того, чтобы выписать эти члены, необходимо взять главный членъ $a_1\, b_2\, c_3 \ldots k_{n-1}, l_n$, состоящій изъ элементовъ опредѣлителя, расположенныхъ по діагонали, идущей отъ верхняго лѣваго угла опредѣлителя къ нижнему правому, и затѣмъ подвергнуть

индексы 1, 2, 3, ... $n-1, n$ всевозможнымъ перестановкамъ въ числѣ N, причемъ всякій членъ, получаемый при помощи четнаго числа перестановокъ индексовъ по два, войдетъ въ опредѣлитель со знакомъ $+$, а при помощи нечетнаго числа—со знакомъ $-$.

Выписывая, при помощи указаннаго правила, знаки отдѣльныхъ членовъ опредѣлителя, мы въ результатѣ получимъ половину членовъ опредѣлителя со знакомъ $+$, половину со знакомъ $-$.

Мы не останавливаемся на подробномъ доказательствѣ послѣдняго утвержденія въ виду того, что вычисленіе опредѣлителей на практикѣ производится обыкновенно не при помощи непосредственнаго выписыванія всѣхъ N членовъ опредѣлителя, а пользуясь основными свойствами опредѣлителей, къ изученію которыхъ мы и переходимъ.

Теорема 1. Численная величина опредѣлителя не мѣняется, если мы столбцы напишемъ горизонтально, т. е. обратимъ ихъ въ строки и обратно, строки обратимъ въ столбцы.

Свойство, выражаемое приведенной теоремой, можетъ быть написано такъ:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \dots & k_1, & l_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \dots & k_2, & l_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \dots & k_3, & l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & c_{n-1} & \dots & k_{n-1}, & l_{n-1} \\ a_n, & b_n, & c_n, & \dots & k_n, & l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & \dots & a_{n-1}, & a_n \\ b_1, & b_2, & b_3, & \dots & b_{n-1}, & b_n \\ c_1, & c_2, & c_3, & \dots & c_{n-1}, & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1, & k_2, & k_3, & \dots & k_{n-1}, & k_n \\ l_1, & l_2, & l_3, & \dots & l_{n-1}, & l_n \end{vmatrix}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, что касается главныхъ членовъ обоихъ опредѣлителей, то они одинаковы. Отъ замѣны столбцовъ строками, и обратно, діагональные элементы не мѣняются. Согласно приведенному выше способу указанія знака отдѣльныхъ членовъ опредѣлителя мы замѣчаемъ, что въ опредѣлителѣ, стоящемъ въ первой части послѣдняго равенства мы должны получать члены изъ главнаго члена $a_1\, b_2\, c_3 \dots k_{n-1}\, l_n$, не мѣняя порядка буквъ, черезъ измѣненіе порядка индексовъ 1, 2, 3, ... n. Въ другомъ же опредѣлителѣ, получаемомъ черезъ замѣну строкъ столбцами, мы должны будемъ получать изъ главнаго члена другіе перемѣною порядка буквъ безъ измѣненія порядка индексовъ. Легко видѣть, что всякій членъ вида $(\alpha)\; a_{i1}\, b_{i2}\, c_{i3} \dots k_{in-1}\, l_{in}$, гдѣ размѣщеніе индексовъ $i_1, i_2, \dots i_n$ получено изъ главнаго размѣщенія, положимъ, при помощи p перестановокъ индексовъ по два. Если въ членѣ (α) мы произведемъ перемѣщеніе множителей при помощи тѣхъ же p перестановокъ, но совершенныхъ въ обратномъ порядкѣ, то этотъ членъ можемъ написать въ такомъ видѣ, что индексы будутъ слѣдовать въ натуральномъ порядкѣ 1, 2, 3, ..., n, порядокъ же

самихъ буквъ будетъ не тотъ, что въ главномъ членѣ. Но такъ какъ во второмъ опредѣлителѣ входятъ члены, гдѣ произведены всѣ возможныя размѣщенія буквъ, не нарушая натуральнаго порядка индексовъ, то, слѣдовательно, и этотъ членъ долженъ входить въ разсматриваемый нами опредѣлитель. Что касается знака, то очевидно, что этотъ членъ входитъ въ оба опредѣлителя съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, ибо размѣщеніе буквъ въ членѣ (α), написанномъ такъ, какъ онъ получается при разложеніи второго опредѣлителя, производится изъ расположенія буквъ главнаго члена при помощи p подстановокъ буквъ по двѣ. При помощи того же числа перестановокъ индексовъ по два получается тотъ же членъ (α) перваго опредѣлителя.

Итакъ, всѣ члены перваго опредѣлителя входятъ въ составъ второго, причемъ входятъ съ тѣми же знаками, откуда слѣдуетъ равенство этихъ двухъ опредѣлителей.

Теорема 2. Перемѣщеніе двухъ горизонтальныхъ строкъ опредѣлителя мѣняетъ знакъ его.

Ясно, что при такомъ перемѣщеніи двухъ строкъ перемѣщается во всѣхъ членахъ пара индексовъ, причемъ изъ всякаго положительнаго члена образуется, согласно высказанному общему правилу составленія опредѣлителей, соотвѣтственный отрицательный.

Теорема 3. Если переставить два вертикальныхъ столбца, то опредѣлитель мѣняетъ свой знакъ.

Слѣдствіе двухъ предыдущихъ.

Теорема 4. Если двѣ строки или два столбца опредѣлителя тождественны, т. е. состоятъ изъ тѣхъ же элементовъ и расположенныхъ въ томъ же порядкѣ, то опредѣлитель тождественно равенъ нулю.

Положимъ, напримѣръ, что тождественныя строки суть первая и вторая. Обозначимъ величину опредѣлителя черезъ Δ. Съ одной стороны, на основаніи теоремы 2, если мы помѣняемъ строки первую и вторую, то получимъ опредѣлитель, который будетъ $= -\Delta$; съ другой стороны, такъ какъ первые двѣ строки нашего опредѣлителя тождественны, то, очевидно, что перестановка ихъ не мѣняетъ вида, а, слѣдовательно, и величины опредѣлителя. Другими словами, должно быть

$$\Delta = -\Delta,$$

или

$$2\Delta = 0,$$

откуда

$$\Delta = 0.$$

Эта теорема вытекаетъ также непосредственно изъ опредѣленія опредѣлителя, какъ результата исключенія изъ n линейныхъ уравненій, ибо это исключеніе производится черезъ рѣшеніе $n-1$ уравненій относительно соотвѣтственныхъ неизвѣстныхъ и черезъ подстановку полученныхъ такимъ образомъ выраженій въ n-ое

уравненіе. Но если это послѣднее тождественно съ однимъ изъ другихъ, то очевидно, что оно должно обращаться тождественно въ нуль послѣ подстановки.

Теорема 5. Если всѣ элементы одной строки или столбца умножить на одинъ и тотъ же множитель δ, то опредѣлитель самъ получаетъ этого множителя δ.

Это свойство опредѣлителя вытекаетъ изъ того соображенія, что въ каждомъ членѣ опредѣлителя входятъ множителями элементы по одному (но не болѣе) изъ каждаго столбца и изъ каждой строки; причемъ въ каждомъ членѣ входятъ непремѣнно элементы всѣхъ столбцовъ и всѣхъ строкъ. Поэтому, напримѣръ, такъ какъ всякій членъ какой либо строки или столбца опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots & k_1, & l_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots & k_2, & l_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots & k_3, & l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & c_{n-1}, & \ldots & k_{n-1}, & l_{n-1} \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots & k_n, & l_n \end{vmatrix}$$

получаетъ множителя δ, то, очевидно, этого множителя получаетъ самъ опредѣлитель.

Если вычеркнуть въ опредѣлителѣ нѣсколько строкъ и такое же число столбцовъ, то опредѣлитель, составленный изъ остальныхъ элементовъ, есть такъ называемый *миноръ* заданнаго опредѣлителя.

Миноры, получаемые черезъ выбрасываніе одной строки и одного столбца, называются минорами *перваго порядка*; миноры же, получаемые вычеркиваніемъ двухъ строкъ и двухъ столбцовъ, называются минорами *второго порядка* и т. д.

Теорема 6. Опредѣлитель можетъ быть представленъ въ видѣ суммы

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + \ldots + a_nA_n,$$

гдѣ A_1, A_2, ... A_n суть нѣкоторые миноры перваго порядка, получаемые черезъ вычеркиваніе перваго столбца

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$$

и соотвѣтственной строки.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ элементы перваго столбца

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n.$$

Каждый изъ нихъ, напр. a_1, входитъ въ первой степени въ различные члены опредѣлителя, причемъ въ каждомъ членѣ опредѣлителя входитъ по одному изъ элементовъ этого столбца.

Возьмемъ за скобку множитель a_1 во всѣхъ тѣхъ членахъ, въ которые онъ входитъ, подобнымъ же образомъ въ другихъ членахъ возьмемъ за скобку a_2, a_3, ..., a_n.

Обозначая многочлены въ получаемыхъ скобкахъ соотвѣтственно черезъ $A_1, A_2, \ldots A_n$, мы получаемъ разложеніе опредѣлителя по элементамъ перваго столбца

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \ . \ . \ . + a_n A_n.$$

Остается показать, что многочлены $A_1, A_2, \ldots A_n$ суть соотвѣтственные миноры. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что A_1 есть миноръ, который получается отъ вычеркиванія столбца и строки, содержащихъ a_1, ибо всѣ члены опредѣлителя содержащіе a_1, не могутъ заключать никакого другого элемента столбца или строки, заключающихъ элементъ a_1, а потому a_1 должно имѣть сумму взятыхъ съ приличнымъ знакомъ комбинацій произведеній изъ $n-1$ элементовъ, взятыхъ изъ другихъ строкъ и столбцовъ; но сумма такихъ произведеній составляетъ опредѣлитель A_1. То же самое мы замѣчаемъ относительно другихъ опредѣлителей $A_2, A_3, \ldots A_n$. Напримѣръ

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3, & c_3 \\ b_1, & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}.$$

Подобнымъ же образомъ опредѣлитель четвертаго порядка

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix}$$

можетъ быть написанъ такъ

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4,$$

гдѣ

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2, & c_2, & d_2 \\ b_3, & c_3, & d_3 \\ b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix}, \quad A_2 = -\begin{vmatrix} b_1, & c_1, & d_1 \\ b_3, & c_3, & d_3 \\ b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_1, & c_1, & d_1 \\ b_2, & c_2, & d_2 \\ b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix}, \quad A_4 = -\begin{vmatrix} b_1, & c_1, & d_1 \\ b_2, & c_2, & d_2 \\ b_3, & c_3, & d_3 \end{vmatrix}.$$

Слѣдствіе I. Опредѣлитель можно раскладывать также по элементамъ строки; напримѣръ, по элементамъ первой строки

$$a_1 A + b_1 B + c_1 C + \ldots + l_1 L,$$

гдѣ $A, B, C, \dots L$ суть миноры, получаемые отъ вычеркиванія первой строки и соотвѣтствующаго столбца.

Слѣдствіе II. Разложеніе опредѣлителя по элементамъ какой угодно строки или какого угодно столбца можно свести на разложеніе опредѣлителя по элементамъ первой строки или перваго столбца, ибо на основаніи теоремы 2 мы можемъ разсматриваемый столбецъ или строку перемѣстить на первое мѣсто. Напримѣръ, третій столбецъ опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix},$$

можемъ поставить на первое мѣсто, такъ что получимъ опредѣлитель

$$-\begin{vmatrix} c_1, & b_1, & a_1, & d_1 \\ c_2, & b_2, & a_2, & d_2 \\ c_3, & b_3, & a_3, & d_3 \\ c_4, & b_4, & a_4, & d_4 \end{vmatrix}.$$

Слѣдствіе III. Если разложеніе опредѣлителя по элементамъ первой строки будетъ

$$a_1A + b_1B + c_1C + \dots + l_1L,$$

то имѣютъ мѣсто слѣдующихъ $n-1$ тождествъ

$$a_2A + b_2B + c_2C + \dots + l_2L = 0,$$
$$a_3A + b_3B + c_3C + \dots + l_3L = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_nA + b_nB + c_nC + \dots + l_nL = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, первая часть перваго изъ этихъ тождествъ выражаетъ разложеніе по элементамъ первой строки нѣкотораго опредѣлителя, который отличается отъ разсматриваемаго тѣмъ, что первая строка его есть

$$a_2,\ b_2,\ c_2,\ \dots\ l_2$$

и совпадаетъ со второю строкою. Подобный же опредѣлитель, на основаніи теоремы 3 тождественно равенъ нулю.

Подобнымъ же образомъ очевидна справедливость и остальныхъ тождествъ.

Слѣдствіе IV. Опредѣлитель не измѣнитъ своей величины, если мы къ элементамъ которой нибудь изъ строкъ прибавимъ соотвѣтственные элементы другой

строки, умноженные предварительно на одинъ и тотъ же положительный или отрицательный множитель.

Положимъ, что заданный опредѣлитель, разложенный по элементамъ строки i, представляется подъ видомъ

$$D = a_i A_i + b_i B_i + c_i C_i + \dots + l_i L_i. \qquad (1)$$

Если мы въ опредѣлителѣ D члены строки i замѣнимъ соотвѣтственными членами строки k то получимъ опредѣлитель, который будетъ тождественно равенъ нулю, какъ имѣющій двѣ одинаковыя строки. Это тождество напишется, очевидно, такъ

$$a_k A_i + b_k B_i + e_k C_i + \dots + l_k L_i = 0. \qquad (*)$$

Умножая первую часть тождества (*) на m и прикладывая къ выраженію (1) опредѣлителя D, можемъ написать разложеніе опредѣлителя въ такомъ видѣ

$$D = (a_i + ma_k) A_i + (b_i + mb_k) B_i + \dots + (l_i + ml_k) L_i.$$

Итакъ мы видимъ, что опредѣлитель, не измѣнивъ своей величины, замѣнился другимъ, въ которомъ элементы строки

$$a_i, b_i, c_i, \dots l_i,$$

замѣнены элементами слѣдующей строки:

$$a_i + ma_k, b_i + mb_k, c_i + mc_k, \dots l_i + ml_k.$$

Слѣдствіе V. Когда элементы одной строки получатъ произвольныя приращенія, то опредѣлитель получитъ приращеніе, которое найдемъ, замѣнивъ въ данномъ опредѣлителѣ измѣнившіеся элементы ихъ приращеніями.

На вышеприведенныхъ теоремахъ основанъ пріемъ вычисленія опредѣлителей.

На основаніи слѣдствія IV теоремы 6, мы замѣчаемъ, что имѣемъ право изъ элементовъ любого столбца и любой строки вычитать элементы другого столбца или строки, а также складывать строки и столбцы. А потому при вычисленіи опредѣлителя стараются преобразовать данный опредѣлитель въ другой, въ которомъ всѣ элементы какого нибудь столбца или строки равны нулю, кромѣ одного.

Такъ напримѣръ, пусть нашъ опредѣлитель приведенъ къ такому виду, что у него элементы столбца

$$h_1, h_2, h_3, \dots h_n,$$

всѣ равны нулю, за исключеніемъ элемента h_k. Тогда очевидно, что мы можемъ перемѣщеніемъ строкъ и столбцовъ элементъ h_k перемѣстить на первое мѣсто въ

верхнемъ лѣвомъ углу опредѣлителя; тогда опредѣлитель будетъ имѣть видъ:

$$\begin{vmatrix} h_k, & r_1, & s_1, & \ldots & t_1 \\ 0, & r_2, & s_2, & \ldots & t_2 \\ 0, & r_3, & s_3, & \ldots & t_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & r_n, & s_n, & \ldots & t_n \end{vmatrix}.$$

Располагая этотъ опредѣлитель по элементамъ перваго столбца, мы получимъ, что онъ равенъ

$$h_k \begin{vmatrix} r_2, & s_2, & \ldots & t_2 \\ r_3, & s_3, & \ldots & t_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_n, & s_n, & \ldots & t_n \end{vmatrix}.$$

Итакъ мы видимъ, что вычисленіе опредѣлителя n-аго порядка свелось къ вычисленію опредѣлителя порядка на единицу нисшаго.

Покажемъ на примѣрахъ указанный способъ вычисленія опредѣлителей. Возьмемъ, напримѣръ, опредѣлитель

$$D = \begin{vmatrix} 7, & 10, & 3 \\ 30, & 38, & 12 \\ 37, & 50, & 15 \end{vmatrix}.$$

Мы замѣчаемъ, что элементы второго столбца дѣлятся на 2, а элементы третьяго на 3; поэтому, на основаніи теоремы 5, опредѣлитель

$$D = 2.3 \begin{vmatrix} 7, & 5, & 1 \\ 30, & 19, & 4 \\ 37, & 25, & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычитая изъ элементовъ второго столбца упятеренные элементы третьяго, получимъ

$$D = 2.3 \begin{vmatrix} 7, & 0, & 1 \\ 30, & -1, & 4 \\ 37, & 0, & 5 \end{vmatrix}.$$

Итакъ, мы достигли того, что во второмъ столбцѣ пропали всѣ элементы, кромѣ

одного, равнаго — 1. Перенесемъ этотъ членъ на первое мѣсто

$$\begin{vmatrix} 7, & 0, & 1 \\ 30, & -1, & 4 \\ 37, & 0, & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0, & 7, & 1 \\ -1, & 30, & 4 \\ 0, & 37, & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1, & 30, & 4 \\ 0, & 7, & 1 \\ 0, & 37, & 5 \end{vmatrix}.$$

Итакъ мы видимъ, что

$$D = 2.3 \begin{vmatrix} -1, & 30, & 4 \\ 0, & 7, & 1 \\ 0, & 37, & 5 \end{vmatrix} = 2.3(-1) \begin{vmatrix} 7, & 1 \\ 37, & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычитая изъ элементовъ перваго столбца усемеренные элементы второго, получимъ

$$\begin{vmatrix} 7, & 1 \\ 37, & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ 2, & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2, & 5 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} = -2.1 = -2.$$

Итакъ, окончательно $D = 2.3\,(-1)\,(-2) = 12$.

Примѣръ 2.

$$\begin{vmatrix} 12, & 16, & 24, & 33 \\ 20, & 25, & 35, & 45 \\ 20, & 27, & 36, & 55 \\ 28, & 38, & 51, & 78 \end{vmatrix} = 4.5 \begin{vmatrix} 3, & 16, & 24, & 33 \\ 1, & 5, & 7, & 9 \\ 5, & 27, & 36, & 55 \\ 7, & 38, & 51, & 78 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 3, & 1, & 24, & 33 \\ 1, & 0, & 7, & 9 \\ 5, & 2, & 36, & 55 \\ 7, & 3, & 51, & 78 \end{vmatrix} =$$

$$= 20 \begin{vmatrix} 3, & 1, & 3, & 33 \\ 1, & 0, & 0, & 9 \\ 5, & 2, & 1, & 55 \\ 7, & 3, & 2, & 78 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 3, & 1, & 3, & 6 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \\ 5, & 2, & 1, & 10 \\ 7, & 3, & 2, & 15 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 1, & 3, & 6 \\ 2, & 1, & 10 \\ 3, & 2, & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= -20 \begin{vmatrix} 1, & 3, & 1 \\ 2, & 1, & 0 \\ 3, & 2, & 0 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 3, & 2 \end{vmatrix} = -20\,(2.2 - 3.1) = -20.$$

Примѣръ 3.

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a^2, & b^2, & c^2 \\ a^3, & b^3, & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ a, & b, & c \\ a^2, & b^2, & c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ a, & b-a, & c-a \\ a^2, & b^2-a^2, & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= abc \begin{vmatrix} b-a, & c-a \\ b^2-a^2, & c^2-a^2 \end{vmatrix} = abc\,(b-a)\,(c-a) \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ b+a, & c+a \end{vmatrix} =$$

$$= abc\,(b-a)\,(c-a)\,(c-b).$$

Примѣръ 4.

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ b, & a, & d, & c \\ c, & d, & a, & b \\ d, & c, & b, & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d, & b, & c, & d \\ b+a+d+c, & a, & d, & c \\ c+d+a+b, & d, & a, & b \\ d+c+b+a, & c, & b, & a \end{vmatrix} =$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1, & b, & c, & d \\ 1, & a, & d, & c \\ 1, & d, & a, & b \\ 1, & c, & b, & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1, & b, & c, & d \\ 0, & a-b, & d-c, & c-d \\ 0, & d-a, & a-d, & b-c \\ 0, & c-d, & b-a, & a-b \end{vmatrix} =$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b, & d-c, & c-d \\ d-a, & a-d, & b-c \\ c-d, & b-a, & a-b, \end{vmatrix} =$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a+d-b-c, & 0, & c-d \\ 0, & a+b-d-c, & b-c \\ c+b-a-d, & 0, & a-b \end{vmatrix} =$$

$$=(a+b+c+d)\,(a+b-c-d)\begin{vmatrix} a+d-b-c, & c-d \\ c+b-a-d, & a-b \end{vmatrix} =$$

$$=(a+b+c+d)\,(a+b-c-d)\,(a+d-b-c)\begin{vmatrix} 1, & c-d \\ -1, & a-b \end{vmatrix} =$$

$$=(a+b+c+d)\,(a+b-c-d)\,(a+c-b-d)\,(a+d-b-c).$$

Примѣръ 5.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots & 1 \\ x_0, & x_1, & x_2, & \dots & x_n \\ x_0^2, & x_1^2, & x_2^2, & \dots & x_n^2 \\ x_0^3, & x_1^3, & x_2^3, & \dots & x_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^n, & x_1^n, & x_2^n, & \dots & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & & 0, & 1 \\ x_0-x_n, & x_1-x_n, & x_2-x_n, & \ldots & x_{n-1}-x_n, & x_n \\ x_0^2-x_n^2, & x_1^2-x_n^2, & x_2^2-x_n^2, & \ldots & x_{n-1}^2-x_n^2, & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^n-x_n^n, & x_1^n-x_n^n, & x_2^n-x_n^n, & \ldots & x_{n-1}^n-x_n^n, & x_n^n \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} x_0-x_n, & x_1-x_n, & \ldots & x_{n-1}-x_n \\ x_0^2-x_n^2, & x_1^2-x_n^2, & \ldots & x_{n-1}^2-x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^n-x_n^n, & x_1^n-x_n^n, & \ldots & x_{n-1}^n-x_n^n \end{vmatrix}.$$

Принимая во вниманіе тождество

$$a^k-b^k-b\,(a^{k-1}-b^{k-1})=a^{k-1}\,(a-b),$$

имѣемъ:

$$\Delta_n=(-1)^n\begin{vmatrix} x_0-x_n, & x_1-x_n, & \ldots & x_{n-1}-x_n \\ x_0\,(x_0-x_n), & x_1\,(x_1-x_n) & \ldots & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) \\ x_0^2\,(x_0-x_n), & x_1^2(x_1-x_n), & \ldots & x_{n-1}^2\,(x_{n-1}-x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{n-1}\,(x_0-x_n), & x_1^{n-1}(x_1-x_n), & \ldots & x_{n-1}^{n-1}\,(x_{n-1}-x_n) \end{vmatrix}.$$

Слѣдовательно

$$\Delta_n=(x_n-x_0)\;(x_n-x_1)\;\ldots\;(x_n-x_{n-1})\,\Delta_{n-1},$$

гдѣ

$$\Delta_{n-1}=\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots & 1 \\ x_0, & x_1, & x_2, & \ldots & x_{n-1} \\ x_0^2, & x_1^2, & x_2^2, & \ldots & x_{n-1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{n-1}, & x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Примѣняя написанную формулу послѣдовательно для значеній n, равныхъ 1, 2, 3, ..., получаемъ

$$\Delta_1=x_1-x_0,$$
$$\Delta_2=(x_2-x_0)\;(x_2-x_1)\,\Delta_1,$$
$$\Delta_3=(x_3-x_0)\;(x_3-x_1)\;(x_3-x_2)\,\Delta_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta_{n-1} = (x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1) \ldots (x_{n-1} - x_{n-2})\,\Delta_{n-2},$$
$$\Delta_n = (x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})\,\Delta_{n-1}.$$

Подставляя вмѣсто $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{n-1}$ послѣдовательныя ихъ значенія, получаемъ окончательно

$$\Delta_n = (x_n - x_0) \ldots (x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_0) \ldots (x_{n-1} - x_{n-2}) \ldots$$
$$\ldots (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0).$$

Умноженіе опредѣлителей. Произведеніе двухъ опредѣлителей можетъ быть приведено къ виду опредѣлителя, элементы котораго состоятъ изъ суммъ произведеній элементовъ каждой строки одного изъ опредѣлителей на соотвѣтственные элементы строкъ другого.

Такъ напримѣръ, произведеніе опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

есть

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1, & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2, & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2, & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1, & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2, & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательства, которыя мы дадимъ для этого частнаго случая, прилагаются и къ общему случаю. Такъ какъ каждый элементъ написаннаго опредѣлителя состоитъ изъ суммы трехъ членовъ, то этотъ опредѣлитель можетъ быть разложенъ на сумму 27 опредѣлителей, которые получимъ, беря частный столбецъ въ каждомъ изъ трехъ предыдущихъ столбцовъ. Безполезно выписывать всѣ эти опредѣлители, достаточно указать два или три первыхъ изъ нихъ:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & a_1\alpha_2, & a_1\alpha_3 \\ a_2\alpha_1, & a_2\alpha_2, & a_2\alpha_3 \\ a_3\alpha_1, & a_3\alpha_2, & a_3\alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & b_1\beta_2, & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1, & b_2\beta_2, & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1, & b_3\beta_2, & c_3\gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & c_1\gamma_2, & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1, & c_2\gamma_2, & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1, & c_3\gamma_2, & b_3\beta_3 \end{vmatrix} + \ldots$$

Слѣдуетъ замѣтить теперь, что во всѣхъ опредѣлителяхъ каждый столбецъ имѣетъ общаго множителя, который можно написать общимъ множителемъ опредѣлителя.

Приведенные члены могутъ быть поэтому написаны такъ:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \begin{vmatrix} a_1, & a_1, & a_1 \\ a_2, & a_2, & a_2 \\ a_3, & a_3, & a_3 \end{vmatrix} + \alpha_1\beta_2\gamma_3 \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \alpha_1\gamma_2\beta_3 \begin{vmatrix} a_1, & c_1, & b_1 \\ a_2, & c_2, & b_2 \\ a_3, & c_3, & b_3 \end{vmatrix} + \ldots,$$

но первый изъ этихъ опредѣлителей равенъ нулю, ибо два его столбца тождественны; второй есть не что иное какъ первый изъ данныхъ опредѣлителей, третій же тотъ же самый, что и второй, но только взятый съ обратнымъ знакомъ. Равнымъ образомъ всякій другой частный опредѣлитель, въ которомъ два столбца тождественны, исчезнетъ и мы увидимъ, что всѣ не уничтожающіеся опредѣлители будутъ равны первому изъ данныхъ, тогда какъ ихъ множители члены второго изъ данныхъ опредѣлителей·

Подобнымъ же образомъ можно было бы разложить опредѣлитель въ рядъ членовъ, равныхъ второму изъ данныхъ опредѣлителей, умноженному на одинъ изъ элементовъ перваго.

Въ виду важности этой теоремы мы дадимъ другое доказательство ея.

Разсматривавшійся въ предыдущемъ параграфѣ опредѣлитель есть результатъ исключенія перемѣнныхъ изъ уравненій

$$(a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1)\,x+(a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2)\,y+(a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3)\,z=0,$$

$$(a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1)\,x+(a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2)\,y+(a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3)\,z=0$$

$$(a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1)\,x+(a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2)\,y+(a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3)\,z=0,.$$

Если теперь положимъ:

$$\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z=X,$$
$$\beta_1x+\beta_2y+\beta_3z=Y,$$
$$\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3z=Z.$$

Если система уравненій

$$a_1X+b_1Y+c_1Z=0,$$
$$a_2X+b_2Y+c_2Z=0,$$
$$a_3X+b_3Y+c_3Z=0,$$

преобразована при помощи подстановокъ

$$X=\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z,$$
$$Y=\beta_1x+\beta_2y+\beta_3z,$$
$$Z=\gamma_1x+\gamma_2y+\gamma_3z,$$

то опредѣлитель преобразованной системы равенъ опредѣлителю D первоначальной системы, умноженному на опредѣлитель Δ, называемый *модулемъ преобразованія*.

Приведенная теорема можетъ быть обобщена слѣдующимъ образомъ. Положимъ что заданы двѣ системы элементовъ

$$\left\|\begin{matrix}a_1, & b_1, & c_1\\ a_2, & b_2, & c_2\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2\end{matrix}\right\|,$$

причемъ въ каждой системѣ число строкъ меньше числа столбцовъ, и мы составимъ опредѣлитель изъ этихъ элементовъ подобно тому, какъ мы это дѣлали въ предыдущемъ параграфѣ:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1, & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix},$$

то этотъ опредѣлитель будетъ равняться суммѣ слѣдующихъ

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & a_2\alpha_1 \\ a_1\alpha_2, & a_2\alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & b_2\beta_1 \\ a_1\alpha_2, & b_2\beta_2 \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= (a_1b_2)(\alpha_1\beta_2) + (a_1c_2)(\alpha_1\gamma_2) + (b_1c_2)(\beta_1\gamma_2),$$

то есть, написанный опредѣлитель равенъ суммѣ произведенiй всевозможныхъ опредѣлителей, которые можно составить изъ элементовъ первой системы, умноженныхъ на соотвѣтственные опредѣлители, которые можно составить изъ элементовъ второй.

Подобнымъ образомъ разсмотримъ двѣ системы, въ которыхъ число строкъ больше числа столбцовъ; напримѣръ

$$\left\|\begin{matrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 \\ \alpha_3, & \beta_3 \end{matrix}\right\|$$

и по прiему, указанному уже, составимъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1, & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1, & a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2, & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 \\ a_1\alpha_3 + b_1\beta_3, & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3, & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 \end{vmatrix},$$

то этотъ опредѣлитель тождественно равенъ нулю.

Весьма полезный частный случай заключается въ томъ, что квадратъ опредѣлителя есть симметрическiй опредѣлитель. Такъ, квадратъ опредѣлителя $(a_1 b_2 c_3)$ есть

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2, & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3, & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3, & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}.$$

На основанiи предыдущаго заключаемъ также, что сумма квадратовъ опредѣлителей

$$(a_1b_2)^2 + (b_1c_2)^2 + (c_1a_2)^2$$

есть опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2, & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{vmatrix}.$$

Мы будемъ называть опредѣлитель вида

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}$$

взаимнымъ по отношенію къ опредѣлителю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix},$$

если каждый элементъ опредѣлителя Δ' есть миноръ опредѣлителя Δ, относящійся къ соотвѣтственному члену послѣдняго опредѣлителя. Напримѣръ, B_1 есть миноръ, получаемый изъ опредѣлителя Δ черезъ вычеркиваніе первой строки и второго столбца, на пересѣченіи которыхъ лежитъ элементъ b_1. Перемножая опредѣлители Δ и Δ', получимъ

$$\begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, & a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1, & a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 \\ a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2, & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 \\ a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3, & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3, & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix},$$

но, по §

$$a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = \Delta,\ a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0, \ldots,$$

слѣдовательно

$$\Delta . \Delta' = \begin{vmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & \Delta, & 0 \\ 0, & 0, & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3,$$

откуда

$$\Delta' = \Delta^2.$$

Подобнымъ же образомъ докажемъ и общую теорему для опредѣлителя какого угодно порядка n:

$$\Delta' . \Delta = \Delta^n,\ \Delta' = \Delta^{n-1}.$$

Приложеніе теоріи опредѣлителей къ рѣшенію уравненій первой степени и къ теоріи исключенія.

Дана система n уравненій

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots &= \xi, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots &= \eta, \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots &= \zeta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

съ n неизвѣстными x, y, z., . . .

Беремъ опредѣлитель, составленный изъ n^2 коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ въ заданной системѣ $a_1, b_1, c_1, \ldots a_2, b_2, \ldots a_3, \ldots$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Составляемъ взаимный опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & \ldots \\ A_2, & B_2, & C_2, & \ldots \\ A_3, & B_3, & C_3, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Умноживъ послѣдовательно уравненія нашей системы на элементы перваго столбца взаимнаго опредѣлителя; т. е. первое уравненіе на A_1, второе на A_2 и складывая, замѣтимъ, что коэффиціенты при $y, z, \ldots$ пропадутъ тогда какъ коэффиціентъ при x будетъ равенъ Δ. Получимъ

$$x \,.\, \Delta = A_1\xi + A_2\eta + A_3\zeta + \ldots \qquad (*)$$

Если коэффиціенты, составляющіе опредѣлитель Δ, такъ выбраны, что опредѣлитель Δ равенъ нулю, то опредѣлить неизвѣстную x изъ уравненія (*) нельзя, ибо въ этомъ случаѣ x изъ этого уравненія пропадаетъ и получается равенство

$$0 = A_1\xi + A_2\eta + A_3\zeta + \ldots \qquad (**)$$

Если $\xi, \eta, \zeta \ldots$ суть такіе коэффиціенты, которые не удовлетворяютъ полученному равенству, то наша система заключаетъ въ себѣ противорѣчіе. Если же $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ таковы, что уравненіе (**) удовлетворяется, то неизвѣстная x остается совершенно произвольною и система, не заключая противорѣчія, не опредѣляетъ неизвѣстную x. То же относится и къ другимъ неизвѣстнымъ $y, z, \ldots$

Если опредѣлитель Δ не равенъ нулю, то изъ уравненія (*) получаемъ

$$x = \frac{A_1\xi + A_2\eta + A_3\zeta + \ldots}{\Delta}.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ

$$y = \frac{B_1\xi + B_2\eta + B_3\zeta + \ldots}{\Delta},$$

$$z = \frac{C_1\xi + C_2\eta + C_3\zeta + \ldots}{\Delta},$$

. . . .

Если всѣ коэффиціенты $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ равны нулю, то уравненіе (*) обращается въ слѣдующее

$$x \, . \, \Delta = 0.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ и другія уравненія:

$$y \, . \, \Delta = 0, \quad z \, . \, \Delta = 0, \ldots$$

Система послѣднихъ уравненій не иначе можно удовлетворить, какъ полагая, или

$$\Delta = 0,$$

тогда x, y, z, ... могутъ не равняться нулю, причемъ каждая изъ нихъ можетъ имѣть безчисленное множество значеній; или же, если Δ не равняется нулю, то должны равняться нулю заразъ всѣ неизвѣстныя x, y, z, ...

Примѣчаніе 1. Легко замѣтить, что числитель въ выраженіи для x есть не что иное, какъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \xi, & b_1, & c_1, & \ldots \\ \eta, & b_2, & c_2, & \ldots \\ \zeta, & b_3, & c_3, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Подобнымъ же образомъ числитель у неизвѣстной y получается черезъ замѣну въ опредѣлителѣ Δ столбца, составленнаго изъ коэффиціентовъ при y, столбцомъ вторыхъ частей $\xi, \eta, \zeta, \ldots$

Примѣчаніе 2. Въ случаѣ если $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ равны нулю, равенство $\Delta = 0$ можно разсматривать какъ результатъ исключенія буквъ x, y, z, ... изъ заданной системы. Въ этомъ случаѣ заданная система называется системою *однородною*, ибо во всѣ ея члены входитъ по крайней мѣрѣ одна неизвѣстная въ одной и той же степени, первой, и нѣтъ члена, не содержащаго неизвѣстныхъ, или члена нулевой степени относительно этихъ неизвѣстныхъ.

Покажемъ, какъ исключить n неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots$ изъ $n+1$ уравненій:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots &= \xi, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots &= \eta, \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots &= \zeta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (1)$$

Сказанное исключеніе мы можемъ себѣ представить совершеннымъ слѣдующимъ образомъ: одно изъ $n+1$ уравненій, напримѣръ послѣднее, не будемъ разсматривать; оставшуюся же систему n уравненій рѣшимъ, по только указанному правилу, относительно n неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots$

Полученныя численныя значенія подставимъ въ послѣднее уравненіе. Полученное равенство будетъ результатомъ исключенія буквъ $x, y, z, \ldots$ и дастъ то условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты $n+1$ заданныхъ уравненій, для того чтобы всѣ эти уравненія удовлетворились одною системою неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots$

Указанное условное уравненіе между коэффиціентами мы легко получимъ изъ слѣдующихъ соображеній. Введемъ, кромѣ n неизвѣстнымъ, еще одну новую неизвѣстную v прежнія неизвѣстныя $x, y, z, \ldots$ замѣнимъ слѣдующими

$$\frac{x}{v}, \ \frac{y}{v}, \ \frac{z}{v}, \ldots$$

Тогда по умноженіи на v неоднородная система $n+1$ уравненій (1) обратится въ систему однородную $n+1$ уравненій съ $n+1$ неизвѣстными $x, y, z, \ldots v$:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots - \xi v &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots - \eta v &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots - \zeta v &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Результатомъ же исключенія неизвѣстныхъ изъ однородной системы, по предыдущимъ разсужденіямъ, будетъ равенство нулю опредѣлителя, составленнаго изъ коэффиціентовъ, въ данномъ случаѣ

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots & \xi \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots & \eta \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots & \zeta \\ \ldots & & \ldots & & \end{vmatrix} = 0.$$

Если система линейныхъ уравненій первой степени заключаетъ больше неизвѣстныхъ, чѣмъ уравненій, то такая система не опредѣляетъ вполнѣ неизвѣстныхъ.

Разсмотримъ подробнѣе случай, когда число уравненій на единицу меньше числа неизвѣстныхъ, да, кромѣ того, эти уравненія однородны.

Итакъ, дано $n-1$ уравненій

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

съ n неизвѣстными $x, y, z, \ldots$

Добавимъ къ нашей системѣ еще уравненіе съ совершенно произвольными коэффиціентами

$$ax + by + cz + \ldots = \varepsilon,$$

гдѣ числа $a, b, c, \ldots \varepsilon$ совершенно произвольны. Тогда получаемъ систему n уравненій съ n неизвѣстными

$$\begin{array}{l} ax + by + cz + \ldots = \varepsilon, \\ a_1x + b_1y + c_1z + \ldots = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (1)$$

Произвольные коэффиціенты $a, b, c, \ldots$ будемъ выбирать совершенно произвольно, подъ однимъ лишь условіемъ, чтобы не обращался въ нуль опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & c, & \ldots \\ a_1, & b_1, & c_1, & \ldots \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Составляя для этого опредѣлителя взаимный

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C, & \ldots \\ A_1, & B_1, & C_1, & \ldots \\ A_2, & B_2, & C_2, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

мы относительно его, прежде всего, замѣчаемъ, что миноры первой строки $A, B, C, \ldots$ суть числа данныя, ибо не заключаютъ произвольныхъ элементовъ $a, b, c, \ldots$ первой строки опредѣлителя Δ. Что же касается другихъ миноровъ $A_1, B_1, \ldots A_2, \ldots$,

то въ составъ ихъ входятъ произвольные элементы $a, b, c, \ldots$ первой строки. Рѣшая систему уравненій (1) относительно неизвѣстныхъ, получимъ

$$x \,.\, \Delta = \varepsilon A, \quad y \,.\, \Delta = \varepsilon B, \quad z \,.\, \Delta = \varepsilon C, \ \ldots$$

Послѣднія уравненія можно представить въ видѣ пропорцій:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \ldots = \frac{\varepsilon}{\Delta}.$$

Но такъ какъ ε число совершенно произвольное, Δ же не равняется нулю, то мы видимъ, что $x, y, z, \ldots$ остаются произвольными, причемъ между ними существуетъ зависимость, выражаемая пропорціей:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \ldots$$

Показавъ, какъ производятся исключенія неизвѣстныхъ при системахъ уравненій первой степени, обращаемся теперь къ исключенію неизвѣстныхъ изъ системъ уравненій высшихъ степеней. Ограничимся здѣсь разсмотрѣніемъ случая исключенія одной неизвѣстной x изъ двухъ уравненій степеней выше первой. Начнемъ съ простѣйшихъ случаевъ.

Мы уже видѣли, что результатъ исключенія x изъ двухъ уравненій

$$ax + b = 0, \quad a'x + b' = 0$$

есть уравненіе $ab' - a'b = 0$. Если теперь имѣемъ два уравненія второй степени

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

то умножимъ первое на a', второе на a и вычтемъ, получимъ

$$(ab')\, x + (ac') = 0.$$

Умножимъ первое уравненіе на c', второе на c, вычтемъ и раздѣлимъ на x, получимъ

$$(ac')\, x + (bc') = 0.$$

Задача приведена такимъ образомъ къ исключенію неизвѣстнаго x изъ двухъ линейныхъ уравненій, въ результатѣ чего получаемъ:

$$(ac')^2 + (ba')\,(bc') = 0.$$

Обращаясь къ случаю исключенія неизвѣстной изъ двухъ уравненій степени m и n, ограничимся изложеніемъ способа Эйлера.

Если два уравненія степени m и n имѣютъ общаго множителя первой степени, то получимъ одинаковый результатъ, умножимъ ли первое уравненіе на $n - 1$ другихъ множителей второго, или второе на $m - 1$ множителей перваго. Слѣдовательно, если

умножимъ первое на произвольную функцію $n-1$ степени, вводящую n произвольныхъ постоянныхъ, второе на произвольную функцію $m-1$ степени, вводящей m постоянныхъ, и если приравняемъ почленно обѣ полученныя такимъ образомъ функціи $m+n-1$ степени, то получимъ $m+n$ уравненій, изъ которыхъ можемъ исключить $m+n$ произвольныхъ постоянныхъ, которыя всѣ первой степени, и получимъ такимъ образомъ, въ видѣ опредѣлителя, результатъ исключенія неизвѣстнаго изъ двухъ данныхъ уравненій.

Напримѣръ, требуется исключить неизвѣстную x изъ уравненій:

$$ax^2+bx+c=0,\quad a'x^2+b'x+c'=0.$$

Придется приравнять почленно

$$(Ax+B)(ax^2+bx+c) \text{ и } (A'x+B')(a'x^2+b'x+c');$$

получаемъ четыре уравненія

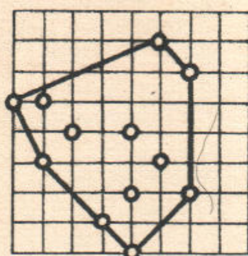
$$\begin{aligned} Aa \qquad\quad - A'a' \qquad\quad &= 0,\\ Ab+Ba-A'b'-B'a' &= 0,\\ Ac+Bb-A'c'-B'b' &= 0,\\ +Bc \qquad\quad -B'c' &= 0. \end{aligned}$$

Исключая A, B, A', B', получаемъ

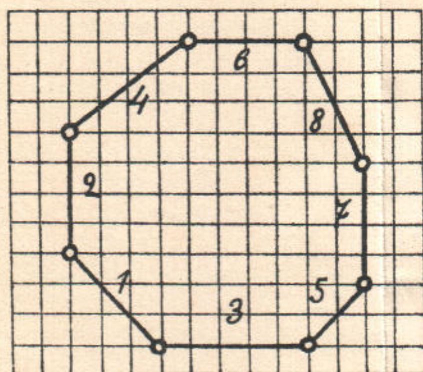
$$\begin{vmatrix} a, & 0, & a', & 0\\ b, & a, & b', & a'\\ c, & b, & c', & b'\\ 0, & c, & 0, & c' \end{vmatrix} = 0.$$

Кромѣ этого способа Эйлера существуютъ еще методы Безу, Сильвестра, и въ особенности метода, основанная на свойствахъ симметрическихъ функцій отъ корней, излагаемая въ тѣхъ частяхъ высшей алгебры, которыя посвящены изученію свойствъ функцій отъ корней алгебраическихъ уравненій.

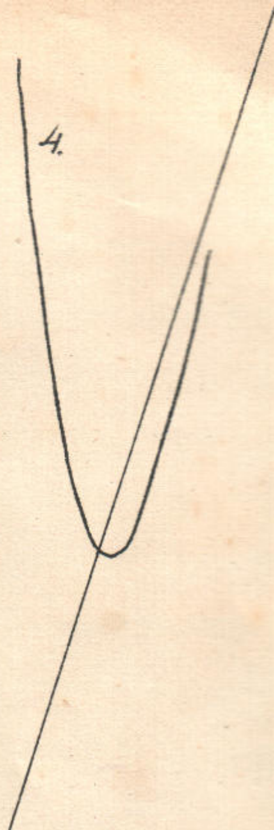
Для желающихъ ближе ознакомиться съ теоріей опредѣлителей и ея главнѣйшихъ приложеній можно рекомендовать *G. Salmon*. Lecons d'Algèbre Supérieure. *Baltzer*. Theorie der Determinanten и на русскомъ языкѣ: *Ващенко-Захарченко*. Теорія опредѣлителей.



1.



3.



2.